Udkast til en Theorie om de harmoniske Progressioner.

Indbydelsesskrift

til

den offentlige Examen,

som holdes

i Riber Cathedralskole

d. 5te til 17de Septbr. 1814.

Ved

H. J. Hansen,

Adjunct.

Ribe.

Trykt hos N. S. Hyphoff.

Archimedes und der Schüler.

Zu Archimedes kam ein wißbegieriger Jüngling,
Weihe mich, sprach er zu ihm, ein in die göttliche Kunst,
Die so herrliche Frucht dem Vaterlande getragen
Und die Mauren der Stadt vor der Sambuca beschützt
"Göttlich nennst du die Kunst? Sie ist's, erwiedert der Weise,
Aber das war sie mein Sohn, eh' sie dem Staate gedient.
Willst du nur Früchte von ihr, die kann auch die Sterbliche zeugen,
Wer um die Göttin freit, suche in ihr nicht das Weib."

Schiller.

Ved min Læsning i mathematiske Skrifter stødte j
oftere paa Steder, hvor harmoniske Rækker nævntes. V
gjerlig efter at kiende dem nøiere, søgte jeg i de math
matiske Skrifter, jeg her kan overkomme, men traf ikk
Definitionen i Wolfii Elementis Analyseos §. 186. J
besluttede derfor ved Hielp af denne Definition og af
Bemærkninger, jeg leilighedsviis havde gjort, at unde
søge disse Rækkers Egenskaber og at fremsætte dem i
sammenhængende Orden. Resultaterne af denne Unde
søgelse er det jeg herved fremlægger, og hvis Ufuldko
menhed kyndige Læsere ville undskylde med mine Hielp
midlers fragmentariske Beskaffenhed, og derfor bedøm
med Skaansomhed. Ved Udførelsen fandt jeg at den
Materie, hvad de harmoniske Rækker selv angaaer,
temmelig ufrugtbar, men at den kan føre til meget int
ressante Bemærkninger over adskillige andre Rækker, hvo
paa §. 13 — 15 kunne tjene til Exempel. Disse Rækk
kunne fortjene en nærmere Betragtning, som Tiden il
denne Gang tillader mig, da jeg uforventet er truff
paa dem. Imidlertid tjene de til Beviis paa, at na
man søger, finder man, om just ikke det, man leder
ter, saa dog undertiden noget Bedre.

§. 1.

Ere tre Tal a, b og c saaledes beskafne at a — b — c = a: c, siges disse tre Tal at udgjøre en sammenhængende harmonisk Proportion. En Række Tal, hvoraf hver tre paa hinanden følgende udgjøre en sammenhængende harmonisk Proportion kaldes en harmonisk Progression eller Talrække.

§. 2.

Ere tre paa hinanden følgende Led i en harmonisk Række k, l, x, findes af Proportionen $k - l : l - x = k : x$, $x = \frac{kl}{2k - l}$. Forandres disse tre Størrelser til Brøker med eens Tæller, blive de $\frac{kl}{l}, \frac{kl}{k}, \frac{kl}{2k-l}$. Heraf sees at hver tre paa hinanden følgende Led kunne udtrykkes som Brøker, hvis Tællere ere det samme Tal, men hvis Nævnere udgjøre en sammenhængende arithmetisk Proportion.

§. 3.

Følgelig maa enhver harmonisk Række kunne udtrykkes ved en Række Brøker, hvis Tællere ere

det samme Tal, men hvis Nævnere udgjøre e
arithmetisk Progression.

En harmonisk Række kan derfor i Almindelig
hed fremstilles under denne Form:

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{b+d}, \frac{a}{b+2d}, \ldots\ldots \frac{a}{b+(n-1)d} = \frac{a}{b-d+nd} \ldots$$

hvor n er Viseren og d kan være enten positiv elle
negativ efter Rækkens Beskaffenhed.

§. 4.

Ere de to første Led af en harmonisk Række
og B, bliver efter §. 2 det tredie $\frac{AB}{2A-B}$, det fjer
$\frac{AB}{3A-2B}$, det nte $\frac{AB}{(n-1)A-(n-2B)}$.

At Udtrykkene i 3die og 4de §. kunne forandr
det ene til det andet behøver neppe at erindre
Nemlig $A = \frac{a}{b}$, $B = \frac{a}{b+d}$; $a = \frac{ABd}{A-B}$, $b = \frac{B}{A-}$
hvor d altid kan bestemmes saaledes at a og b bli
hele Tal ved at sætte $d = A - B$, hvorved a b
ver $= AB$, $b = B$ og $d = A - B$.

§. 5.

Nogle Exempler kunne oplyse det foregaaen
Er $A = 5$, $B = 8$, bliver det tredie Led $\frac{40}{2}$
20, det almindelige Led $\frac{40}{5(n-1)-8(n-2)} = \frac{40}{11 -}$
hvilket bliver negativt, naar $3n > 11$, alts
fra det fjerde Led af.

Ere de to første Led 6 og 8 er $a = 48$, $b =$
og $d = -2$, altsaa (§. 3) det almindelige Led $\frac{48}{10-}$
hvor det femte Led bliver uendeligt formedelst N

neren $10 - 10 = 0$. De første Led af denne Række ere nemlig:

$$6, 8, 12, 24, \infty, -24, -12 \text{ o. s. v.}$$

§. 6.

Disse Exempler vise, at nogle Led kunne være negative og endog uendelige. Følgende Betragtninger vise, naar og hvorvidt disse Tilfælde finde Sted.

Skal et Led være negativt, saa maa i §. 4. $(n-1)A - (n-2)B < 0$ eller $(n-1)A < (n-2)B$, følgelig $\frac{A}{B} < \frac{n-2}{n-1}$ og da n kan modtage alle Værdier, følgelig ogsaa være $= \infty$, hvorved $\frac{n-2}{n-1}$ forandres til 1, maa $\frac{A}{B}$ være $<$ end 1, det er $A < B$, naar Rækken skal have negative Led.

Af Rækken i §. 3. sees det samme: thi naar her et Led skal blive negativt maa $b + (n-1)d$ være negativ, det er d maa være negativt, og altsaa andet Led større end første.

Udtrykket i §. 3. viser, at naar et Led er negativt, ere alle de følgende det ogsaa; for at bestemme hvor mange positive Led Rækken indeholder, behøver man altsaa kun at søge hvad Værdie n erholder for det første negative Led eller for det uendelige, hvorom nu strax skal handles.

F. E. Er $A = 7, B = 15$, saa er $\frac{7}{15} < \frac{n-2}{n-1}$; følgelig $15n - 30 > 7n - 7$ eller $8n > 23$, ɔ: $n > \frac{23}{8}$, saa at allerede det tredie Led er negativt.

Er $d = A - B$ positiv, altsaa $A > B$ viser Formlen i §. 3. at intet Led kan blive negativt, med mindre man vil antage negative Indices. Naar $A > B$, bliver ogsaa ethvert følgende Led mindre end det foregaaende.

Skal et Led være uendeligt maa dets Nævner være lig o, ɔ: $(n-1)A = (n-2)B$, hvoraf udledes $n = \frac{2B - A}{B - A} = 1 + \frac{B}{B - A}$, og da n skal være et heelt Tal, maa $B - A$ være en Divisor af B og derfor ogsaa af A.

Dette er hvad der i Almindelighed kan være at agte ved de enkelte Led i en harmonisk Række.

§. 7.

Om den hele Række kan dette bemærkes at man kan fortsætte den til begge Sider ved at sætte n positiv og negativ hvorved man efter forrige §. kan bedømme mod hvilken Side der falde positive eller negative eller positive og negative Led.

At fortsætte en given Række foran det første Led, er det samme som til en Række, hvis første Led er $\frac{a}{b}$, andet $\frac{a}{b-d}$, at søge de øvrige Led. Det Led i den saaledes tilbage fortsatte Række, hvis Afstand fra Rækkens Begyndelse er m, bliver altsaa $\frac{a}{b-(m-1)d}$.

Vil man undersøge, hvad Beskaffenhed Rækken maa have for at de negative Led kunne være lige store med de positive behøver man kun at sætte $\frac{a}{b+(n-1)d} = -\frac{a}{b-(m-1)d}$ eller $b + (n-1)d$

$= (m - 1)\,d - b$, hvoraf erholdes $m - n = \frac{2\,b}{d}$; da $m - n$ maa være et heelt Tal, er d en Factor af 2 b; saaofte derfor en Række indeholder et uendeligt Led, ere de paa begge Sider deraf liggende Led ligestore og modsatte: f. E. Er $2\,b = 12$, $d = 2$, saa er Rækken med sine Indices

$$\begin{array}{cccccccc} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \ldots \\ \frac{a}{-4} & \frac{a}{-2} & \frac{a}{0} & \frac{a}{2} & \frac{a}{4} & \frac{a}{6} & \frac{a}{8} & \frac{a}{10} \ldots \end{array}$$

Her forekommer det uendelige Led $\frac{a}{0}$ fordi d er en Factor af b. (§. 6.)

Er $2\,b = 6$, $d = 2$, bliver Rækken

$$\begin{array}{ccccccc} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{a}{-5} & \frac{a}{-3} & \frac{a}{-1} & \frac{a}{1} & \frac{a}{3} & \frac{a}{5} & \frac{a}{7} \ldots \end{array}$$

Her forekommer intet uendeligt Led fordi d vel er en Factor af 2 b, men ikke af b.

Er $2\,b = 6$, $d = 4$ bliver Rækken

$$\begin{array}{cccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{a}{-9} & \frac{a}{-5} & \frac{a}{-1} & \frac{a}{3} & \frac{a}{7} & \frac{a}{11} \ldots \end{array}$$

Her forekommer intet uendeligt Led og de negative kunne ikke være ligestore med de positive, da d hverken er en Factor af b eller af 2 b.

§. 8.

Skal der imellem to givne Tal P og Q findes et vist Antal $(n - 2)$ Tal, som tilligemed hine udgiøre en harmonisk Række af n Led, indsees let Fremgangsmaaden af det foregaaende:

Man forandrer nemlig de to givne Tal til to

Brøker med eens Tæller $\frac{PQ}{Q}$ og $\frac{PQ}{P}$, sætter $\frac{PQ}{Q} = \frac{a}{b}$, $\frac{PQ}{P} = \frac{a}{b + (n-1)d}$ og bestemmer heraf a, b og d; men da der ere tre Størrelser at bestemme, og kun to Ligninger givne, kan man antage en af de ubestemte efter Behag f. E. sætte $a = PQ$, hvorved faaes $b = Q$, $d = \frac{P-Q}{n-1}$ og af a, b og d kunne nu alle Rækkens Led findes efter §. 3.

§. 9.

Sætter man i §. 3. $\frac{d}{b} = \delta$ og dividerer den der opstillede almindelige harmoniske Række med $\frac{a}{b}$ bliver Qvotienten $1, \frac{1}{1+\delta}, \frac{1}{1+2\delta}, \frac{1}{1+3\delta} \ldots \frac{1}{1+(n-1)\delta}$; Saa at enhver harmonisk Række kan fremstilles under denne Form:

$$\frac{a}{b}\left(1 + \frac{1}{1+\delta} + \frac{1}{1+2\delta} + \frac{1}{1+3\delta} \ldots + \frac{1}{1+(n-1)\delta}\right)$$

§. 10.

Kunde man altsaa finde Summen af denne Række; $1 + \frac{1}{1+\delta} + \frac{1}{1+2\delta} + \frac{1}{1+3\delta} \ldots + \frac{1}{1+(n-1)\delta}$ vilde man og kunne bestemme Summen af enhver given harmonisk Række. Men at der ikke kan gives noget almindelig gjeldende summatorisk Led for en saadan Form af en harmonisk Række er tydeligt deraf, at der iblandt denne Rækkes Led kan forekomme uendelige, hvorved den hele Rækkes Sum bliver ubestemt.

§. 11.

Dog var det maaskee muligt, at der kunde opdages Maader, at finde Summen af visse harmoniske Rækker, hvis Led alle vare enten positive eller negative, f. Ex. naar δ var et positivt heelt Tal, som i disse:

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \ldots\ \tfrac{1}{n}.$$

$$1,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{7},\ \ldots\ \frac{1}{2n-1}.\ \text{o. s. v.}$$

Summen af Qvadraterne af den første af disse Rækkers Led fortsatte i det uendelige er $= \frac{\pi\pi}{6}$, Summen af Biqvadraterne $= \frac{\pi^4}{90}$ o. s. v. (v. Euleri introd. in Anal. Infin. t. 1. §. 167 til 177). Og da disse (som man vel kan kalde dem) høiere harmoniske Rækker kunne summeres, vil vel og en tilkommende Euler kunne finde Summen af den simple harmoniske Række. Sammested §. 170 lærer Euler hvorledes Summen af de lige Potenser af den anden Række

$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},$ ꝛc. findes.

§. 12.

Er end ikke Summen af nogen uendelig harmonisk Række bekjendt, veed man dog i nogle Tilfælde Forskjellen imellem to Rækkers Summer. Saaledes er

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8}\ \text{o. s. v.}$$

lig den hyperbolske Logarithme til Tallet 2, hvilken er 0,6931471805599.

Ligesaa er Summen af denne Række med afvexlende Tegn

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \dots$$

lig $\frac{1}{4}\pi = 0,7853981633974\dots$

Da de enkelte Led af de i forrige §. omtalte uendelige Rækker, hvis Summer ere bekjendte, ligesaavel kunne være Potenser af disse Rækker med afvexlende Tegn, som af de der fremsatte positive, saa er det maaskee kun Rækker med afvexlende Tegn, og Rækker af de lige Potenser af disses Led, som vil kunne lade sig summere saaledes. Dog flere Betragtninger herover tilstæder Rummet ikke her.

§. 13.

Da man kan finde Summen af enhver endelig harmonisk Række ved efterhaanden at addere de enkelte Led sammen kan dette tjene til at finde Summen af visse uendelige Rækker, der ere ligestore med de endelige harmoniske.

Saaledes: da de sidste Led i en uendelig harmonisk Række forsvinde, er enhver endelig Række Forskjellen imellem to uendelige. Er f. Ex. Rækken denne:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} = S$$

saa er

$$S = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \\ - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} - - \end{cases}$$

Subtraherer man her hvert Led i den nederste Række fra det dermed eensstaaende i den øverste, faaes:

$$S = \frac{n}{1(n+1)} + \frac{n}{2(n+2)} + \frac{n}{3(n+3)} + \frac{n}{4(n+4)} + + +$$

Sættes $n = 1$, bliver $S = 1$, altsaa

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + +$$

I denne Række er det mte Led $= \frac{1}{m(m+1)}$ og det summatoriske Led $= \frac{m}{m+1}$.

Sættes $n = 2$, bliver $S = 1\frac{1}{2}$, altsaa

$$1\tfrac{1}{2} = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{4.6} + +$$

Ligesaa er

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = \frac{3}{1.4} + \frac{3}{2.5} + \frac{3}{3.6} + \frac{3}{4.7} + \frac{3}{5.8} + +$$

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} = \frac{4}{1.5} + \frac{4}{2.6} + \frac{4}{3.7} + \frac{4}{4.8} + +$$

o. s. v.

Sættes $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + + \frac{1}{2n-1} = S$, saa er

$$S = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + + \\ - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} - - \end{cases}$$

og naar de eensstaaende Led samles,

$$S = \frac{2n}{1(2n+1)} + \frac{2n}{3(2n+3)} + \frac{2n}{5(2n+5)} + +$$

Sættes $n = 1$, bliver

$$S = 1 = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \frac{2}{9.11} + +$$

hvor det almindelige Led er $= \frac{2}{(2m-1)(2m+1)}$ og det summatoriske $= \frac{2m}{2m+1}$.

Ligesaa er

$$1 + \tfrac{1}{3} = \frac{4}{1.5} + \frac{4}{3.7} + \frac{4}{5.9} + \frac{4}{7.11} + +$$

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} = \frac{6}{1.7} + \frac{6}{3.9} + \frac{6}{5.11} + \frac{6}{7.13} + +$$

o. s. v.

Paa denne Maade kunne utallige uendelige Rækker findes, hvis Sum er bekjendt, saavel for et uendeligt som for et bestemt Antal Led.

Nemlig Summen af m Led af den Række, som er lig $1 + \frac{1}{2}$ er $= \frac{m}{1(m+1)} + \frac{m}{2(m+2)}$; af den Række, som er $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ er Summen af m Led $= \frac{m}{1(m+1)} + \frac{m}{2(m+2)} + \frac{m}{3(m+3)}$ o. s. f.

Andre Mærkeligheder og indbyrdes Relationer ved disse uendelige Rækker tillader Tiden mig ikke denne Gang at udføre.

§. 14.

En endelig harmonisk Række: $1 + \frac{1}{1+d} + \frac{1}{1+2d} + \frac{1}{1+3d} + \frac{1}{1+4d} + + + \frac{1}{1+(n-1)d}$ kan ogsaa forvandles til en uendelig Række paa denne Maade:

$$1 = 1$$
$$\frac{1}{1+d} = 1 - d + d^2 - d^3 + d^4 - d^5 + -$$
$$\frac{1}{1+2d} = 1 - 2d + 4d^2 - 8d^3 + 16d^4 - 32d^5 + -$$
$$\frac{1}{1+3d} = 1 - 3d + 9d^2 - 27d^3 + 81d^4 - 243d^5 +$$
$$\frac{1}{1+4d} = 1 - 4d + 16d^2 - 64^3 + 256d^4 - 1024d^5 +$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{1}{1+nd} = 1 - nd + n^2d^2 - n^3d^3 + n^4d^4 - n^5d^5 + -$$

Adderer man to eller flere af disse Rækker, faaer man andre uendelige Rækker, hvis endelige Sum er lig Summen af de Led af den harmoniske Række, som svare til dem. Dog vil dette vel ikke være af synderlig Nytte til Summeringen af Rækker, da det for det meste vil være vanskeligt at er kjende om en given uendelig Række er Summen af flere af hine Rækker.

§. 15.

Dividerer man alle Leddene i den uendelige Række
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots = M$
med 2, fremkommer denne Række
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots = N = \frac{1}{2} M.$
Trækkes nu N fra M, bliver Resten
$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots = R$
R skulde altsaa være = N og dog er hvert Led i R større end det dertil svarende i N.

Denne tilsyneladende Urimelighed hæves saaledes: Naar Rækken M. er
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{\infty}$
saa er N
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty+2} + \frac{1}{\infty+4} + \ldots + \frac{1}{2\infty}$
altsaa R
$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{\infty+1} - \frac{1}{\infty+2} - \frac{1}{\infty+4} - \frac{1}{2\infty}$ Her er nu upaatvivleligt R = N = $\frac{1}{2}$ M, og følgelig R − N = 0 = $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty+2} - \frac{1}{\infty+4} - \frac{2}{\infty+6} \ldots - \frac{2}{2\infty}$
Men, som det er anført i §. 12.
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots - \frac{1}{\infty}$
er lig den naturlige Logarithme til Tallet 2.
Altsaa er $\frac{1}{\infty+2} + \frac{1}{\infty+4} + \frac{1}{\infty+6} \ldots + \frac{1}{2\infty}$
$= \frac{1}{2}$ Log. nat. 2. $= 0{,}34657359 \ldots =$
$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \ldots\right)$;
hvoraf sees, at en Række uendelig smaa Tal kunne have samme Sum, som en Række endelige.

Examen begynder 5te September og holdes i denne Orden:

Skriftlige Prøver.

		Formiddag.	Eftermiddag.
Mandag den 5te	. . .	Dansk Stiil.	—
Tirsdag - 6te	. . .	Latinsk Stiil.	—

Mundtlige Prøver.

Onsdag - 7de	. . .	Græsk.	Hebraisk.
Torsdag - 8de	. . .	Religion.	—
Fredag - 9de	. . .	Historie.	—
Løverdag - 10de	. . .	Mathematik.	—
Mandag - 12te	. . .	Latin.	—
Tirsdag - 13de	. . .	Fransk.	Tydsk.
Torsdag - 15de	. . .	Geographie.	—
Fredag - 16de	. . .	Dansk.	—

Den os anbetroede Ungdoms Forældre og Paarørende saavelsom andre Skolens Velyndere indbydes herved til at overvære Examen og den Höjtidelighed, hvormed den sluttes Løverdagen den 17de om Eftermiddagen Kl. 3.