REDOGÖRELSE

FÖR

HÖGRE ELEMENTAR-LÄROVERKET I WESTERÅS

UNDER LÄSEÅRET 1865—1866

JEMTE

INBJUDNING

TILL

ÅRS-EXAMEN OCH SLUTÖFNINGARNA

DEN 2:dra OCH 4:de JUNI 1866

AF

LUDVIG MOSSBERG,
LÄROVERKETS REKTOR.

Innehåll: 1) *De första begreppen af läran om de elliptiska functionerna, af* **E. G. BJÖRLING.**

2) *Redogörelse för Elementar-läroverken i* **Westerås, Sala** *och* **Arboga** *samt Stadspedagogierne i* **Köping, Nora** *och* **Linde.**

WESTERÅS,
hos Tryckeri-aktiebolaget, 1866.

De första begreppen af
läran om de elliptiska functionerna,

af

E. G. Björling.

De torde nog finnas, som vid första blicken på denna uppsats förundra sig — för att icke säga något annat — öfver densammas framträdande i en tid, då kännedomen af de elliptiska functionerna redan längesedan blifvit — snart sagdt — *hvars mans*, och denna kännedom dessutom vanligen inhemtad från en ståndpunkt med mycket vidsträcktare vyer, än dem som här erbjudas. Men saken är i korthet den, att uppsatsens författare, som — äfven han — lyckats få göra några års bekantskap med nämnda intressanta functioner, trott sig derunder hafva gjort den erfarenhet, att sjelfva *ingången* till detta härliga studiifält ännu är — till en del just till följd af den der upphöjda ståndpunkten, som nämndes — så otillgänglig för *begynnaren*, att det för honom vore en verklig välgerning, om någon välvillig menniska företoge sig att göra honom tillträdet lättare. Det är *den* välvilliga intentionen som föranledt detta arbete. Må det ock blifva sedt från den synpunkten!

Mycket kunde för öfrigt här vara att på förhand nämna om sjelfva innehållet af denna skrift, icke egentligen till nödig upplysning för begynnaren, men såsom författarens förklaring inför de *sakkunnige*. Men utrymmet, som blifvit honom tillmätt, förbjuder all vidlyftighet i detta afseende. *Något* måste dock få rum.

Att vilja *introducera* begynnaren på de *cirkulära* functionernas gebiet förmedelst en definition, som passar för det *allmänna* begreppet "cirkulär function", *hvilket som helst* än argumentet må vara, imaginärt eller reelt, vore uppenbarligen — det medgifves säkerligen af *en och hvar* — att öfverskatta den menskliga förmågan. Försöket skulle säkerligen totalt misslyckas, ehuru det onekligen vill synas från den rent vetenskapliga ståndpunkten som vore den vägen den enda rätta och raka vägen till målet. — Men gäller detta om de cirkulära funktionerna; skulle det icke också gälla, och — om möjligt — *a fortiori*, äfven om de *elliptiska*? Derom är åtminstone hos förf. ingen tvekan. Med *reela* argumenter *måste* man, efter hans tanke, låta begynnaren *börja*, och fördenskull introducera honom *icke* med de *allmänna* definitioner, som motsvara begreppet "elliptiska functioner af ett argument *hvilketsomhelst*" — sådant vore åtminstone lika orådligt som att *i första hand* definiera de cirkulära functionerna förmedelst t. ex. en viss differentialeqvation —, utan med *de* förberedande, som precist motsvara begreppet *elliptiska functioner med reelt argument* och nemligen *under förutsättning tillika af modyl* < 1, *positiv (o inclusive)*. Det är denna fordran som man här sökt ställa sig till efterrättelse; och är det således framför allt att märka, att *i hela denna introductions-skrift frågan är allenast om functioner af* reelt *argument*.*)

Men å andra sidan är det ock af vigt att icke längre, än *verkligen nödigt* är, med sådana förberedelser uppehålla den som ämnar sig in på *det stora fältet*.

Förf. hoppas med en viss tillförsigt att genom denna uppsats hafva — som man säger — *jemnt och nätt* satisfierat begge dessa fordringar. Han vågar till och med hysa den förmodan, att äfven *de* (säkerligen icke få) personer, som icke hafva sistnämnda intention, utan — i betraktande af hvad redan de cirkulära functionerna med *reelt* argument hafva uträttat — finna sig för sina ändamål hafva nog af de elliptiska functionerna i förenämnda *trängre* mening allenast, skola med den ledning, som här blifvit gifven, kunna vidare fortgå på vägen till *sitt* mål *utan att förvillas* af de thy värr än i dag icke sällsynta *missvisningarne*. Det är *just dessa sistnämnda* som *närmast* föranledt förf. att genom denna lilla skrift, om möjligt, bereda andra förskoning från de obehag och svårigheter, som mötte honom sjelf, då han började detta studium.

Nu ock några ord om vissa *specialiteter*.

Att man för att komma till begreppet *"elliptisk function"*, ja äfven till kännedom af sjelfva *fundamental*-egenskaperna hos dessa

*) Dermed är ju ock nöjaktig förklaring afgifven öfver det förhållandet att intet ord här förekommer om *dupliciteten* af de ellipt. functionernas periodicitet.

functioner, alldeles icke *behöfver* — än mindre *bör* — sätta sig i beroende af den *elliptiska integralen* (39) *) med sina klyftigheter, är en *hufvudsaklig* omständighet, hvarpå likväl icke ens vår tids författare synas hafva lagt tillbörlig vigt. Här har den hufvudsaken blifvit vederbörligen iakttagen (§§ 1 och 2), och för öfrigt begynnaren här blifvit förskonad från alla bekymmer angående *nämnde integrals valör för x-valörer num.* > 1. Att ock i sjelfva verket denna *"crux"* i frågan om den elliptiska *integralen* icke alls *angår* den här ifrågavarande, förberedande, läran om de elliptiska *functionerna,* kan af enhvar, som tilläfventyrs ännu hyser någon tvekan i detta mål, klarligen skönjas af hvad i §§ 3 och 5 säges om nämnde integral.

I sammanhang härmed må det tillåtas förf. uttala *"en passant"* den förhoppning, att den enkla deduktionen af relationen (53) eller (52) i § 3 skall erkännas vara lämplig på sin plats.

I likhet med de aldraflesta i vår tid, anser äfven förf. de gamla *Jacobi*'ska beteckningarne

$$(1) \qquad \sin \mathrm{am}(a) \text{ och } \cos \mathrm{am}(a)$$

olämpliga för den *allmänna* theorien, ja han är för sin del *viss,* att de *icke* utan stor våda *kunna* der begagnas, och — såsom af § 4 kan skönjas — skulle han helst se dem utbytta (allt i den nämnda *allmänna* theorien) till de *signifikativa* kortare

$$(2) \qquad \mathfrak{S}(a) \text{ och } \mathfrak{C}(a)^{**)}.$$

Af samma § 4 visar sig för öfrigt äfven, att efter förf:s förmenande *detta slags* beteckningar (vare sig med bokstäfverna $\mathfrak{S}$ och $\mathfrak{C}$ eller med λ och μ eller andra), antydande functionernas beroende *omedelbart af argumentet* och utan förmedling af den intermediära functionen *"amplitud"*, kunna med fördel — och, bland annat, äfven detta såsom en nyttig förberedelse — börja att begagnas redan i den *här* ifrågavarande förberedelse-kursen (argumentet *reelt,* modylen $\leqq 1$), *sedan* man likväl till en början — och väl med den tacksamhet, som i sanning höfves det stora minnet — användt de lika naiva och för den första begynnaren i alla

---

*) Se § 3 här nedan.

**) Heldre än t. ex. de af Hrr *Briot & Bouquet* införda

$$\lambda(a) \text{ och } \mu(a),$$

hänseenden lämpliga som för alla tider minnesrika beteckningarne (1).

Att åter, hvad beträffar beteckningen

$$(3) \qquad \Delta\mathrm{am}(a)$$

för den 3:e af de "*enkla*" elliptiska functionerna, förf. äfven för sin del instämmer i det numera allmänna utdömmandet af densamma *äfven* ur den nämnda *förberedande* theorien, visar sig omedelbart af formeln (7) i § 1, äfvensom att efter hans förmenande det med de begge (2) *analoga* tecknet

$$\mathfrak{D}(a)$$

är särdeles lämpligt att i stället begagnas, äfven för dess egenskap att — som man ser — tydligt nog erinra om den dermed betecknade functionens identitet med den alltid minnesvärda "*Δam-functionen*". Någon motivering för utdömmandet är säkerligen numera icke af nöden. — Att för öfrigt sjelfva uteslutandet af detta tecken (3) redan från början, äfvensom detsammas ersättande af en med tecknen (2) analog beteckning, innebär ett motiv, af vida större vigt än det ofvan antydda *förberedelse*-motivet, för äfven de sistnämnda tecknens införande i stället för de begge (1) vid första lägliga tillfälle, samt att *detta* tillfälle verkligen erbjuder sig sjelft, just då additionsformlerna först komma till tals, torde knappt behöfva nämnas.

Det förhållandet att förf. valt formeln (66) eller (72) till *fundament* för additions-theoremerna, ej mindre än sjelfva sättet som han begagnat för densammas deduktion, ådagalägger helt enkelt, att han — i likhet med så mången annan — bekänner sig i denna del till *Lagrange*. Måhända skall sjelfva *bearbetningen* här af den store mannens deduktion finnas förtjena erkännandet att hafva gjort raisonnementet *lättfattligt* för begynnaren, och nemligen *icke* på bekostnad af grundligheten. Deremot — vare detta sagdt, icke af någon fåfänga å förf:s sida, utan som en liten fingervisning äfven för vetenskapsidkaren — är det af honom använda sättet att ur nämnda grundformel deducera *de öfriga* additionsformlerna anmärkningsvärdt såsom egande företräde framför de hittills begagnade för sin egenskap att vara vida enklare och mera

---

eller *Gudermann's*

$$\mathrm{sn}(a) \text{ och } \mathrm{cn}(a).$$

m. fl.

direkt samt ledande till målet utan allt behof af att considerera functioner med imaginärt argument. *)

Fördelen eller, rättare sagdt, *nödvändigheten* af att *särskildt* examinera *positionen* $k = 1$, *innan* man tillåter sig att orda om elliptiska functioner med "*modyl* ≤ 1", synes thy värr icke vara *allmänt* betänkt af dem som vilja vara ledare; vår § 5 torde fördenskull, äfven den, komma till mätta. — Detsamma ungefär är — som man villigt torde medgifva — att säga äfven om Noten vid slutet.

Till sist ännu ett ord. Man skulle måhända hafva väntat att äfven se någon liten *historik* i ämnet intagen i denna uppsats. En sådan förväntan kunde dock icke gerna härröra annat än af något förbiseende af hvad förf. i början af denna Inledning uttryckligen uppgifvit om *ändamålet* med hela uppsatsen. Icke innefattar väl ämnets *historik* några så beskaffade *hinder* eller *svårigheter för begynnaren*, som der antyddes. För öfrigt torde nog *rätta* tidpunkten för det *början*de studiet af ämnets historik vara just den, då begynnaren som nogast hunnit inhemta de elementer, som utgöra föremålet för denna skrift.

---

§. 1. — Definitioner och grundformler.

1. Om φ är en *reel* variabel; så, i det att man låter densamma continuerligt genomgå alla möjliga valörer, från och med 0, åt positiva och åt negativa hållet, kommer ock functionen

$$(1) \qquad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \text{ kortligen } F(\varphi, k),$$

constanten eller (som man säger) *modylen* k må nu vara positiv < 1, hvilken som helst, eller äfven *noll*,

*) Man jemföre dermed t. ex. *Jacobi's* deduktion i *Crelle's* Journal T. 39 pag. 325—328; eller den af Prof. *O. J. Broch* anförda i en Note "*Sur les formules d'addition des fonctions elliptiques*" i *Comptes rendus* T. 69 (1864) pag. 999 o. följ.; äfven dem som förekomma i "*Theorie der elliptischen Functionen*" af D:r *Durège*, eller uti "*Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen*" af Prof. *Schellbach*.

att sjelf variera *continuerligt* med φ — alldenstund uppenbarligen functionen $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ under integral-tecknet har denna egenskap —, varande $=0$ för $\varphi=0$ och, för öfrigt, städse af samma tecken som φ samt — såsom man tydligt ser — städse

$$(2) \qquad F(-\varphi, k) = -F(\varphi, k)\,,$$

hvarjemte, alldenstund derivatan $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ städse är positiv, functionen (1) sjelf växer indefinit till sin numeriska valör med num. valören af φ, och är således *både* capabel af alla möjliga (reela) valörer *och* olika till sin valör för olika valörer af φ.

Häraf följer, att, ehvad reel qvantitet α än må uppgifvas, städse en φ-valör, men ock *blott en*, satisfierar eqvationen

$$(3) \qquad F(\varphi, k) \left(= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right) = \alpha\,.$$

Den φ-valören skola vi — såsom bruket ock verkligen är — utmärka med benämningen

amplituden för α (mod. k)

och kortligen beteckna med

$$\mathrm{am}(\alpha, k)\,.$$

Och *dess* trigonometriska (cirkulära) functioner *sinus, cosinus,* &c. således

$$\sin\mathrm{am}(\alpha, k)\,, \quad \cos\mathrm{am}(\alpha, k)\,, \quad \&c.$$

äro de som man kallar: "*de elliptiska functionerna, för modylen k, af argumentet α*".

Anm. Af hvilket ofantligt intresse dessa functioner måste vara, kan man lätt ana på förhand, om man besinnar, dels hvad läran om de trigonometriska (cirkulära) functionerna

$$\sin\alpha, \quad \cos\alpha, \quad \&c.$$

uträttat, och dels att dessa sednare allenast utgöra *den mycket speciela art* af de förra

$$\sin\mathrm{am}(\alpha, k)\,, \quad \cos\mathrm{am}(\alpha, k)\,, \quad \&c.\,,$$

som kan karakteriseras genom benämningen

de elliptiska functionerna, *för modylen noll,* af α.

Af definitionen för "am(α, k)" här ofvan följer ju nemligen omedelbart, att

(4) $\quad \mathrm{am}(\alpha, o)$ är α sjelf,

och således

(5) $\quad \sin\mathrm{am}(\alpha, o) = \sin\alpha, \quad \cos\mathrm{am}(\alpha, o) = \cos\alpha$, &c.

Anledningen till benämningen *"elliptiska"* functioner är att inhemta af dessa functioners historik. Att ordet är deriveradt af den bekanta curvans benämning (*ellips*), må dock redan här så mycket heldre nämnas, som äfven dermed en antydning är gifven — likasom med andra ord näst ofvanför — om dessa functioners *allmänlighet* i förhållande till de cirkulära functionernas. Ellipsen är ju *genus*, cirkeln *species*; ellipsen reducerar sig till cirkel, då excentriciteten blir $= 0$; de elliptiska functionerna likaså till de bekanta cirkulära, då modylen blir $= 0$.

Likasom, bland de cirkulära functionerna, de båda $\sin\alpha$ och $\cos\alpha$ kunna anses utgöra elementerna för alla de öfriga, och fördenskull äfven pläga utmärkas med benämningen *"de enkla"* (*fonctions simples*), så har man för sed att, ibland de elliptiska functionerna, med samma benämning utmärka de trenne

(6) $\quad \sin\mathrm{am}(\alpha, k),\ \cos\mathrm{am}(\alpha, k),\ \sqrt{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}(\alpha, k)}$.

Ja, än mer, i de elliptiska functionernas theori utgöra dessa tre till den grad *hela* föremålet för diskussionen, att man vanligen utelemnar epithetet *"de enkla"* och med uttrycket "de elliptiska functionerna" förstår *allenast dessa tre* (der icke annat uttryckligen gifves tillkänna). Vi kunna i förevarande uppsats med så mycket större skäl efterfölja denna sedvänja som verkligen inga andra bland de elliptiska functionerna här komma att omnämnas.

Den tredje ibland dem skola vi — och detta verkligen icke *blott* för *korthets* skull — utmärka med ett särskildt tecken $\mathfrak{D}(\alpha, k)$, antagande således som *definition* formeln

(7) $\quad \mathfrak{D}(\alpha, k) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}(\alpha, k)}$,

varande således functionen $\mathfrak{D}(\alpha, k)$ *positiv* för hvarje (reel) α-valör, och för modylen $k = o$

(8) $\quad \mathfrak{D}(\alpha, o) = 1$ (för hvarje α).

2. Af definitionen här ofvan för "$\mathrm{am}(\alpha, k)$" är uppenbart, först och främst, att

$$(9) \qquad \mathrm{am}(0, k) \text{ är } = 0\,,$$

och således

$$(10) \qquad \sin\mathrm{am}(0, k) = 0,\ \cos\mathrm{am}(0, k) = 1 = \mathfrak{D}(0, k)\,;$$

vidare att

$$(11) \qquad \mathrm{am}(-\alpha, k) \text{ är } = -\,\mathrm{am}(\alpha, k)\ ^{*)},$$

och således

$$(12) \qquad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(-\alpha) \overset{**)}{=} -\sin\mathrm{am}(\alpha)\,, \\ \cos\mathrm{am}(-\alpha) = \cos\mathrm{am}(\alpha)\,, \\ \mathfrak{D}(-\alpha) = \mathfrak{D}(\alpha)\,; \end{cases}$$

samt att, om valören af

$$(13) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \text{ eller } \mathrm{F}(\tfrac{\pi}{2}, k) \text{ betecknas med K, } ^{***)}$$

man får säga, att

$$(14) \qquad \mathrm{am}(\mathrm{K}, k) \text{ är } = \frac{\pi}{2},$$

och således

$$(15) \qquad \sin\mathrm{am}\mathrm{K} = 1,\ \cos\mathrm{am}\mathrm{K} = 0,\ \mathfrak{D}(\mathrm{K}, k) = \sqrt{1 - k^2} = k'$$

(se nedanf.),

---

*) Är neml. $\varphi = \mathrm{am}(\alpha, k)$, och således

$$\mathrm{F}(\varphi, k) = \alpha\,,$$

så är ju

$$-\alpha = -\mathrm{F}(\varphi, k) = \mathrm{F}(-\varphi, k) \text{ enligt (2)},$$

d. ä.

$$-\varphi = \mathrm{am}(-\alpha, k)\,.$$

**) Man kan ju gerna dispensera sig från att utsätta modylen (k), vid tillfällen då intet missförstånd deraf är att befara.

***) För $k = 0$ är således K = sjelfva $\frac{\pi}{2}$, kort sagdt:

$$\mathrm{K}_{(k=0)} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Huru *K-valören* för hvarje särkild *annan* modyl kan beräknas, derom skall framdeles nämnas hvad för vårt ändamål kan vara af nöden. Att den är *positiv* för hvarje modyl, är sjelfklart af dess definition [raden (13)]. Vi betrakta den tills vidare som ett *bekant* tal (function af modylen k, förstås).

samt att för hvarje argument ($\mathfrak{A}$), som är num. $< k$,

(16) $\qquad \mathrm{am}(\mathfrak{A}, k)$ är num. $< \frac{\pi}{2}$,

och således

(17) $\begin{cases} \sin\mathrm{am}\mathfrak{A} \text{ städse af samma tecken som argumentet } (\mathfrak{A}), \\ \cos\mathrm{am}\mathfrak{A} \text{ städse } \textit{positiv} = \sqrt{1 - \sin^2\mathrm{am}\mathfrak{A}}. \end{cases}$

Obs. Det mycket ofta förekommande uttrycket $\sqrt{1 - k^2}$ har man för sed att kortare beteckna med k', *"complementar-modylen till k"* — som man säger — eller äfven: *"modylens k complement"*. *)

Men — torde någon här skäligen fråga — *huru* skall jag få veta sjelfva *valörerna* af hvarje särskildt arguments *sin am-*, *cos am-* och $\mathfrak{D}$-functioner? — Efterföljande paragraf skall förhjelpa oss ett godt stycke fram till besvarande af den *kardinal-frågan.* Der skola vi neml. finna, att dessa functioner (6) äro (likasom de cirkulära *sinus-* och *cosinus*-functionerna) *periodiska* functioner af argumentet (α), samt — till följd deraf — både *att* och *huru* deras valörer för *alla* (reela) argumenter skola fås kända, *allenast man känner dem för samtlige argumenter som äro num.* $\leqq$ K.

§. 2. — Om de elliptiska functionernas periodicitet och differential-coëfficienter.

1. Utan all svårighet inses, **) att hvarje argument num. $>$ K är

(18) $\qquad = \text{något argum. } \mathfrak{A}(\text{num.} \leqq \mathrm{K}) + 2\mu\mathrm{K},$

μ af helt tals num. valör.

Söker jag då till en början

$$\mathrm{am}(\mathfrak{A} + 2m\mathrm{K}),\ m \text{ helt tal},$$

*) Med anledning deraf, att

$$k^2 + k'^2 \text{ är } = 1,$$

eller k'^2 qvantitetens k^2 fyllnad till 1.

**) Blotta inspektionen af bilden

----- $-4\mathrm{K}$ $-3\mathrm{K}$ $-2\mathrm{K}$ $-\mathrm{K}$ 0 K $2\mathrm{K}$ $3\mathrm{K}$ $4\mathrm{K}$ --------

gör ju tillfyllest.

d. ä. den ψ-valör, som satisfierar eqvationen

$$\left[F(\psi, k) = \right] \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} = \mathfrak{A} + 2m\mathrm{K}$$

$$= \mathfrak{A} + 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

eller — emedan, då n är helt tal, tydligen

$$n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \text{ är } = \int_0^{n.\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \text{*)} —$$

den ψ-valör, som satisfierar eqvationen

---

*) Detta sednare membrum är ju

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \cdots\cdots + \int_{(n-1)\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \quad ;$$

och

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \text{ är } = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\chi}}, \text{ alldenstund } \varphi \text{ är } = \pi - \chi,$$

neml. χ begränsad af 0 och $\frac{\pi}{2}$,

$$\text{och således } = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

vidare

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\chi}}, \text{ alldenstund } \varphi \text{ nu är } = \pi + \chi,$$

neml. χ (som nyss),

$$\text{och således } = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

o. s. v.

$$\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} - \int_0^{m\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \mathfrak{A};$$

så, alldenstund detta förra membrum är $= \int_{m\pi}^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$

$$= \int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{1-k^2\sin^2\omega}},$$

då skillnaden $\psi - m\pi$ betecknas med ω, och således vår eqvation reducerar sig till

$$\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{1-k^2\sin^2\omega}} = \mathrm{F}(\omega, k) = \mathfrak{A},$$

eller, som är detsamma,

$$(\omega =)\ \psi - m\pi = \mathrm{am}\mathfrak{A},$$

$$\psi = \mathrm{am}\mathfrak{A} + m\pi,$$

är ju dermed funnet, att

(19) $\quad \mathrm{am}(\mathfrak{A} + 2m\mathrm{K})$ är $= \mathrm{am}\mathfrak{A} + m\pi$.

Och som vidare deraf *följer*, på grund tillika af formeln (11), att

$$\mathrm{am}(\mathfrak{A} - 2m\mathrm{K}) \text{ är } = \mathrm{am}\mathfrak{A} - m\pi;\text{*)}$$

så gäller ju verkligen om amplituden för *hvarje argument num.* $>$ K relationen

(20) $\quad \mathrm{am}(\mathfrak{A} + 2\mu\mathrm{K}) = \mathrm{am}\mathfrak{A} + \mu\pi$.

Deraf är nu en lätt insedd följd, att för *hvarje (reelt) argument* α, det må vara num. $>$ eller $=$ eller $<$ K,

(21) $\quad \mathrm{am}(\alpha + 2\mu\mathrm{K})$ är $= \mathrm{am}\alpha + \mu\pi$, **)

och följaktligen

$$(22)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(\alpha + 2\mu\mathrm{K}) = (-1)^{\mu}\sin\mathrm{am}\alpha, \\ \cos\mathrm{am}(\alpha + 2\mu\mathrm{K}) = (-1)^{\mu}\cos\mathrm{am}\alpha, \\ \mathfrak{D}(\alpha + 2\mu\mathrm{K}) = \mathfrak{D}(\alpha). \end{cases}$$

*) Formlerna (19) och (11) gifva ju:

$$\mathrm{am}(-\mathfrak{A} - 2m\mathrm{K}) = \mathrm{am}(-\mathfrak{A}) - m\pi,$$

och således, om här i stället för $-\mathfrak{A}$ sättes $\mathfrak{A}$, sjelfva formeln i fråga.

**) Att denna formel gäller, då α är num. $\leq$ K, det visar formeln (20.)

Af dessa formler (21) och (22) är nu uppenbart, ej allenast, både *att* och *huru* valörerna af så väl amplituden som de elliptiska functionerna skola finnas för hvarje argument som är num. $>$ K, *allenast de äro bekanta för samtlige argumenter som äro num.* $\leqq$ K, utan ock — hvad mera är — att verkligen de tre functionerna

$$(23)\qquad \sin\mathrm{am}\alpha\,,\quad \cos\mathrm{am}\alpha\,,\quad \mathfrak{D}(\alpha)$$

hafva egenskapen att, likasom de cirkulära $\sin\alpha$ och $\cos\alpha$, vara *periodiska functioner af* α. Formlerna (22) lägga ju för öppen dag, att *sin am*-functionen, äfvensom *cos am*-functionen, har *samma* valör för en argumentsvalör α hvilkensomhelst och för denna α ökad eller minskad med 4K eller någon dess multipel, samt $\mathfrak{D}$-functionen *samma* valör för α och för $\alpha \pm 2\mathrm{K}$, ja — med ett ord — för $\alpha + \nu(2\mathrm{K})$, eller, med andra ord, att samtlige argumentsvalörer, som sinsemellan differera med 4K eller multipel deraf, hafva *samma* sin am-valör och samma cos am-valör, och samtlige argumentvalörer, som differera sinsemellan med 2K eller multipel deraf, hafva *samma* $\mathfrak{D}$-valör.

Märkom ock, i sammanhang med hvad nu sist är sagdt, att man på grund deraf kan med fullt skäl säga, att qvantiteten 4K är *tillräcklig* att angifva storleken af såväl *sin am*-functionens som *cos am*-functionens *period*, och likaså qvant. 2K $\mathfrak{D}$-functionens *period.*

Men också icke mer än *nätt och jemnt* tillräckliga.

Alldenstund nemligen 2π *exakt* angifver storleken af — kort sagdt — arguments-*intervallet* för sinus-functionens periodicitet, så är 2π *precist* det intervall, som *am*α måste genomgå, för att functionens *sin am*α valörer skola återkomma periodiskt, och således 4K *precist* det intervall, som *argumentet* α måste genomgå för samma ändamål, eftersom eqvationen

$$(24)\qquad \mathrm{am}(\alpha + \xi) = \mathrm{am}\xi + 2\pi$$

satisficras, enligt (21), af

$$\xi = 4\mathrm{K}\,,$$

men också icke af någon annan ξ-valör, alldenstund ju "amplituden" är olika för olika argumentsvalörer.

Likaså beträffande *cos am*-functionen.

Och dess giltighet för hvarje α num. $>$ K, således för

$$\alpha = \mathfrak{A} + 2\nu\mathrm{K}, \ (\nu \text{ obruten}),$$

verificeras lätt på grund af samma (20).

Och att 2K icke är *för stor* för att angifva $\mathfrak{D}$-functionens period, *då k icke är* $= 0$ (hvarom nedanf.), är tydligt deraf, att denna function, som för $\alpha = 0$ har valören 1, icke återfår denna valör nästa gång, förr än argumentet genomgått *hela* intervallet 2K, alldenstund eqvationen

$$(25) \qquad \mathfrak{D}(\xi, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\xi} = 1\,,$$

eller — som är detsamma, då k icke är $= 0$ — eqvationen

$$\sin \mathrm{am}\xi = 0\,,$$

eller denna

$$\mathrm{am}\xi = \mu\pi\,,\ \text{d. ä.} = \mathrm{am}(2\mu\mathrm{K}) \text{ enl. } (21)\,,$$

satisfieras af allenast

$$\xi = \mu(2\mathrm{K})\,;$$

hvarmed ju saken är klar.

För $k = 0$ deremot satisfieras uppenbarligen eqv. (25) af hvilken ξ-valör som helst. Också är ju för denna speciela modyl $\mathfrak{D}$-functionen constant $= 1$ för *alla* argumentsvalörer (se ofvan); hvarföre ock — ehuru det visserligen är en *sanning*, att den 3:e af formlerna (22) gäller äfven för denna modyl — det verkligen, noga taget, är ett *oegentligt* talesätt att säga functionen $\mathfrak{D}(\alpha, 0)$ vara *periodisk*, såsom de begge andra $\sin \mathrm{am}(\alpha, 0)$ och $\cos \mathrm{am}(\alpha, 0)$, hvilkas gemensamma period — som man vet — är 2π (valören af 4K för $k = 0$).

Alltså: *De tre functionerna* (23) *äro periodiska functioner af argumentet; de begge förstas gemensamma period är 4K, den tredjes deremot 2K, modylen k må nu vara positiv < 1, hvilken som helst, eller äfven* **noll**, — *med undantag allenast för $\mathfrak{D}(\alpha, 0)$, som är constant $= 1$.*

Formlerna (22) angifva relationerna mellan de elliptiska functionernas valörer för ett (reelt) argument α hvilketsomhelst och för detsamma ökadt eller minskadt med *jemn* multipel af K, och deribland specielt dessa:

$$(26) \qquad \begin{cases} \sin \mathrm{am}(\alpha \pm 4\mathrm{K}) = \sin \mathrm{am}\alpha\,, \\ \cos \mathrm{am}(\alpha \pm 4\mathrm{K}) = \cos \mathrm{am}\alpha\,, \\ \quad \mathfrak{D}(\alpha \pm 4\mathrm{K}) = \mathfrak{D}(\alpha)\,, \end{cases}$$

och

$$(27)\qquad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(\alpha \pm 2\mathrm{K}) = -\sin\mathrm{am}\alpha\,, \\ \cos\mathrm{am}(\alpha \pm 2\mathrm{K}) = -\cos\mathrm{am}\alpha\,, \\ \mathfrak{D}(\alpha \pm 2\mathrm{K}) = \mathfrak{D}(\alpha)\,, \end{cases}$$

af hvilka dessa sista, på grund af forml. (12), äfven gifva de anmärkningsvärda

*)
$$(28)\qquad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(2\mathrm{K} - \alpha) = \sin\mathrm{am}\alpha\,, \\ \cos\mathrm{am}(2\mathrm{K} - \alpha) = -\cos\mathrm{am}\alpha\,, \\ \mathfrak{D}(2\mathrm{K} - \alpha) = \mathfrak{D}(\alpha)\,. \end{cases}$$

Men — relationerna mellan de elliptiska functionernas valörer för α och för (α $\pm$ *udda* multipel af K)? Derom lemna väl — som man ser — dessa (22) icke någon upplysning *omedelbart*; men man behöfver ju blott observera, att

$$(29)\qquad \alpha + (2m \pm 1)\mathrm{K} \text{ är } = (\alpha \pm \mathrm{K}) + 2m\mathrm{K}\,,$$

för att inse, att svaret på denna fråga gifves — äfven det — af våra formler (22), allenast man först känner relationerna mellan de elliptiska functionernas valörer för α och för hvardera af dessa

$$(30)\qquad \alpha \pm \mathrm{K}\,.$$

Derom fås kännedom i nästa paragraf, och nemligen — såsom der skall visa sig — detta till följd deraf att vi der skola finna de vigtiga relationerna mellan de elliptiska functionernas valörer för ett argument α hvilketsomhelst och dess "*complement*"

$$\mathrm{K} - \alpha\,.$$

Anmärkom ock på förhand, att vi genom sistnämnda relationers finnande äfven skola förhjelpas ett nytt steg framåt till besvarande af den angelägna frågan i slutet af § 1, nemligen i i sjelfva verket — som man lätt kan förstå — derhän, att vi skola få frågan *reducerad till allenast den om positiva argumenter som äro* $\leqq \frac{\mathrm{K}}{2}$.

2. Innan vi afsluta denna §, skola nu ock några ord tilläg-

*) Af hvilka de båda första återgifva de bekanta

$$\begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha\,, \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha\,; \end{cases}$$

den tredje reducerar sig till

$$\mathfrak{D}(\pi - \alpha) = \mathfrak{D}(\alpha) = 1\,.$$

gas, till upplysning om de vigtiga relationerna mellan de elliptiska functionerna och deras 1:sta *derivator* (differential-coëfficienter).

Alldenstund amα är den φ-valör, som satisfierar eqv. (3), är tydligen, *för hvarje α-valör*,

$$(31)\quad \left(\frac{d\varphi}{d\alpha} =\right) \frac{d(\mathrm{am}\alpha)}{d\alpha} = \sqrt{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\alpha} = \mathfrak{D}(\alpha),$$

och, till följd deraf,

$$\begin{cases} d(\sin\mathrm{am}\alpha) = d\sin\varphi = \cos\varphi d\varphi = \cos\mathrm{am}\alpha.\,\mathfrak{D}(\alpha)d\alpha, \\ d(\cos\mathrm{am}\alpha) = d\cos\varphi = -\sin\varphi d\varphi = -\sin\mathrm{am}\alpha.\,\mathfrak{D}(\alpha)d\alpha, \\ d\mathfrak{D}(\alpha) = d\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = -k^2\sin\mathrm{am}\alpha\,\cos\mathrm{am}\alpha d\alpha, \end{cases}$$

eller

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{d\sin\mathrm{am}\alpha}{d\alpha} = \cos\mathrm{am}\alpha\mathfrak{D}(\alpha), \\ \dfrac{d\cos\mathrm{am}\alpha}{d\alpha} = -\sin\mathrm{am}\alpha\mathfrak{D}(\alpha), \\ \dfrac{d\mathfrak{D}(\alpha)}{d\alpha} = -k^2\sin\mathrm{am}\alpha\,\cos\mathrm{am}\alpha, \end{cases}$$

relationer, i sanning förtjenta af den aldrastörsta uppmärksamhet. *)

Dessa gälla, som sagdt var, för *alla* (reela) α-valörer. Men af dem — i betraktande tillika deraf, att städse

$$(33)\quad \mathfrak{D}(\alpha) \text{ är } = \sqrt{1-k^2(\sin\mathrm{am}\alpha)^2} = \sqrt{k'^2+k^2(\cos\mathrm{am}\alpha)^2},$$

och att tydligen relationerna

$$(34)\quad \begin{cases} \cos\mathrm{am}\alpha = \sqrt{1-(\sin\mathrm{am}\alpha)^2}, \\ k\cos\mathrm{am}\alpha = \sqrt{\mathfrak{D}^2(\alpha)-k'^2}, \end{cases}$$

$$(35)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\alpha = \pm\sqrt{1-(\cos\mathrm{am}\alpha)^2}, \text{ allteftersom } \alpha \text{ är pos. eller neg.} \\ k\sin\mathrm{am}\alpha = \pm\sqrt{1-\mathfrak{D}^2(\alpha)}, \text{ (likaså)}, \end{cases}$$

gälla åtminstone för hvarje α-valör num. $\leq$ K, — följer som *Corollarium*, att, *åtminstone så länge man icke öfverskrider arguments-intervallet* $\pm$ K,

*) Man ser, hurusom för $k = 0$ de två första reducera sig till gamla bekanta.

$$(36)\quad \begin{cases} \dfrac{d\sin\mathrm{am}\alpha}{d\alpha} \text{ är } = \sqrt{[1-(\sin\mathrm{am}\alpha)^2][1-k^2(\sin\mathrm{am}\alpha)^2]}, \\ \dfrac{d\cos\mathrm{am}\alpha}{d\alpha} = \pm\sqrt{[1-(\cos\mathrm{am}\alpha)^2][k'^2+k^2(\cos\mathrm{am}\alpha)^2]} \\ \qquad\qquad \text{allteftersom (som ofvan)}, \\ \dfrac{d\mathfrak{D}(\alpha)}{d\alpha} = \pm\sqrt{[1-\mathfrak{D}^2(\alpha)][\mathfrak{D}^2(\alpha)-k'^2]}, \text{ (likaså).} \end{cases}$$

Obs. Att tillerkänna dessa sista formler en lika stor allmängiltighet som de ofvanstående (32) — de der, som vi sett, gälla för *alla* (reela) α-valörer —, vore uppenbarligen ett svårt misstag *) (som man dock thyvärr icke sällan finner begånget). Man behöfver ju blott observera, att de sednare membra af dessa (36) *icke* undergå någon förändring, om man ökar eller minskar α med 2K eller någon multipel deraf, men att detsamma *icke* kan sägas om de förra membra åtminstone af de begge första ibland dem.

§. 3. — Om functionen $U_{x,k}$ och relationerna mellan complementar-argumenters elliptiska functioner.

1. Af den första bland de märkliga formlerna (36) är uppenbart, att eqvationen

$$(37)\qquad \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = d\alpha$$

satisfieras, åtminstone för hvarje α num. $<$ K, af

$$(38)\qquad \xi = \sin\mathrm{am}(\alpha, k).$$

Detta förhållande leder ovilkorligen uppmärksamheten på denna nya function:

$$(39)\qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\ ^{**)},\ [k \text{ som ofvan vid } (1)],$$

---

*) Förutsatt nemligen att man — som städse tillbörligt är — med tecknet

$$\sqrt{\alpha}$$

förstår *principal*-roten (den *positiva*, då α är positiv).

**) Se der den integral eller — rättare sagdt — en ibland de integraler, som gifvit första *upphofvet* åt hela den del af Analysen, som, till sitt innehåll hvaraf den bekanta

$$(40) \qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

uppenbarligen är allenast en ringa *specialitet*.

Likasom denna specialitet, så är ock den *allmänna* (39) continuerligt variabel med x (reel), *så länge x icke öfverskrider begränsningen* ± 1 *). Med anledning tillika deraf, att dess valör (för hvarje särskild x-valör) är beroende af constanten k, skola vi kort beteckna denna allmänna function, *under förutsättning likväl att x icke är num.* > 1, med

$$U_{x,k},$$

antagande således som *definition*:

$$(41) \qquad U_{x,k} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (x \text{ num.} \leqq 1).$$

Specielt är således

$$(41') \qquad U_{x,0} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \; (x \text{ num.} \leqq 1).$$

Nu är tydligen

$$(42) \qquad U_{0,k} = 0, \quad U_{-x,k} = -U_{x,k},$$

samt, för hvarje x-valör num. $\leqq 1$,

$$(43) \quad U_{x,k} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi, k), \text{ neml. } \varphi = \arcsin x,$$

eller med ett ord

$$(44) \qquad U_{x,k} = F(\arcsin x, k),$$

städse af samma tecken som x och — [alldenstund derivatan

$$\frac{d(U_{x,k})}{dx}, \text{ neml. } \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

städse är *positiv*] — till sin numeriska valör växande, med num. valören af x, till gränserna

outtömlig, benämnes *läran om de elliptiska functionerna.* — Här skrifves ingen *historia*; men namnen *Euler* och *Legendre*, *Abel* och *Jacobi* må dock vid detta tillfälle åtminstone vara *nämnda*, de stora *upphofsmännen* till åminnelse, och begynnaren till upplysning och uppmuntran.

*) Se noten vid slutet.

$$(45)\qquad \begin{cases} U_{1,k} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi}} = K, \\ U_{-1,k} = -U_{1,k} = -K, \end{cases}$$

samt följaktligen *både* capabel af *alla* valörer mellan $\pm$ K *och* olika till sin valör för olika valörer af x.

Häraf följer, att, *ehvad reel qvant.* $\mathfrak{A}$ *num.* $\leqq$ K *än må uppgifvas, städse en reel* ξ*-valör, men också* **blott en** *sådan, satisfierar eqvationen*

$$(46)\qquad U_{\xi,k} = \mathfrak{A}\,(\text{num.} \leqq K),$$

och neml. $\xi = 0$ för $\mathfrak{A} = 0$,

samt *att denna* ξ*-valör icke är någon annan än sjelfva sinam*$(\mathfrak{A}, k)$, alldenstund — efter hvad formeln (44) tydligt visar —

$$(47)\qquad \operatorname{arcsin}\xi \text{ är } = \operatorname{am}(U_{\xi,k}), \text{ enligt defin. för "amplitud" (§ 1)},$$

$$= \operatorname{am}(\mathfrak{A}, k), \text{ då } \xi \text{ är den reela roten till eqv.(46)},$$

och således

$$(48)\qquad \xi = \operatorname{sin am}(\mathfrak{A}, k).$$

Det är just *utur denna slutsats* som de märkliga relationerna mellan *complementar-argumenters* elliptiska functioner skola deduceras i efterföljande artikel.

2. Med *complementar-argumenter* förstår man i de ellipt. functionernas theori tvenne argumenter hvilkasomhelst, hvilkas summa är $=$ K, således α och K $-$ α.*)

Till en början låt A föreställa en *positiv* argumentsvalör hvilkensomhelst $<$ K. Wi skola på grund af U-functionens ofvannämnda egenskaper lätt nog få *sinam*-valören för *complementet*

$$(49)\qquad K - A, \ (A \text{ positiv} < K),$$

uttryckt *medelst ellipt. functioner af sjelfva* A.

Frågan är ju (enligt slutet af art. 1) helt enkelt att få den reela ξ-valör, som satisfierar eqvationen

$$(50)\qquad U_{\xi,k} = (K - A =)\ K - U_{x,k},$$

då x representerar *sinam*-valören för A, och således är positiv < 1,

*) T. ex. för $k = 0$ de bekanta

$$\alpha \text{ och } \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

uttryckt i function af x. [Att en sådan ξ-valör, och *blott en*, för hvarje särskild (ifrågavarande) x-valör finnes, äfvensom att den ξ-valören är sjelf positiv < 1, är bekant af art. 1].

För $k = 0$ reducerar sig denna eqvation till

$$(50') \qquad U_{\xi,0} = \frac{\pi}{2} - U_{x,0}$$

d. ä.

$$\arcsin\xi = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arcsin(\sqrt{1-x^2}),$$

och således bestämdt

$$(50'') \qquad \xi = \sqrt{1-x^2}.$$

Men i allmänhet (k må nu vara $= 0$ eller positiv < 1 hvilken som helst) är, om x supponeras variera continuerligt mellan 0 och en positiv valör < 1 hvilkensomhelst, äfven ξ enligt relationen (50) continuerligt variabel med x, och nemligen sjelf positiv < 1 för hvarje sådan x-valör, *vidare* $\xi = 1$ *för* $x = 0$ samt, för hvarje x-valör (som nämndes),

$$\frac{d(U_{\xi,k})}{dx} = -\frac{d(U_{x,k})}{dx},$$

d. ä.

$$(51) \qquad \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Som nu, för $k = 0$, ξ är $= \sqrt{1-x^2}$; är uppenbarligen all anledning *förmoda*, att i allmänhet

ξ måtte vara af formen $f(x,k).\sqrt{1-x^2}$

eller (heldre) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{f}(x,k)}$.

Om verkligen så är, *måste* denna $\mathrm{f}(x,k)$ vara $= 1$ både för $k = 0$ och för $x = 0$ samt, för hvarje annan x-valör (positiv < 1), sjelf vara *positiv* och, enligt (51), *sådan* att

$$\frac{\mathrm{f}.xdx + (1-x^2)d\mathrm{f}}{\sqrt{[\mathrm{f}^2 - (1-x^2)][\mathrm{f}^2 - k^2(1-x^2)]}} \text{ är } = \frac{dx}{\sqrt{1-k^2x^2}},$$

eller — [om man sätter

$$y = \sqrt{1-k^2x^2},$$

och således (emedan x är positiv)

$$kx = \sqrt{1-y^2}, \quad k^2xdx = -ydy, \text{ o. s. v.}] —$$

sådan att

$$\frac{\mathrm{f}.ydy + (k'^2 - y^2)d\mathrm{f}}{\sqrt{(k'^2 + \mathrm{f}^2 - y^2)(k'^2 + k^2\mathrm{f}^2 - y^2)}} \text{ är } = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Och som denna eqvation — det springer ju i ögonen — satisfieras af

$$\mathrm{f} = y, \text{ d. ä. } = \sqrt{1 - k^2x^2},$$

och denna f-valör, mycket rigtigt, är $= 1$ både för $k = 0$ och för $x = 0$; så är ju dermed funnet, att den sökta ξ-valören är

$$(52) \qquad \xi = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}},$$

eller att, för hvarje positivt $\mathrm{A} < \mathrm{K}$,

$$(53) \qquad \sin\mathrm{am}(\mathrm{K} - \mathrm{A}) \text{ är } = \frac{\cos\mathrm{am}\mathrm{A}}{\mathfrak{D}(\mathrm{A})},$$

och således det åsyftade ändamålet att få *sin am*-valören för *complementet* (49) uttryckt medelst *ellipt. functioner af sjelfva* A vunnet.

Tilläggom, att af (53) följa ej allenast dessa:

$$(54) \qquad \begin{cases} \cos\mathrm{am}(\mathrm{K} - \mathrm{A}) = \dfrac{k'\sin\mathrm{am}\mathrm{A}}{\mathfrak{D}(\mathrm{A})}, \\ \mathfrak{D}(\mathrm{K} - \mathrm{A}) = \dfrac{k'}{\mathfrak{D}(\mathrm{A})}, \end{cases}$$

utan ock speciellt för *evalueringen* af de elliptiska functionerna af argumentet $\frac{\mathrm{K}}{2}$:

$$(55) \qquad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(\frac{\mathrm{K}}{2}) \overset{*)}{=} \sqrt{\dfrac{1}{1+k'}}, \quad \cos\mathrm{am}(\frac{\mathrm{K}}{2}) = \sqrt{\dfrac{k'}{1+k'}}, \\ \mathfrak{D}(\frac{\mathrm{K}}{2}) = \sqrt{k'}, \end{cases}$$

---

*) Giltigheten af denna formel för $k = 0$ behöfver uppenbarligen icke här styrkas. Men — låt k vara *positiv* (< 1 förstås). Formeln (53) gifver för $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{K}}{2}$, genom qvadrering,

$$\sin^2\mathrm{am}(\tfrac{\mathrm{K}}{2}) = \frac{1 - \sin^2\mathrm{am}(\frac{\mathrm{K}}{2})}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}(\frac{\mathrm{K}}{2})},$$

eller, som är detsamma,

$$k^2\sin^2\mathrm{am}(\tfrac{\mathrm{K}}{2}) = 1 \pm k', \quad \sin^2\mathrm{am}(\tfrac{\mathrm{K}}{2}) = \frac{1 \pm k'}{1 - k'^2} = \frac{1}{1 \mp k'},$$

och således, emedan $\sin\mathrm{am}(\frac{\mathrm{K}}{2})$ skall vara både positiv och < 1,

$$\sin\mathrm{am}(\tfrac{\mathrm{K}}{2}) \text{ bestämdt} = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}.$$

och således äfven relationen

$$(56)\qquad \sin\mathrm{am}(\tfrac{K}{2}).\mathfrak{D}(\tfrac{K}{2}) = \cos\mathrm{am}(\tfrac{K}{2})\,.$$

Men märkom nu ock, 1:o) att förestående formler (53) och (54) i sjelfva verket gälla äfven för *negativa* $\mathfrak{A}(= -A)$, såsom man lätt finner genom tillämpning af forml. (12) och (27); *)

2:o) att — såsom man med stöd af detta 1:o) och med tillämpning af forml. (18) och (22) lätt finner **) — formlerna

$$(57)\qquad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(K-\alpha) = \dfrac{\cos\mathrm{am}\alpha}{\mathfrak{D}(\alpha)} = \sin\mathrm{am}(K+\alpha)\,, \\ \cos\mathrm{am}(K-\alpha) = \dfrac{k'\sin\mathrm{am}\alpha}{\mathfrak{D}(\alpha)} = -\cos\mathrm{am}(K+\alpha)\,, \\ \mathfrak{D}(K-\alpha) = \dfrac{k'}{\mathfrak{D}(\alpha)} = \mathfrak{D}(K+\alpha) \end{cases}$$

gälla i full allmänlighet för hvarje (reelt) argument α;

3:o) att, till följd häraf, svaret på den näst efter formlerna (28) i förra § antydda frågan är att hemta af dessa nya formler:

$$(58)\qquad \begin{cases} \sin\mathrm{am}[\alpha+(2\mu+1)K] = \dfrac{\cos\mathrm{am}\alpha}{\mathfrak{D}(\alpha)}(-1)^{\mu}\,, \\ \cos\mathrm{am}[\alpha+(2\mu+1)K] = -\dfrac{k'\sin\mathrm{am}\alpha}{\mathfrak{D}(\alpha)}(-1)^{\mu}\,, \\ \mathfrak{D}[\alpha+(2\mu+1)K] = -\dfrac{k'}{\mathfrak{D}(\alpha)}\,; - \end{cases}$$

---

*) Så är, på grund af dessa (12) och (27),

$$\sin\mathrm{am}(K-\mathfrak{A}) = \sin\mathrm{am}(K+A) = -\sin\mathrm{am}(-K+A) = \sin\mathrm{am}(K-A)$$
$$= \frac{\cos\mathrm{am}A}{\mathfrak{D}(A)} = \frac{\cos\mathrm{am}\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}(\mathfrak{A})}\,;$$

o. s. v. för de begge andra.

**) Att de gälla för hvarje α num. $\leqq K$, är klart af 1:o) och forml. (27). Och som hvarje α num. $> K$ kan [se (18)] betecknas med

$$(\alpha =)\ \mathfrak{A} + 2\mu K,\ (\mathfrak{A}\ \text{num.} \leqq K),$$

är

$$\sin\mathrm{am}(K-\alpha) = \sin\mathrm{am}[(2\mu+1)K-\mathfrak{A}] = (-1)^{\mu}\sin\mathrm{am}(K-\mathfrak{A})$$
$$= (-1)^{\mu}\frac{\cos\mathrm{am}\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}(\mathfrak{A})} = (-1)^{\mu}\frac{\cos\mathrm{am}(\alpha-2\mu K)}{\mathfrak{D}(\alpha-2\mu K)} = \frac{\cos\mathrm{am}\alpha}{\mathfrak{D}(\alpha)}\,;$$

o. s. v. för de öfriga.

samt 4:o) att, till följd af de nu funna relationerna mellan complementar-argumenters ellipt. functioner, den angelägna frågan i slutet af § 1 nu verkligen — såsom näst efter raden (30) förutsades — är reducerad till samma fråga om *allenast positiva argumenter som äro num.* $< \frac{K}{2}$.*) — Att åter rikliga materialier till *den* frågans besvarande skola vara att hemta ur innehållet af nästa §, det gifver redan dess öfverskrift tydligt nog tillkänna.

§. 4. — **Additions-theoremerna.**

1. *Att finna relationerna mellan å ena sidan de ellipt. functionerna för 2:ne argumenter (reela) α och β och, å den andra, enahanda functioner för deras summa* $\alpha + \beta$, — se der det problem som nu skall lösas.

För redighets skull förutsätta vi i nedanstående raisonnement, att modylen k är *positiv* (icke $= 0$); vi skola sedermera verificera, att de vunna resultaterna verkligen passa för $k = 0$.

Om φ är en continuerligt variabel qvantitet (reel), så är ock

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \text{ kortl. } \alpha,$$

en sådan (se §. 1), neml. continuerligt variabel med φ, den der alltså, under det att φ successivt genomgår alla (reela) valörer, förr eller sednare uppnår en viss speciel valör α_1, låt det vara för $\varphi = \varphi_1$, således låt

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \text{ vara } = \alpha_1 .$$

Då är

$$\alpha - \alpha_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

och således, om $\mathrm{am}(\alpha - \alpha_1)$ betecknas med ψ, eller (med andra

*) För sjelfva $\frac{K}{2}$ är den ju redan besvarad genom forml. (55).

ord) om

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \text{ är } = \alpha - \alpha_1 ,$$

är

$$(59) \qquad \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} .$$

Ur denna relation mellan ψ, φ och φ_1,

eller $\mathrm{am}(\alpha-\alpha_1)$, $\mathrm{am}\alpha$ och $\mathrm{am}\alpha_1$,

skola vi söka härleda relationen mellan dessa amplituders *sinus*, *cosinus*, &c., d. ä. (med andra ord sagdt) mellan sjelfva *argumenternas* α, α_1 och $\alpha-\alpha_1$ *elliptiska* functioner.

Enligt (59) är

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = d\alpha ,$$

och således

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}, \quad \frac{d\varphi}{d\alpha} = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} ,$$

$$\frac{d^2\psi}{d\alpha^2} = -\, k^2\sin\psi\cos\psi, \quad \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = -\, k^2\sin\varphi\cos\varphi ,$$

samt följaktligen, om man för korthets skull sätter

$$\begin{cases} \sigma = \psi + \varphi , \\ \delta = \psi - \varphi , \end{cases}$$

$$(60) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\sigma}{d\alpha} = \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} + \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} , \\ \dfrac{d\delta}{d\alpha} = \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} - \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} , \end{cases}$$

vidare

$$(61) \begin{cases} \left(\dfrac{d^2\sigma}{d\alpha^2} =\right) \dfrac{d\sigma'}{d\alpha} = -\, k^2(\sin\psi\cos\psi + \sin\varphi\cos\varphi) = -\, k^2\sin\sigma\cos\delta , \\ \left(\dfrac{d^2\delta}{d\alpha^2} =\right) \dfrac{d\delta'}{d\alpha} = -\, k^2\cos\sigma\sin\delta , \\ \left(\dfrac{d\sigma}{d\alpha}\cdot\dfrac{d\delta}{d\alpha} =\right) \sigma'\delta' = -\, k^2(\sin^2\psi - \sin^2\varphi) = -\, k^2\sin\sigma\sin\delta , \end{cases}$$

och således, dividendo,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\left(\frac{d\sigma'}{d\alpha}\right)}{\sigma'.\left(\frac{d\delta}{d\alpha}\right)} = \frac{\cos\delta}{\sin\delta}, \text{ eller } \frac{d\sigma'}{\sigma'} = \frac{\cos\delta.d\delta}{\sin\delta} = \frac{d(\sin\delta)}{\sin\delta},\\ &\frac{\left(\frac{d\delta'}{d\alpha}\right)}{\delta'.\left(\frac{d\sigma}{d\alpha}\right)} = \frac{\cos\sigma}{\sin\sigma}, \text{ eller } \frac{d\delta'}{\delta'} = \frac{\cos\sigma.d\sigma}{\sin\sigma} = \frac{d(\sin\sigma)}{\sin\sigma}, \end{aligned}\right.$$

eller, med andra ord,

$$(62)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\sigma' =)\ \frac{d\sigma}{d\alpha} = C.\sin\delta,\\ &(\delta' =)\ \frac{d\delta}{d\alpha} = C_1.\sin\sigma \end{aligned}\right.$$

för hvarje α-valör, och således *specielt* för $\alpha = \alpha_1$ [alldenstund φ *då* är $= \varphi_1$, $\psi = 0$,

$$\sigma = \varphi_1,\ \delta = -\varphi_1,$$

och enl. (60) $\frac{d\sigma}{d\alpha} = 1 + \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi_1}$,

$$\frac{d\delta}{d\alpha} = 1 - \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi_1}]$$

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned} -C.\sin\varphi_1 &= 1 + \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi_1},\\ C_1.\sin\varphi_1 &= 1 - \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi_1}, \end{aligned}\right.$$

hvarmed alltså de "*arbiträra const.*" C och C_1 äro kända.

Och som af dessa (62) följer, att

$$\frac{d\sigma}{d\alpha}\cdot\frac{d\delta}{d\alpha} \text{ är } = C\sin\delta.\frac{d\delta}{d\alpha} \text{ och äfven } = C_1\sin\sigma.\frac{d\sigma}{d\alpha},$$

är således

$$C.\sin\delta d\delta = C_1\sin\sigma d\sigma,$$

eller, med andra ord,

$$(64)\qquad C.\cos\delta = C_1.\cos\sigma + C_2$$

för hvarje α-valör, och således *specielt* för $\alpha = \alpha_1$

$$(C - C_1)\cos\varphi_1 = C_2,$$

d. ä. enligt (63)

$$C_2\sin\varphi_1 = -2\cos\varphi_1,$$

hvarmed alltså C_2 är bekant,

och formeln (64) reducerar sig till

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\delta + \cos\sigma}{2} + \frac{\cos\delta - \cos\sigma}{2}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi_1},$$

eller

(65) $\cos\varphi_1 = \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}$,

eller, med andra ord,

$\cos\mathrm{am}\alpha_1 = \cos\mathrm{am}(\alpha-\alpha_1)\cos\mathrm{am}\alpha + \sin\mathrm{am}(\alpha-\alpha_1)\sin\mathrm{am}\alpha\,\mathfrak{D}(\alpha_1)$.

Sätter jag nu här β i stället för $\alpha_1 - \alpha$ (och således $\alpha+\beta$ i stället för α_1), så erhålles *den märkliga relationen*

(66) $\cos\mathrm{am}(\alpha+\beta) = \cos\mathrm{am}\alpha\cos\mathrm{am}\beta - \sin\mathrm{am}\alpha\sin\mathrm{am}\beta.\mathfrak{D}(\alpha+\beta)$,

gällande för alla (reela) argumenter α och β.

Ur denna *grundformel* kunna *samtlige* relationer mellan de elliptiska functionernas valörer för de trenne

(67) α, β och $\alpha+\beta$ *)

deduceras, och dermed har man då funnit de analytiska uttrycken för, hvad man i de elliptiska functionernas theori kallar, *additionstheoremerna* (så vidt de angå *trenne* argumenter).

2. Vi skola nu verkställa nämnda deduktion, men anmärka dessförinnan, att vi härefter i stället för de vidlyftiga uttrycken

$\sin\mathrm{am}(\alpha, k)$ och $\cos\mathrm{am}(\alpha, k)$

komma att begagna dessa kortare

$\mathfrak{S}(\alpha, k)$ och $\mathfrak{C}(\alpha, k)$

eller, då modylen icke behöfver utsättas, helt enkelt

$\mathfrak{S}(\alpha)$ och $\mathfrak{C}(\alpha)$,

så mycket heldre som i sjelfva verket förhållandet är det, att de förra beteckningarne icke mera *kunna* begagnas — utan att man i hög grad äfventyrar förvillelser och misstag — i den *allmänna theorien för de elliptiska functionerna*, d. ä. då fråga är om *elliptiska functioner af argumenter hvilkasomhelst* (imaginära eller complexa så väl som reela); **) hvaremot man der — i den allmänna theorien — verkligen kan med stor fördel begagna de trenne uttrycken

(68) $\mathfrak{S}(\alpha, k)$, $\mathfrak{C}(\alpha, k)$, $\mathfrak{D}(\alpha, k)$

---

*) Äro dessa relationer väl kända för *alla* α- och β-valörer, så äro ju ock dermed relationerna kända för

α, β och $\alpha-\beta$.

**) Man kan redan af denna antydning ana, att *den allmänna definitionen* för begreppet *"elliptiska functioner"* är en annan och nemligen *mycket vidsträcktare* än den, som vi i denna uppsats angifvit för begreppet *"elliptiska functioner af reelt argument"*, dock — förstås — *sådan*, att den *för reelt argument* reducerar sig till precist den som vi här angifvit.

för att kort beteckna *de allmänna elliptiska functionerna*, argumentet α må nu ock vara hvilket som helst.

Man inser lätt, att genom dessa nya beteckningars antagande samtlige formler för de tre functionernas

$$(69) \qquad \mathfrak{S}(\alpha),\ \mathfrak{C}(\alpha),\ \mathfrak{D}(\alpha)$$

relationer inbördes erhålla en mycket nättare form, än om man skulle bibehålla den förra beteckningen ($\sin am\alpha$ och $\cos am\alpha$). Att emedlertid nu omskrifva de i föregående artiklar upptagna formlerna uti denna deras nya form, är uppenbarligen onödigt; exempelvis må dock antecknas:

$$(70) \qquad \mathfrak{D}(\alpha) = \sqrt{1 - k^2\mathfrak{S}^2(\alpha)} = \sqrt{k'^2 + k^2\mathfrak{C}^2(\alpha)},$$

och dess conseqvens

$$(71) \qquad \mathfrak{D}^2(\alpha) = 1 - k^2\mathfrak{S}^2(\alpha) = k'^2 + k^2\mathfrak{C}^2(\alpha),$$

äfvensom

$$\mathfrak{C}^2(\alpha) = 1 - \mathfrak{S}^2(\alpha).$$

Nu till saken.

I. Om man i grundformeln (66), nemligen (efter den nya beteckningen)

$$(72) \qquad \mathfrak{C}(\alpha + \beta) = \mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta) - \mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta).\mathfrak{D}(\alpha + \beta),$$

i stället för $\alpha + \beta$ sätter α, och således i stället för α sätter $\alpha - \beta$, och derefter byter $-\beta$ till β; så erhålles denna lika allmänna:

$$(73) \qquad \mathfrak{C}(\alpha) = \mathfrak{C}(\beta)\mathfrak{C}(\alpha + \beta) + \mathfrak{S}(\beta)\mathfrak{S}(\alpha + \beta).\mathfrak{D}(\alpha).$$

II. Omedelbart ur grundformeln (72) erhålles, om man byter
α till $\alpha + \mathrm{K}$
och derefter iakttager formlerna (57), denna nya relation:

$$(74) \qquad \mathfrak{S}(\alpha + \beta)\mathfrak{D}(\alpha) = \mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta) + \mathfrak{C}(\beta)\mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{D}(\alpha + \beta);$$

och deraf vidare, om man byter $\alpha + \beta$ till β (således β till $\beta - \alpha$) och derefter α till $-\alpha$;

$$(75) \qquad \mathfrak{S}(\alpha + \beta)\mathfrak{C}(\alpha) = \mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta) + \mathfrak{D}(\beta)\mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{C}(\alpha + \beta),$$

samt ur den ena eller andra af dessa, om man byter $\alpha + \beta$ till α (således α till $\alpha - \beta$) och derefter β till $-\beta$:

$$(76) \qquad \mathfrak{D}(\alpha + \beta)\mathfrak{S}(\alpha) + \mathfrak{C}(\alpha + \beta)\mathfrak{S}(\beta) = \mathfrak{C}(\beta)\mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{S}(\alpha + \beta).$$

III. Lika omedelbart erhålles ur grundformeln, om man på en gång byter

$$\begin{cases} \alpha \text{ till } \alpha + \mathrm{K} \\ \text{och } \beta \text{ till } \beta - \mathrm{K}, \end{cases}$$

samt iakttager formlerna (57):

$$(77)\quad \mathfrak{D}(\alpha+\beta)\mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta) - \mathfrak{C}(\alpha+\beta)\mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{D}(\beta) = k'^2\mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta);$$

och deraf vidare, genom samma ombyte som nyss vid öfvergången från den 1:sta till den 2:dra af formlerna i II:

$$(78)\quad k'^2\mathfrak{S}(\alpha+\beta)\mathfrak{S}(\alpha) = \mathfrak{D}(\alpha+\beta)\mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta) - \mathfrak{C}(\alpha+\beta)\mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{D}(\beta).$$

IV. Om man ur grundformeln (72) eliminerar $\mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta)$ medelst formeln (77), så erhålles:

$$k'^2\mathfrak{C}(\alpha+\beta) = \mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta)[k'^2 - \mathfrak{D}^2(\alpha+\beta)] + \mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{D}(\beta)\mathfrak{D}(\alpha+\beta).\mathfrak{C}(\alpha+\beta),$$

och således, till följd af relationen (71) mellan $\mathfrak{C}$- och $\mathfrak{D}$-functionerna, denna mycket märkliga formel:

$$(79)\quad \mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{D}(\beta)\mathfrak{D}(\alpha+\beta) = k^2\mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta)\mathfrak{C}(\alpha+\beta) + k'^2.$$

V. Omedelbart ur denna sista erhålles nu, om man byter $\left\{\begin{matrix}\alpha \text{ till } \alpha+\mathrm{K}\\ \beta \text{ till } \beta-\mathrm{K}\end{matrix}\right\}$:

$$(80)\quad \mathfrak{D}(\alpha+\beta) = \mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{D}(\beta) - k^2\mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta).\mathfrak{C}(\alpha+\beta),$$

alldeles analog med sjelfva grundformeln (72); och deraf, på samma sätt som (73) erhölls ur (72),

$$(81)\quad \mathfrak{D}(\alpha) = \mathfrak{D}(\beta)\mathfrak{D}(\alpha+\beta) + k^2\mathfrak{S}(\beta)\mathfrak{S}(\alpha+\beta).\mathfrak{C}(\alpha).$$

VI. Och slutligen erhålles med största lätthet de märkvärdiga formlerna

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{C}(\alpha+\beta) &= \frac{\mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta) - \mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta).\mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{D}(\beta)}{1-k^2\mathfrak{S}^2(\alpha)\mathfrak{S}^2(\beta)},\\
\mathfrak{D}(\alpha+\beta) &= \frac{\mathfrak{D}(\alpha)\mathfrak{D}(\beta) - k^2\mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta).\mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta)}{1-k^2\mathfrak{S}^2(\alpha)\mathfrak{S}^2(\beta)},\\
\mathfrak{S}(\alpha+\beta) &= \frac{\mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta)\mathfrak{D}(\beta) + \mathfrak{S}(\beta)\mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{D}(\alpha)}{1-k^2\mathfrak{S}^2(\alpha)\mathfrak{S}^2(\beta)},
\end{aligned}\right.$$

som gifva *enhvar* af

$$(83)\quad \mathfrak{S}(\alpha+\beta),\ \mathfrak{C}(\alpha+\beta),\ \mathfrak{D}(\alpha+\beta)$$

uttryckta medelst $\mathfrak{S}$-, $\mathfrak{C}$- och $\mathfrak{D}$-functioner af sjelfva α och β;

nemligen den 1:sta och 2:dra, om man eliminerar, respective, $\mathfrak{D}(\alpha+\beta)$ och $\mathfrak{C}(\alpha+\beta)$ mellan grundformeln (72) och den dermed analoga (80),

och den 3:dje derefter ur (74) eller (75) eller (76) genom eliminering af, respective, $\mathfrak{D}(\alpha+\beta)$ eller $\mathfrak{C}(\alpha+\beta)$ eller begge två medelst formlerna (82) för dessa $\mathfrak{D}(\alpha+\beta)$ och $\mathfrak{C}(\alpha+\beta)$.

Anm. Giltigheten *äfven för* $k = 0$ *) af alla dessa "additionsformler" (72) till och med (82) är nu ock ytterst lätt verificerad. De reducera sig uppenbarligen dels till identiter, dels till de bekanta

$$(82') \quad \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

Hvilken massa af nya formler för elliptiska functioners inbördes relationer kan erhållas såsom Corollarier ur ofvanstående företrädesvis s. k. *additionsformler* (72) t. o. med (82), är lätt att redan *ex analogia* sluta af den erfarenhet man eger om enahanda egenskap hos de begge speciela formlerna (82′) i fråga om cirkulära functioner. Utrymmet förbjuder att här inlåta oss i dessa detaljer. Men också — *och den upplysningen är väl värd att taga vara på* — är det verkligen nu för tiden för enhvar, som ämnar sig in på den *allmänna* theorien för de elliptiska functionerna (der man — som redan är sagdt — icke är inskränkt, såsom här, till allenast *reela* argumenter), skäl att icke *dessförinnan* uppehålla sig med nämnda detaljer. Han är verkligen *här* kommen till den punkt, hvarifrån man *omedelbart* kan inträda på det antydda vidsträckta och öfvermåttan intressanta fältet.

Till och med den angelägna frågan (se slutet af § 1) om beräkningen af de elliptiska functionernas valörer för reela argumenter — och till hvars besvarande, sedan den i § 3 blifvit reducerad till samma fråga för allenast positiva argumenter $< \frac{K}{2}$, förestående additionsformler med sina Corollarier gifva (som man väl kan förstå) de ymnigaste materialier — till och med hela *den* frågan, säger jag, kan med skäl lemnas åsido tills vidare af den som har till syftemål det nämnda djupare studiet af de ellipt. functionerna. — Ja, äfven sjelfva beräkningen af detta $\frac{K}{2}$ eller af qvantitetens $K\left(= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\right)$ valör för en uppgifven modyl k (annan än 0), och — hvad mera är — hela frågan om functionens eller — som man säger — den *elliptiska integralens*

$$F(\varphi, k), \text{ d. ä. } \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

*) Se början af denna §.

valör (evaluering uti k) för *hvarje* φ-valör, åtminstone positiv och $\leqq \frac{\pi}{2}$,*) kan utan allt äfventyr, men *med fördelen af betydlig tidvinst*, lemnas ur sigte, till dess man, efter vunnen erfarenhet af hvad den förenämnda *allmänna* theorien har att erbjuda, finner sig hafva kommit i besittning af vida mäktigare medel för vinnande af alla dessa ändamål, än dem man har att tillgå på den relativt trånga väg vi här genomvandrat.**)

Dock — ännu vid sjelfva ingången till det nya vida fältet må en "*avis*" af icke ringa vigt gifvas. Den innefattas i efterföljande paragraf.

§. 5. — Om positionen $k = 1$.

1. Likasom eqvationen

$$(84)\qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \text{ eller kortl. } F(\varphi, k) = \alpha,$$

då k är < 1, positiv eller 0, för hvarje särskild (reel) α-valör satisfieras af en, men ock *blott*

*) Vi *veta* ju, dels att

$$F(-\varphi, k) \text{ är } = -F(\varphi, k),$$

dels ock att hvarje båge num. $> \frac{\pi}{2}$ kan representeras med

$$\mu\pi + \text{någon båge } \Phi \text{ num. } \leqq \frac{\pi}{2}, \ (\mu \text{ af helt tals num. valör}),$$

samt att, enligt formeln (20),

$$\int_0^{\Phi+\mu\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \text{ är } = \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + 2\mu K,$$

eller, kortare,

$$F(\Phi+\mu\pi) = F(\Phi) + 2\mu K;$$

d. ä. vi *veta* redan, huru den ifrågavarande integralens valör för hvarje φ-valör num. $> \frac{\pi}{2}$ fås känd, allenast den är bekant för de positiva φ-valörer som äro num. $\leqq \frac{\pi}{2}$.

**) Beträffande åter *dem* — och sannolikt äro de icke få — som, utan att ämna ingå i det ofvannämnda djupare studiet af läran om de elliptiska functionerna, vilja för praktiska ändamål draga nytta af hvad redan läran om dessa functioner af *reelt* argument har att erbjuda, förvissade som de med skäl kunna vara om en rikhaltig skörd äfven på *det* fältet, beträffande dem — säger jag — eller, rättare, beträffande den nytta sådana personer kunna hemta af denna uppsats, har förf. redan i Inledningen (sid. 2) med några ord uttalat *sin* mening.

en reel φ-valör, så är ock verkligen — såsom nu skall visas — fallet med eqvationen

$$(84') \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} \text{ eller } \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}} \text{ eller kortl. } F(\varphi, 1)^{*)} = \alpha,$$

men neml. *denna sednare φ-valör städse num.* $< \frac{\pi}{2}$.

Detta är klart deraf, att functionen

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}} \text{ eller } F(\varphi, 1)$$

verkligen genomgår *alla* reela valörer successivt, då φ continuerligt genomgår intervallet *mellan* $\frac{\pi}{2}$ och $-\frac{\pi}{2}$, men blir oändlig för hvarje φ-valör num. $\overline{\overline{>}}\ \frac{\pi}{2}$.

I sjelfva verket är ju tydligt, att, så länge φ förblifver num. $< \frac{\pi}{2}$, functionen $F(\varphi, 1)$ är continuerligt variabel med φ, och nemligen

$$F(-\varphi, 1) = -F(\varphi, 1),$$
$$F(0, 1) = 0,$$

samt

$$(0 < \varphi < \tfrac{\pi}{2}) \quad F(\varphi, 1) \text{ eller } \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \text{ växer med } \varphi,$$

$$\text{varande städse} = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

neml. $x = \sin\varphi$,

och vidare att

$$F(\tfrac{\pi}{2}, 1) \text{ eller } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}}, \text{ d. ä. } lim \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \text{ vid indefinit}$$

mot 0 convergerande positivt ε,

$$\text{är} = \infty = -F(-\tfrac{\pi}{2}, 1).$$

Och för ådagaläggande deraf, att $F(\varphi, 1)$ äfven för hvarje φ-valör num. $> \frac{\pi}{2}$ är oändlig, gör det uppenbarligen tillfyllest

---

*) Vi tillåta oss neml. den härmed antydda utsträckningen af tecknets $F(\varphi, k)$ begagnande; hvaremot ju uppenbarligen intet hinder möter.

att visa, att för hvarje positiv φ_1-valör $< \frac{\pi}{2}$

$$F(\tfrac{\pi}{2} + \varphi_1),\ \text{d. ä.}\ \lim_{\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon = 0\\ \varepsilon_1 = 0\end{smallmatrix}\right]} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon_1}^{\frac{\pi}{2}+\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}}\right],$$

(neml. ε och ε_1 positiva), är oändlig; hvilket ju icke har någon svårighet.*)

Alltså: För hvarje (reel) α-valör satisfieras eqv. (84') af en, men ock *blott en* reel φ-valör, och densamma städse num. $< \frac{\pi}{2}$ samt gifven af formeln

$\varphi = \arcsin\xi$, neml. ξ den reela roten till eqvationen

$$\int_0^\xi \frac{d\xi}{1-\xi^2} = \frac{1}{2} l\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right) = \alpha,$$

---

*) Som nemligen

$$\int_a^b \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}}\ \text{är} = \int_{x=\sin a}^{x=\sin b} \frac{dx}{1-x^2},\ \text{då } a \text{ och } b \text{ äro positiva och } < \frac{\pi}{2},$$

men $=$ — (detsamma), då a och b ligga mellan $\frac{\pi}{2}$ och π,

och således

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}} = \frac{1}{2}l(\frac{1+x}{1-x})\ \text{för } x = \sin(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) = 1 - \eta\ (\eta \text{ positiv})$$

$$- \frac{1}{2}l(\frac{1+x}{1-x})\ \text{för } x = 0,$$

$$\text{d. ä.} = \frac{1}{2}l(\frac{2-\eta}{\eta}),$$

samt

$$\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon_1}^{\frac{\pi}{2}+\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}} = \frac{1}{2}l\left[\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi_1)}{1+\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi_1)}\right] - \frac{1}{2}l(\frac{\eta_1}{2-\eta_1}),$$

emedan $\sin(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1)$ är $= 1 - \eta_1$ (η_1 positiv);

så är ju verkligen vår $F(\frac{\pi}{2} + \varphi_1)$ till sin valör *oändlig*, alldenstund

$$\frac{1}{2}l(\frac{2-\eta}{\eta}) + \frac{1}{2}l(\frac{2-\eta_1}{\eta_1})$$

med indefinit mot 0 convergerande η- och η_1-valörer växer indefinit. —

således

$$\xi = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}.$$

Den φ-valören skola vi — *analogt med hvad redan blifvit antaget för $k < 1$* — kalla

amplituden för α (mod. 1),

och kortligen beteckna med

$$\mathrm{am}(\alpha, 1),$$

äfvensom benämningen *"de elliptiska functionerna (mod. 1) af argumentet α"* skall användas *i samma mening* som för $k < 1$, ja äfven deras kortare beteckningar med bokstäfverna $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{S}$ och $\mathfrak{C}$ (der så finnes lämpligt); hvarjemte benämningen *"complementar-modyl"*, äfvensom beteckningen k', likaledes skall begagnas *i samma mening* för $k = 1$ som förut för $k < 1$ (skolande således k' sägas vara $= 0$ för $k = 1$), — allt i hufvudsaklig öfverenstämmelse med hvad man i sjelfva verket allmänligen anser sig hafva antagit (eller *tacite* öfverenskommit).

Af dessa antagningar (denna öfverenskommelse) följer omedelbart, att *för hvarje reel α-valör*

$$\mathrm{am}(\alpha, 1) \text{ är } = \arcsin\xi, \quad \xi = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}, \tag{85}$$

och

$$\left\{\begin{aligned} \sin\mathrm{am}(\alpha, 1) &= \xi = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}, \\ \cos\mathrm{am}(\alpha, 1) &= \sqrt{1-\xi^2} = \frac{1}{\left(\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\right)} = \mathfrak{D}(\alpha, 1); \end{aligned}\right. \tag{86}$$

och visar sig deraf, att de *"elliptiska functionerna"* — då man icke inskränker denna benämning till allenast de fall *då modylen är* < 1, utan (som sagdt var) antager den till begagnande i samma mening *äfven för $k = 1$* — i sjelfva verket äro ett *genus* af functioner, hvarunder såsom ringa *specialiteter* subsumeras icke blott (som förr nämndt är) de *cirkulära* (händelsen $k = 0$), utan äfven *exponential-functionerna* (händelsen $k = 1$).

Af dessa formler eller, rättare sagdt, af den 1:sta ibland dem visar sig ock alldeles ögonskenligt, att *någon periodicitet icke förefinnes hos de elliptiska functionerna med modylen* 1.*) Nämnda formel lägger ju för öppen dag att, huru stor än argumentets nummer-valör må vara, detsammas amplitud (då k är $= 1$) städse förblir num. *mindre än* $\frac{\pi}{2}$; och inom intervallet $\pm\frac{\pi}{2}$ förekommer ju ingen periodicitet af sinus, cosinus, &c. — Också blir den gränsvalör, som för $k < 1$ betecknades med K [se formeln (13)] och af hvars storlek periodernas vidd beror, i detta fall

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

således *oändlig*; hvaraf för öfrigt äfven är klart, att i händelsen $k = 1$ något tal om *complementar-argumenter* (se § 3) icke kan förekomma.

Obs. Man säger kortligen "*För* $k = 1$ *är* $\mathrm{K} = \infty$"; man har nemligen i sjelfva verket för sed att med K kortl. beteckna valören af integralen (13) ej allenast (som förr är nämndt) för $k < 1$, utan äfven för $k = 1$.

Och likaså, emedan man öfverenskommit att — för hvarje modyl k (begränsad af 0 och 1 förstås) — med K′ beteckna valören af integralen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}}, \quad (k' \text{ complementar-modylen}),$$

är, till följd deraf,

$$\mathrm{K}' = \infty \text{ för } k = 0,$$
$$\text{och } = \frac{\pi}{2} \text{ för } k = 1.$$

Deremot är nu ock å andra sidan lätt verificeradt, att alla *öfriga* egenskaper och inbördes relationer, som enligt de föregående §§ tillkomma de elliptiska functionerna för $k < 1$, *äfven tillkomma dem i det fall att modylen är* 1, således i sjelfva verket *alla dessa egenskaper* med den *modifikation* allenast, som sjelfmant framstår såsom följd deraf, att — kort sagdt — *någon qvantitet* $\mathrm{K}_{(k=1)}$

*) Hvilket ju för öfrigt äfven är sjelfklart deraf, att — som nämndes — dessa functioner icke äro annat än de vanliga exponential-functionerna (med reel exponent).

Af dessa formler eller, rättare sagdt, af den 1:sta ibland dem visar sig ock alldeles ögonskenligt, att *någon periodicitet icke förefinnes hos de elliptiska functionerna med modylen* 1.*) Nämnda formel lägger ju för öppen dag att, huru stor än argumentets nummer-valör må vara, detsammas amplitud (då k är $= 1$) städse förblir num. *mindre än* $\frac{\pi}{2}$; och inom intervallet $\pm\frac{\pi}{2}$ förekommer ju ingen periodicitet af sinus, cosinus, &c. — Också blir den gränsvalör, som för $k < 1$ betecknades med K [se formeln (13)] och af hvars storlek periodernas vidd beror, i detta fall

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

således *oändlig*; hvaraf för öfrigt äfven är klart, att i händelsen $k = 1$ något tal om *complementar-argumenter* (se § 3) icke kan förekomma.

Obs. Man säger kortligen "*För* $k = 1$ *är* $\mathrm{K} = \infty$"; man har nemligen i sjelfva verket för sed att med K kortl. beteckna valören af integralen (13) ej allenast (som förr är nämndt) för $k < 1$, utan äfven för $k = 1$.

Och likaså, emedan man öfverenskommit att — för hvarje modyl k (begränsad af 0 och 1 förstås) — med K′ beteckna valören af integralen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}}, \quad (k' \text{ complementar-modylen}),$$

är, till följd deraf,

$$\mathrm{K}' = \infty \text{ för } k = 0,$$
$$\text{och } = \frac{\pi}{2} \text{ för } k = 1.$$

Deremot är nu ock å andra sidan lätt verificeradt, att alla *öfriga* egenskaper och inbördes relationer, som enligt de föregående §§ tillkomma de elliptiska functionerna för $k < 1$, *äfven tillkomma dem i det fall att modylen är* 1, således i sjelfva verket *alla dessa egenskaper* med den *modifikation* allenast, som sjelfmant framstår såsom följd deraf, att — kort sagdt — *någon qvantitet* $\mathrm{K}_{(k=1)}$

*) Hvilket ju för öfrigt äfven är sjelfklart deraf, att — som nämndes — dessa functioner icke äro annat än de vanliga exponential-functionerna (med reel exponent).

icke existerar eller — med andra ord — att i detta fall *amplituden för* hvarje *argument är num.* $< \frac{\pi}{2}$.

Så, hvad beträffar giltigheten för detta fall af grundformlerna (9)—(12), är den alldeles åskådliggjord genom formlerna (85) och (86). — Beträffande åter *additionsformlerna* (72)—(82) och i första rummet sjelfva *fundamental-formeln* (72) eller (66), så är uppenbart, att dess *deduktion* (början af §. 4) gäller lika väl för $k = 1$ som för $k < 1$,*) och således äfven *formeln sjelf* med sitt Coroll. (73), äfvensom de begge formlerna i V (sid. 27), neml. (80) och (81), som äro identiska med de begge (72) och (73) i detta fall, alldenstund här $\mathfrak{C}$- och $\mathfrak{D}$-functionerna äro en och densamma, af hvilken orsak ock formlerna i IV och III här tydligen reducera sig till blotta identiteter. Och som af samma orsak sjelfva fundamentalformeln (72) här reducerar sig till:

$$(87) \qquad \mathfrak{C}(\alpha + \beta) = \frac{\mathfrak{C}(\alpha)\mathfrak{C}(\beta)}{1 + \mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta)}, \text{ (mod.} = 1),$$

och till följd deraf en hvar af formlerna i II till:

$$(88) \qquad \mathfrak{S}(\alpha + \beta) = \frac{\mathfrak{S}(\alpha) + \mathfrak{S}(\beta)}{1 + \mathfrak{S}(\alpha)\mathfrak{S}(\beta)}, \text{ (mod.} = 1),$$

hvars riktighet kan omedelbart verificeras t. ex. medelst den förra af formlerna (86); så är häraf klart, både att samtliga additionsformlerna gälla äfven för $k = 1$ och att de i detta fall reducera sig till allenast de begge förestående och för öfrigt identiteter.**)

Och att de vigtiga relationerna (32) och (36) mellan de ellipt. functionerna och deras derivator stå fast äfven i detta fall, och nemligen *här* de sednare — så väl som de förra — för *alla* argumentsvalörer, är en sjelfklar följd deraf, att detsamma uppenbarligen är att säga om formeln (31) och att i detta fall — som sagdt var — amplituden för *hvarje* argument är num. $< \frac{\pi}{2}$.

2. Af den första formelns (36) giltighet äfven för $k = 1$, och nemligen (som sist nämndes) för *alla* α-valörer i detta fall, är uppenbart, att *äfven för* $k = 1$ den satsen (i början af § 3)

---

*) Allenast att i detta fall ($k = 1$) variabeln φ förutsättes hålla sig städse inom intervallet $\pm \frac{\pi}{2}$.

**) Jemf. anm. näst efter (83).

står fast, att eqvationen

$$(37)\qquad \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = du$$

satisfieras af

$$(38)\qquad \xi = \operatorname{sin am}(\alpha, k),$$

och nemligen för *hvarje* α-valör i detta speciela fall.

Och om man, med anledning deraf, utsträcker begagnandet af tecknet

$U_{x,\,k}$, under förutsättning fortfarande att

x aldrig är num. > 1,

äfven till det fall att k är $= 1$, enligt *definitionen*

$$(41)\qquad U_{x,\,k} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2\xi^2)}},\quad (x \text{ num.} \leqq 1),$$

och således specielt

$$(41'')\qquad U_{x,\,1} = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2},\quad (x \text{ num.} \leqq 1);$$

så och alldenstund, till följd af denna antagning,

$$\text{för } \textit{hvarje x-valör num.} < 1,\quad U_{x,\,1} \text{ är } = \frac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \qquad (89)$$

$$\text{och } U_{-x,\,1} = -U_{x,\,1}$$

$$\text{samt } U_{0,\,1} = 0,$$

men

$$U_{1,\,1}\left[= \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}\right] = \infty = -U_{-1,\,1},$$

är uppenbart, att *eqvationen*

$$U_{\xi,\,1} = \alpha,$$

ehvad reel α-valör än må vara uppgifven, satisfieras af en, men ock *blott en* reel ξ-valör, nemligen af *allenast*

$$\xi = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} = \operatorname{sin am}(\alpha, 1),$$

och att således den mycket vigtiga satsen vid formeln (46) i § 3 verkligen gäller *äfven för* $k = 1$ och nemligen, i *det* speciela fallet, till och med för *hvarje* (reel) $\mathfrak{A}$- eller α-valör.

Med få ord således: *Functionen*

$\sin\mathrm{am}(\alpha, k)$, *modylen k må ock vara hvilkensomhelst begränsad af* 0 *och* 1, *har den egenskapen att, åtminstone för hvarje α-valör num.* $<$ K,*) *satisfiera eqvationen*

$$(90)\qquad \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = d\alpha\,,$$

och är i sjelfva verket **den enda** *reela ξ-valör, som satisfierar eqvationen*

$$(91)\quad (\mathrm{U}_{\xi,\,k} =)\int_0^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = \alpha(num. \leqq \mathrm{K}).$$

— se der en sats, som i sanning kan sägas väl försvara sin plats vid sjelfva öfvergången till *den allmänna* theorien för de elliptiska functionerna!

Anmärkning.

Af formeln (89), d. ä. deraf, att för hvarje x-valör num. $<$ 1 $\mathrm{U}_{x,\,1}$ är $= \frac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ och således $= i.\arcsin\left(\frac{-ix}{\sqrt{1-x^2}}\right)$,**) följer omedelbart denna relation:

$$(92)\qquad \arcsin(yi) = i\mathrm{U}_{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}},\,1}\,,\quad y \text{ reel } \textit{hvilkensomhelst},\text{***)}$$

---

*) För $k = 1$ är ju detta *med andra ord* sagdt: för *hvarje* α-valör.

**) Nemligen (se *Cauchy*, Exerc. T. IV sid. 281), åtminstone för hvarje x-valör num. $<$ 1, är

$$\frac{1}{2i}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \arcsin z\,,$$

neml. z bestämd af formeln $\frac{zi}{\sqrt{1-z^2}} = x$,

d. ä. (som man lätt finner)

$$z = -\frac{xi}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

***) Neml. om man i formeln näst förut sätter y i stället för $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (som ju, då x är en reel hvilkensomhelst num. $<$ 1, sjelf är en reel och num. $<$ 1 *hvilkensomhelst*), så är ju $x = -\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$, o. s. v.

en i sanning *anmärkningsvärd* complement-formel till den bekanta

$$\arcsin x = \mathrm{U}_{x,\,0}\,,\quad (x \text{ num. } \leqq 1)\,,$$

och dess omedelbara conseqvens:

$$\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = \mathrm{U}_{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}},\,0}\,,\quad y \text{ reel } \textit{hvilkensomhelst}.$$

Not.

Det är nogsamt bekant, att om $f'(x)$ är en continuerlig function af x (reel variabel) mellan ett par gränser x_0 och X, och $f(x)$ är en annan, som, sjelf continuerlig mellan samma gränser, har den förra till derivata, så länge man icke öfverskrider dessa gränser, så är

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f'(x)dx = f(\mathrm{X}) - f(x_0)\,.$$

Deremot synes det icke vara lika allmänt uppmärksammadt, att denna formel (1) är en sanning *äfven i de fall, då functionen $f'(x)$ under integraltecknet, för öfrigt continuerlig mellan gränserna, blir discontinuerlig (vidkännes afbrott i continuiteten) för någon eller några x-valörer* **inom** *gränserna eller äfven för endera gränsen*, **allenast sjelfva $f(x)$ är continuerlig mellan gränserna och har $f'(x)$ till derivata åtminstone för hvarje x-valör som må uppgifvas inom desamma.**

Beviset för den satsen — vid hvilken*) för öfrigt redan *Cauchy* fäste en synnerlig vigt — kan inhemtas t. ex. i Kongl. Vet.-Akade-

*) Om ock i något olika termer affattad; hvarom nu likväl icke är nödigt att orda.

miens Handl. för år 1852 sid. 186 och 187.*) Utrymmet förbjuder att här reproducera det. Men vi tillägga här uttryckligen — såsom varande sjelfva *grunden* för hvad i de första raderna af § 2 här framföre yttrades — det sjelfklara *Corollarium* af förestående sats, att formeln

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x} f'(x)dx = f(x) - f(x_0)$$

med all säkerhet gäller för *hvarje* x-valör, som icke ligger utom ett par gränser, af hvilka x_0 är den ena, då — som sagdt var — $f(x)$ är continuerlig mellan dem och har $f'(x)$ till derivata åtminstone för hvarje x-valör som må uppgifvas *inom* desamma, — denna $f'(x)$ må nu sjelf vara oafbrutet continuerlig eller ej mellan dem —, samt att således sjelfva

$$\int_{x_0}^{x} f'(x)dx$$

i sådant fall är continuerlig function af x mellan dessa gränser.

Se här ett par exempel:**)

1) Alldenstund

$\int_0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ är $=$ arcsin$x$, åtminstone så länge x är num. < 1,

och denna arcsin$x$ är continuerlig function af x mellan $x = 0$ och

---

*) Uti ingressen till den afhandling, som der finnes intagen, har förf. lagt sig vinn om att rätt skarpt fixera vissa af den högre analysens *grundbegrepp*, om hvilkas uppfattning man vid den tiden icke ännu syntes hafva blifvit allmänt ense. Som detsamma verkligen är fallet än i dag till en viss grad, torde nämnda ingress ännu kunna vara mången till nytta.

**) Upplysningsvis må vid detta tillfälle nämnas, att vi för korthets skull (andra skäl att nu lemna osagda) begagna uttrycket

$$\int_{z_0} F'(z)dz \text{ är } = F(z)$$

såsom liktydigt med detta vidlyftigare:

$$F'(z) \text{ är } \frac{dF(z)}{dz}, \text{ och } F(z_0) = 0,$$

varande z en continuerligt variabel qvantitet, reel eller imaginär, och z_0 en speciel af dess valörer.

x = vare sig 1 eller -1; är man deraf förvissad, att

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ är } = \arcsin x \text{ för hvarje } x\text{-valör num. } \leqq 1.$$

2) Alldenstund, då k är < 1,

$$\int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \text{ är } = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \text{ åtminstone så}$$

länge x är num. < 1,

då φ är $= \arcsin x$,

och denna $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ är continuerlig function af x mellan $x = 0$ och $x = \pm 1$;*) är man deraf förvissad, att

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \text{ är } = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \text{ för hvarje}$$

x-valör num. $\leqq 1$,

och följaktligen äfven continuerlig function af x mellan $x = 1$ och $= -1$.

---

*) Neml. så länge x icke öfverskrider begränsningen ± 1, är ju φ (neml. $\arcsin x$) continuerligt variabel med x, och således lika länge $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ (som ju varierar *continuerligt* med φ mellan hvilka φ-gränser som helst) sjelf continuerlig function af x.

I. Redogörelse för högre Elementarläroverket i Westerås.

A. Undervisningen.

Höstterminen, som började den 23 Augusti, afslutades efter examen med de 5 lägsta klasserna den 18 Dec. Vårterminen började den 18 Jan. och kommer enligt H. H. Efori bestämmande att afslutas Måndagen den 4:de Juni.

Helsotillståndet har under läseåret såväl bland lärare som lärjungar varit i allmänhet godt, så att undervisningen kunnat oafbrutet fortgå, för hvilket lyckliga förhållande vi hembäre den Högste ödmjuka och innerliga tacksägelser.

I undervisningsplanen hafva inga andra förändringar vidtagits, än de, som äro anbefallda i Kongl. Maj:ts Nådiga Kungörelse af den 12 Maj 1865. Föreskriften angående undervisningens öfverlemnande åt högst fyra lärare i fjerde klassen har dock, hvad real-linien beträffar, icke under för handen varande förhållanden kunnat fullt efterföljas, och äfven i andra klassen har en liten afvikelse egt rum, i det att Christendomsundervisningen handhafts af en annan, än den egentliga klass-läraren. Den i ofvanbemälda Nådiga Kungörelse för lärjungar på klassiska linien öppnade utsigten till erhållande under visst vilkor af dispens från läsningen af Grekiska språket har, som man kunde vänta, med begärlighet omfattats; icke mindre än 30 lärjungar hafva nämligen i vederbörlig ordning anmälts till åtnjutande af denna dispens, men huru elastiskt än vilkoret, som betingar densammas beviljande, är, nämligen att lärjunge "befunnits icke utan svårighet kunna följa undervisningen", ett vilkor, som för öfrigt saknar tillämplighet på sådana lärjungar, som, utan att förut hafva tillhört läroverket, söka och vinna inträde i den klass, der undervisningen i Grekiska språket vidtager, har Collegium icke ansett sig kunna lagligkmätigt tillstyrka den önskade dispensen för flere än 18 lärjungar, och har detta vunnit H. H. Efori godkännande och stadfästande. Hvilket inflytande åter detta resultat haft på åtminstone några af dem, hvilkas dispensansökan blifvit afslagen, det kan man lättare föreställa sig, än det kan vara lämpligt att här utveckla.

Den dagliga undervisningstidens indelning var under Höstterminen kl. 7—9, ½11—1, samt tvänne eftermiddagar i veckan kl. ½4—5, tvänne 4—5. Timmen kl. 1—2 var då upptagen af Gymnastiköfningar, nämligen en half timme för hvardera af de 2:ne afdelningar, i hvilka lärjungarne i afseende på Gymnastikundervisningen äro fördelade. För att undvika den olägenhet, som denna indelning hade med sig derutinnan, att, då förmiddagslektionerna för alla klasser slutade kl. 1, men endast den ena Gymnastikafdelningen omedelbart derpå kunde få sin öfning, den andra afdelningen måste vänta en halftimma, hvilken mellantid för alla icke nära intill skolan boende lärjungar var för kort att kunna tillbringas i hemmet, och vid inträffande ogynsam väderlek icke heller kunde lämpligen användas till rörelse i fria luften, vidtogs vid Vårterminens början den förändringen, att förmiddagslektionerna egt rum kl. 11—½2, samt att den lägre Gymnastikafdelningen haft sin öfning kl. ½11—11, den högre kl. ½2—2. Dessutom har under hela läseåret tiden kl. 5—½6 e. m. hvarje Måndag, Tisdag, Thorsdag och Fredag varit anslagen till samfälda öfningar i vapenföring m. m. för lärjungarne i klasserna V—VII. I bajonettfäktning hafva 57 lärjungar blifvit öfvade; i sabelföring 41; i florettföring 25; i gevärsexercis 110. Bataljonsexercisöfningar i fria luften hafva vid tjenlig väderlek på de ordinarie Gymnastiktimmarna egt rum, äfvensom målskjutningsöfningar på särskilda timmar för sjunde klassens lärjungar. Från Gymnastiköfningarna hafva på grund af den anbefallda Läkarebesigtningen varit befriade: under Höstterminen 30, under Vårterminen 35, hvilket i medeltal utgör nära 11 procent af antalet närvarande lärjungar.

Då exercis- och vapenöfningar i fria luften med skäl anses vara af väsendtlig nytta för ungdomens fysiska utveckling, men för dessa öfningars ändamålsenliga ordnande och utförande en passande och rymlig plats är oundgänglig, har man, i anseende till det med hvarje år växande lärjungeantalet, icke utan bekymmer motsett den tid, då den för ofvannämnda ändamål nu använda planen emellan läroverkshuset och Domkyrkan, hvilken redan erbjuder mindre utrymme än önskligt vore, blefve dertill alldeles otillräcklig. Det är derföre med synnerlig tillfredsställelse jag nu kan omnämna den lofvande utsigt, som förefinnes, att få dessa farhågor för all framtid häfda. Sedan nemligen Delegerade för förvaltningen af Westerås Elementarläroverks byggnadsfond hos Kgl. Maj:t gjort underdånig hemställan derom, att af nämnde fond ett belopp af 1,570 Rdr måtte få användas såsom bidrag till anbringande af en bro öfver Svartån, afsedd att bereda kommunikation emellan läroverkshuset och det så kallade Djekneberget, der en för skolungdomens vapenöfningar passande och rymlig plats funnes tillgänglig, till hvilken hemställan högvördiga Domkapitlet tillstyrkt nådigt bifall, och sedan derefter den ifrågavarande delen af Djekneberget med dertill ledande vägar blifvit till Westerås stads Skarpskytte-corps donerad, och läroverkets ungdom dervid fått sig för all framtid tillerkänd rättighet till platsens begagnande för sina vapenöfningar, samt likaledes nödig mark för anbringande af uppgångar och landfästen för bron blifvit donerad, så har Kongl. Maj:t i nådigt bref till högvördiga Domkapitlet den 9 Mars detta år funnit godt i nåder medgifva, att det ofvannämnda beloppet af byggnadsfondens medel må användas till ifrågavarande brobyggnad, för hvilken hela kostnaden är beräknad till 3,200 Rdr, när den derför i öfrigt erforderliga summan, 1,630 Rdr, genom enskilda bidrag blifvit tillgänglig. Då sålunda vederbörande auktoriteter tillerkänt denna sak den vigt den utan tvifvel eger, tror man sig hafva välgrundade förhoppningar, att ett snart utgående upprop till fyllande af den för byggnadsföretaget erforderliga summan skall mötas med välvilja såväl af Westerås samhälle, hvilket genom den tillernade bron erhåller en lätt kommunikation till en sund och välbelägen promenadplats, som af skolungdomens föräldrar, målsmän och öfrige gynnare. Jag uppfyller emellertid en kär pligt, då jag begagnar tillfället att här offentligen uttala Läroverkets tacksamhet för dem, som redan i så väsendtlig mon bidragit till företagets framgång: Fabrikören Hr *A. T. Sundin*, som tillförsäkrat ungdomen rättighet för all framtid till exercisplatsens begagnande; Gymnastikläraren Hr Kaptenen och Riddaren *S. Lidman*, som anlagt de dertill ledande vägarna, Hr Grefve *G. Gs. Lewenhaupt* och Handlanden Hr *P. O. Flodin*, som skänkt nödig mark till landfästen m. m.

I afseende på sångöfningarna har ungdomen varit indelad i 5 klasser, af hvilka de 2 lägsta hafva haft hvardera 1 timmes, de öfriga 2 timmars öfningar i veckan. Instrumentalöfningar hafva egt rum 2 timmar i veckan.

Första halftimmen af läsedagen har som vanligt varit egnad åt bön med bibelläsning och förklaring. Ledningen af dessa andaktsstunder har under detta läseår, likasom under 17 föregående, ombesörjts af Adjunkten Ph. Doktor *Lyrberg*. Den dervid förekommande förklaring har omfattat Pauli bref till de Epheser, Philipper, Colosser, Thessaloniker, Timotheus, Titus, Philemon, Ebreer samt Petri 2:ne och Johannis 3:ne bref. Gudstjenst har hvarje helgdag under någon lärares ledning hållits på läroverkets stora sal, den kallaste årstiden för hela ungdomen, annars för ungefär halfva antalet, då den andra hälften bevistat Gudstjensten i Domkyrkan.

För ungdomens skriftliga hemarbeten har ett särskildt uppgjordt Schema varit gällande; likaså äfven för de skrifningar, som äro anbefallda för de från läsningen af Grekiska språket dispenserade lärjungarne. De sistnämnda skrifningarne hafva vecka efter vecka omvexlat i följande ämnesordning: Latin, Svenska, Mathematik (Fysik), Tyska, Franska. De hafva utarbetats på lärorummen under de Grekiska lektionerna, och utgifvits samt rättats af de lärare, hvar i sitt ämne, hvilka handledt de resp. lärjungarnes öfriga skriföfningar.

Beträffande lärjungarnes hemarbeten har i öfverensstämmelse med föreskriften i Nådiga Circuläret d. 12 Maj 1865 i hvarje afdelning funnits en anteckningsbok, i hvilken hvarje lärare för dagen inskrifvit, hvilka arbeten han föresatt lärjungarne att fullgöra i hemmet.

Hemlexor hafva förekommit i alla klasser utom den första; i klasserna II—V i allmänhet i 2:ne läroämnen för hvarje dag, i de öfriga i 3:ne, och kunna dessa hemlexor i allmänhet anses hafva upptagit i II klassen $1^1/_2$ tim., i kl. III—V 2, samt i VI och VII 3 à 4 timmar om dagen.

Hvad för öfrigt beträffar undervisningens omfång, och indelning på de båda bildningslinierna, begagnade läroböcker m. m., så inhemtas detta af följande uppgift om

Genomgångna Pensa under läseåret:

Christendom.

Klassen I. 6 tim. — *Biblisk Hist.* Gamla Testamentets, efter *Hübner* (Thomanderska uppl.). — *Kateches:* Första hufvudstycket och till 1:sta Artikeln på det andra. — Valda Bibelspråk och Psalmer.

Kl. II. 5 tim. — *Bibl. Hist.* Nya Testamentets. — *Kateches:* 2:dra hufvudstyck. och repetition af det 1:sta. — Valda Bibelspråk och Psalmer.

Kl. III. 3 tim. — *Bibl. Hist.* repetition. — *Kateches:* 5:te hufvudstyck. och repetition af de föregående. — Valda Bibelspråk och Psalmer.

Kl. IV. 3 tim. — Katechisation. — Nya Testamentet efter *Kurtz* (Bibl. Hist.).

Kl. V. Lägre afdeln. 3 tim. — Katechisation med ledning af *Norbecks* lärobok i Theologi. — Nya Testamentets läsning med förklaring (20 kap. af Matth. Evang.).

Högre afdeln. 3 tim. — Katechisation med ledning af *Norbecks* lärobok i Theologi. — Nya Testamentets läsning med förklaring (Matth. Evang.)

Kl. VI. Lägre afdeln. 2 tim. — de 4 första kap. af *Norbecks* Theologi. — 1:sta Perioden af *Cornelii* Kyrkohistoria.

Högre afdeln. 2 tim. — 8 kap. af *Norbecks* Theologi. — Nya Testamentets läsning på grundspråket med förklaring (20 kap. af Matth. Evang.).

Kl. VII. Lägre afdeln. 2 tim. — *Norbecks* Theologi. — Nya Testamentets läsning på grundspråket med förklaring (12 kap. af Matth. Evang.).

Högre afdeln. 2 tim. — Repetition af *Norbecks* Theologi och *Cornelii* Kyrkohistoria. — Nya Testamentets läsning på grundspråket med förklaring (16 kap. af Matth. Evang.).

Historia och Geografi.

Klassen I. 4 tim. — Sveriges, Norriges och Danmarks politiska *Geografi* efter *Palmblad.*

Kl. II. 5 tim. — *Historia:* till Kalmar-Unionen efter *Ekelunds* mindre sammandrag jemte *Alanders* läsebok. — *Geografi:* Ryssland (med Finland och Polen), England och Tyskland.

Kl. III. 5 tim. — *Historia:* från Kalmar-Unionen till Drottning Christina efter *Ekelund* jemte *Alanders* läsebok. — *Geografi:* Nederländerna, Belgien, Frankrike, Schweiz, Pyreneiska halfön, Italien och Grekland.

Kl. IV. 4 tim. — *Historia:* från Carl X Gustaf till lärobokens slut. — *Geografi:* Asiens och Afrikas politiska.

Kl. V. Lägre afdeln. **Klassiska linien.** 3 tim. — *Historia: Pütz'* lärobok i Gamla tidens Geografi och Hist. till Romarne jemte begagnande af *Palmblads* Berättelser i Gamla Hist. såsom läsebok. — *Geografi:* Nord- och Syd-Amerika samt Australien. Kartritning.

Real-linien. 4 tim. — *Historia: Wennerströms* lärobok i Allm. Hist. till Nyare tiden. — *Geografi*, lika med Klassiska linien.

Högre afdeln. **Klassiska linien.** 3 tim. — *Historia: Pütz'* lärobok i Gamla tidens Geogr. och Hist. afslutad och repeterad. — *Palmblads* Berättelser såsom läsebok.

Real-linien. 4 tim. *Historia: Wennerströms* lärobok afslutad och repeterad. — *Geografi:* repetition af Europa, Nord- och Syd-Amerika samt Australien.

Kl. VI. Lägre afdeln. **Klassiska linien.** 3 tim. — *Historia: Pütz'* lärobok i Medeltidens Geografi och Hist. genomgången och repeterad. Repetition af physiska geografien.

Real-linien. 4 tim. — *Historia: Pütz'* lärobok i Nyare tidens Hist. till § 23 (sid. 94). — *Geografi: Palmblads* lärobok repeterad.

Högre afdeln. **Klassiska linien.** 3 tim. — Svenska Hist. efter *Ekelunds* större sammandrag till Carl XII:s död.

Real-linien. 4 tim. — Svenska Hist. efter *Ekelunds* större sammandrag till Gustaf II Adolf. — *Pütz'* Nyare tidens Hist. till Franska Revolutionen. Repetition af physiska geografien.

Kl. VII. Lägre afdeln. **Klassiska linien.** 3 tim. — *Pütz'* Nyare tidens Hist. till Franska Revolutionen. — Svenska Hist. efter *Ekelunds* större sammandrag från Carl XII:s död till lärobokens slut. Physiska geografien repeterad.

Högre afdeln. **Klassiska linien.** 3 tim. — De antagna läroböckerna fullständigt jemte repetition.

Mathematik.

Klassen I. 5 tim. — *Arithmetik:* Hela tal samt bråks förlängning och förkortning, efter *Zweigbergks* lärobok. Öfning i hufvudräkning. — *Lineartekning*, efter *Ekman*.

Kl. II. 5 tim. — *Arithm.* t. o. med Bråk (vanliga och decimal-) samt sorters fördelning och reduktion. Öfning i hufvudräkning. — *Lineartekning*, efter *Ekman*.

Kl. III. **Klassiska linien.** 4 tim. — *Arithm.* Sorters reduktion samt de fyra räknesätten med sorter. Repet. af vanliga och decimalbråk. — *Geom.* Euklid. Bok. 1 utom bevisen för theoremerna.

Real-linien. 7 tim. — Detsamma jemte Regula-de-tri (enkel och sammansatt).

Kl. IV. **Klassiska linien.** 5 tim. — *Arithm.* Enkel och sammansatt Regula-de-tri, och repetition af Sorträkning; öfra lexlaget dessutom Intresseräkning. — *Geom.* Euklid. Bok. 1.

Real-linien. 8 tim. — *Arithm.* Repet. t. o. med sammans. Regula-de-tri. — *Algebra: Björlings* (7:de uppl.) till kap. om negativa qvantiteter. — *Geom.* Euklid. Böck. 1 och 2.

Kl. V. **Klassiska linien.** 4 tim.

Lägre afdeln. — *Arithm.* Repet. af Bråkräkning. — *Algebra:* från början till negativa qvantiteter. — *Geom.* Bok. 2 och repet. af B. 1.

Högre afdeln. — *Arithm.* Repet. af Regula-de-tri. — *Algebra:* från och med Bråks liknämniggörande till och med eqvationer af 1:a graden med en obekant. — *Geom.* Euklid. Böck. 3 och 4, repetition af B. 1 och 2.

Real-linien. 7 tim.

Lägre afdeln. — *Arithm.* Intresse- och Rabatträkning, repetition af Regula-de-tri. — *Algebra:* Om negativa qvantit. och eqvationer af 1:a graden med en obekant, jemte problemerna i lärob. sid. 67—72 och i problemsamlingen Probl. 1—21, samt repet. af bråkräkning. — *Geom.* Euklid. Böck. 3, 4 och repet. af B. 1, 2.

Högre afdeln. — *Arithm.* Repet. till o. m. Rabatträkning. — *Algebra:* öfra lexlaget 1:a delen afslutad, jemte probl. sid. 23—41 i problemsaml:s förra häfte. Nedra lexlaget Kap. V § 3 (om eqvationslärans användning vid arithmetiska problemers upplösning) jemte 1:a afdeln. af problemsaml., samt Kap. VI, VII och VIII till § 5 (om roteqvationer). — *Geom.* öfra lexl. Böck. 5 och 6 med undantag af bevisen för theor. i Kap. 2 och 3 af Bok, 5; nedra lexl. Bok. V. kap. 1.

Kl. VI. **Klassiska linien.** 4 tim.

Lägre afdeln. — *Arithm.* Intresse- och Rabatträkning. — *Alg.* Kap. V § 3 sid. 67—72, kap. VI, VII §§ 1, 2 (om irrationela qvantiteter och qvadratrötter); problem. 1—84, 97—120 i problemsaml:s förra häfte (4 lärjungar äfven probl. 85—96). — *Geom.* Euklid. Bok. 5 kap. 1.

Högre afdeln. — *Algebra:* kap. VI—VIII § 5 (t. o. med roteqvationer); af problemsamlingen äro probl. 13—58 af 2:a afdeln. genomgångna omedelbart inför läraren och utan förberedelse. — *Geom.* Bok. 5, med undantag af bevisen för theorem. i kap. 2 och 3; Bok. 6 t. o. med prop. 20; repet. af B. 1—4.

Real-linien. $6^1/_2$ tim.

Lägre afdeln. — *Algebra:* från paragr. om roteqvationer till förra Delens slut och repet. af kap. VI—VIII. — Problemsaml. 1:sta afdeln. till en del repeterad, 2:a afdeln. *till* de geometr. problemerna. — *Geom.* Böck. 5 och 6 (med samma inskränkning i afseende på B. 5 som för högre afdelningen, klassiska linien).

Högre afdeln. — *Algebra:* sednare Delen från o. med kap. X (om Rötter). Problemsamlingen, 3:e afdeln. de geometriska probl., 4:de afdeln. 1—34 och 60—63, 5:te afdeln. 1—52. — *Plan Trigo-*

nometri, efter *Lindmans* lärobok, *till* problemerna och, af dessa, pr. 1—19 jemte de numeriska ex. 1—9. — *Geom.* repet. af B. 5 och 6 (fullständigt) samt Böck. 1—4.

Kl. VII. **Klassiska linien.** 4 tim.

Lägre afdeln. — *Algebra:* §§ 1—3 af kap. IX (om eqvationer med flere obekanta), kap. X och XI (om Rötter och Potenser) samt §§ 1 och 2 af kap. XII (om Logarithmer). Problemsamlingen 2:a afdeln., de geometriska problemerna jemte inledningen om geometr. problemer i förra Delen af algebran från sid. 155 till slutet; för öfrigt problem-öfningar (icke skriftligen) utan förberedelse omedelbart inför läraren. — *Geom.* Böck. 5 och 6 afslutade och repeterade (dock med samma inskränkning i afseende på B. 5 som för högre afdeln. af 6:te klassen, klassiska linien).

Högre afdeln. — *Algebra:* sednare Delen från kap. X (om Rötter) tillika med åtskilliga problemer i 5:te afdeln. af problemsamlingen (om progressioner). Repetition. Problem-öfningar muntligen och skriftligen.

Naturvetenskap.

Klassen I. 2 tim. — *Fysisk Geografi,* allmän kännedom af Verldsdelarna (sid. 18—27 i 10 uppl.) samt det vigtigaste af Europas fysiska geografi efter *Palmblads* lärobok.

Kl. II. 2 tim. — *Fysisk Geografi:* Asiens, Afrikas och Amerikas. — *Botanik: Anderssons* inledning till botaniken med ledning af samme författares väggtaflor.

Kl. III. **Klassiska linien.** 2 tim. — *Arrhenii* mindre lärobok fullständigt med begagnande af *Anderssons* väggtaflor. Genomgående af Herbarier.

Real-linien. 3 tim. Samma som klassiska linien och dessutom kap. 1, 2, och 6 af *Agardhs* Naturkunnighet.

Kl. IV. **Klassiska linien.** 2 tim. — *Botanik: Arrhenii* Elementarkurs, 4:de uppl., det vigtigaste af grofva stilen till *"Frukten"*. Uppvisning af växter.

Real-linien. 3 tim. — Samma som klassiska linien och dessutom: Repetition af kap. 1, 2 och 6 af *Agardhs* Naturkunnighet och *Sundevalls Zoologi* till *Aves*, repet. till *"Bruta"*.

Kl. V. Lägre afdeln. **Klassiska linien.** 2 tim. — *Arrhenii* Elementarkurs: *Frukten*, samt repetition af föreg. Uppvisning af växter. — *Sundevalls Zoologi* till *Aves*, repeterad till *"Pecora"*.

Real-linien. 4 tim. — Samma som klassiska linien och dessutom: *Fysik*, *Floderi* lärobok, inledningen och 1:a kapitlet.

Högre afdeln. **Klassiska linien.** 2 tim. — *Botanik:* Insamling och uppvisning af 350 växtarter. — *Zoologi: Sundevalls* lärobok till Fiskarna.

Real-linien. 4 tim. — Dessutom: *Fysik*, samma pensum som föreg. afdelning.

Kl. VI. Lägre afdeln. **Klassiska linien.** 1 tim. — *Botanik:* De vigtigaste inhemska, naturliga växtfamiljerna till Calycifloræ efter *Arrhenii* lärobok. Insamling och uppvisning af omkring 400 växtarter. — *Zoologi: Sundevalls* lärobok till Leddjuren. — 1 tim. *Fysik: Floderi* lärobok till § 50.

Real-linien. 1 tim. — *Botanik* och *Zoologi*, samma som klass. linien. — 3 tim. *Fysik: Floderi* lärobok till § 104 samt problemer till kap. 3, Aerostatik. — 2 tim. *Kemi: Berlins* mindre lärobok, Metalloiderna.

Högre afdeln. **Klassiska linien.** 1 tim. — *Botanik:* de vigtigaste inhemska Nat.-familjerna efter *Schagerströms* lärobok till Nemeæ. Kännedom af minst 450 växtarter. — *Zoologi: Sundevalls* lärobok, Blötdjur och Stråldjur samt repet. af Vertebrerade djuren. — 1 tim. *Fysik: Floderi* lärobok till § 71.

Real-linien. 1 tim. — *Botanik* och *Zoologi*, samma som klass. linien. — 3 tim. *Fysik: Floderi* lärobok, Optik fr. § 171, Magnetism, Elektricitet och Värmelära, de förra båda repeterade. — 2 tim. *Kemi: Berlins* mindre lärobok till Natrium.

Kl, VII. Lägre afdeln. **Klassiska linien.** 2 tim. — *Fysik: Floderi* lärobok, 1:a delen samt läran om ljudet.

Högre afdeln. **Klassiska linien.** 2 tim. — *Fysik: Floderi* lärobok, 1:a och 2:a delarna.

Filosofi.

Klassen VII. Högre afdeln. 2 tim. — Grundlinier till Anthropologien af *Ribbing*. Logiken efter *Borelii* lärobok.

Svenska Språket.

Klassen I. 6 tim. — Det vigtigaste af formläran till starka verbens böjning, efter *Brodéns* lärobok samt det allra allmännaste af läran om den enkla satsen medelst muntliga öfningar. — Läsning af valda berättelser ur *Svedboms* läsebok, samt muntliga och skriftliga öfningar i rättstafning.

Kl. II. 4 tim. — *Brodéns* lärobok: det vigtigaste af formläran samt den enkla satsens delar. — Uppläsning af valda stycken ur historisk läsebok *(Alanders)* med redogörelse för innehållet af det lästa. — Fortsatta rättstafningsöfningar muntligen och skriftligen.

Kl. III. **Klassiska linien.** 3 tim. **Real-linien.** $4^1/_2$ tim. — Repet. af formläran efter *Brodén.* — Sats- och rättstafningsöfningar.

Kl. IV. 3 tim. — *Brodéns* lärobok: den enkla satsen, satsbindningen och satsfogningen med skriföfningar på lärorummet; repet. af formläran. — Läseöfningar.

Kl. V. Lägre afdeln. 3 tim. — Läsning af valda författare samt deklamation ur minnet af smärre skaldestycken af *Tegnér*, *Geyer*, *Runeberg*. Repet. af *Brodéns* lärobok. — Satsanalys. — Skriföfningar på lärorummet.

Högre afdeln. **Klassiska linien.** 2 tim., **Real-linien.** 3 tim. — Läsning af valda författare, samt deklamation ur minnet af *Tegnérs*

Svea. — Etymologi till en del efter *Rydqvist*, Sv. språkets lagar. — Satsanalys, — Smärre uppsatser och öfversättningar på lärorummet.

Kl. VI. **Klassiska linien.** 2 tim., **Real-linien.** 3 tim. — Lägre afdeln. Läsning af valda författare. — Etymologi efter *Rydqvist*, Sv. språkets lagar samt Hist. språkforskningen. — Öfningar i Syntax. — En uppsats eller öfversättning hvarannan vecka.

Högre afdeln. Läsning af valda författare; V. T. *Danska* 1 tim. särskildt efter *Lindblads* läsebok. — *Brodén:* Öfversigt af Diktarterna jemte föregående undervisning om Stil. — Talöfningar. — En uppsats eller öfversättning hvarannan vecka.

Kl. VII. 2 tim. — Lägre afdeln. — Läsning af valda stycken ur svensk, norsk och dansk literatur. — Svenska språkets och literaturens historia t. o. m. Akademiska perioden, efter *Bjursten*. — En utförligare uppsats eller (metrisk) öfversättning hvarje månad.

Högre afdeln. Läsning af valda stycken ur svensk, norsk och dansk literatur. — Literaturhistorie: Romantiska perioden, samt repetition af det förut genomgångna. — Talöfningar. — En utförligare uppsats hvarje månad.

Tyska.

Klassen I. 6 tim. — Det allravigtigaste af formläran efter *Hjort*, till den Svaga konjugationen. — *Svedboms* Elementarkurs st. 1—30.

Kl. II. 6 tim. — Substantivens, Adjectivens, Pronominas och Verbens former. — *Svedboms* Elementarkurs styck. 1—32, 41—43.

Kl. III. **Klassiska linien.** 3 tim. — *Svedboms* Läsebok st. 1—12. Det vigtigaste af formläran,

Real-linien. 3 tim. — Dessutom *Svedboms* Läsebok st. 16—22.

Kl. IV. **Klassiska linien.** 3 tim. — Det vigtigaste af formläran. — *Svedboms* Läsebok styck. 16—40.

Real-linien. 3 tim. — Samma pensum.

Kl. V. Lägre afdeln. **Klassiska linien.** 2 tim. — Formläran efter *Hjort*. — *Svedboms* Läsebok styck. 38—58.

Real-linien. 2 tim. — Dessutom skriföfningar hvarje vecka.

Kl. V. Högre afdeln. **Klassiska linien.** 2 tim. — *Hjorts* Formlära fullst. samt det vigtigaste af Syntaxen. — *Svedboms* Läsebok styck. 70—100.

Real-linien. 2 tim. — Dessutom ett hemthema hvarje vecka.

Kl. VI. Lägre afdeln. **Klassiska linien.** 1 tim. — *Hjorts* Formlära fullständigt samt det vigtigare af Syntaxen. — *Svedboms* Läsebok, andra kursen styck. 1—23.

Real-linien. $2^1/_2$ tim. — Dessutom 3 sånger af *Wielands* "Oberon". — Ett hemthema hvarje vecka.

Högre afdeln. **Klassiska linien.** 1 tim. — *Hjorts* Grammatika fullständigt. — *Göthes* "Hermann und Dorothea". — Lokutionsöfningar på lärorummet.

Real-linien. $2^1/_2$ tim. — Dessutom 6 sånger af *Wielands* "Oberon". — Ett hemthema hvarje vecka.

Franska.

Klassen IV. **Real-linien.** 3 tim. — *Oldes* Språklära: Innanläsnings- och uttalsöfningar; det vigtigaste om Artiklarne, Substantiven och Adjektiven, hjelpverben samt de regelbundna Verben i Aktiv form. — *Oldes* Läsbok: Öfversättning af styck. 1—20 på 1:a afdelningen.

Kl. V. Lägre afdeln. **Real-linien.** — *Oldes* Språklära, 1:a kursen af de 6 första kapitlen. — *Oldes* Läsbok, styck. 21—56 af 1:a afdelningen.

Högre afdeln. **Klassiska linien.** 3 tim. — *Oldes* Språklära, 1:a kursen af de 6 första kapitlen. — *Oldes* Läsbok, styck. 31—68 af 1:a afdelningen.

Real-linien. 4 tim. — *Oldes* Språklära, hela 1:sta och större delen af 2:dra kursen på de 7 första kapitlen. — *Oldes* Läsbok, st. 1—60 af 2:dra afdelningen.

Kl. VI. Lägre afdeln. **Klassiska linien.** 4 tim. — *Oldes* Språklära, hela 1:sta och större delen af 2:dra kursen af de 7 första kapitlen. — *Oldes* Läsbok, styck. 1—75 af 2:dra afdelningen.

Real-linien. $4^1/_2$ tim. — *Oldes* Språklära, 1:sta och 2:dra kurserna af de 7 första kapitlen, 1:sta kursen af 8:de och 9:de kap. samt största delen af 2:dra kursen på det 8:de kap. — *Oldes* Läsbok, st. 61—114 af 2:a afdeln., hela 3:dje samt 4:de afdeln. till verserna. — Muntlig ock skriftlig öfversättning till franska af styck. 1—30 i *Oldes* Läsbok.

Högre afdeln. **Klassiska linien.** 4 tim. — *Dubbs* Läsebok: *Montesquieux, La Rochefoucauld, Fénélon, Voltaire, Le Sage, Marmontel, Florian, Duclos, Labruyère, Scribe, Hamilton.* — *Oldes* Grammatika 10 kap. — Lokutionsöfningar och skriföfningar på lärorummet.

Real-linien. $4^1/_2$ — *Oldes* Språkl. lika med VI lägre afd. Real-lin. — *Berndtsons* Variétés Litéraires 1:sta och 2:dra häft. — *Racines* Athalie. — Dels muntlig, dels skriftlig öfversättning till franska af stycken ur *Olde, Löwenhjelm* och *Drysén.*

Kl. VII. Lägre afdeln. 5 tim. — "L'avare" af *Molière.* Variétés Littéraires Deuxième Livraison. — Urval ur franska litteraturen af *Staaff,* fjerde kursen, sidd. 57—70, 77—80, 87—94, 98—117, 129—152, 202—216, 238—259. — *Oldes* Grammatika fullst. Extemporalia 1 tim. i veckan. — Lokutionsöfningar. — Ett hemthema hvarannan vecka.

Högre aldeln. 3 tim — *Mignet,* Histoire de la revolution française. kap. 5—10. — "L'avare" af *Molière.* Fullst. repet. af *Oldes* Grammatika. — Skrif- och Lokutionsöfningar på lärorummet. — Ett hemthema hvarannan vecka-

Engelska.

Klassen III. 3 tim. — *Oldes* Uttalslära §§ 1—3, 6—9. — Det vigtigaste af Formläran efter *May's* Grammatik. — *May's* Läseöfningar, styck. 1—14.

Kl. IV. 3 tim. — *Oldes* Uttalslära §§ 1—9. — Formläran efter *May's* Grammatik till kap. om de starka verben. — *Enbloms* Läsebok sid. 31—38. — *May's* Läseöfningar, styck. 1—21.

Kl. V. Lägre afdeln. 3 tim. — *Oldes* Uttalslära §§ 1—9. — Formläran efter *May's* Grammatik. — *Enbloms* Läsebok, sid. 55—61. — *May's* Läseöfningar, styck. 1—25.

Högre afdeln. 3 tim. — Uttalslära och Grammatik lika med föreg. afdelning. — Explication, 1:ta lexlaget, The Sketch Book of *Irving* sid. 1—76, 92—104, 141—171, 2:dra lexlaget "The Vicar of Wakefield" kap. 1—10.

Kl. VI. Lägre afdeln. 2 tim. — "The Vicar of Wakefield" kap. 18—30. — *May's* Grammatika fullst.

Högre afdeln. 2 tim. — "Ivanhoe by *Walter Scott*" 18 kap. — Repet. af *Enbloms* Grammatik. — Lokutionsöfningar.

Kl. VII. Lägre afdeln. **Klassiska linien** 1 tim. — The Vicar of Wakefield, 6 kap. — Det vigtigaste af *May's* Grammatika.

Latin.

Klassen III. 10 tim. — *Rabes* läsebok, öfnings-stycken 1—8, 14—31, 43—45. — *Rabes* Grammatik. Formläran: paradigmen samt de allmännaste genusreglorna. — Vokabel-läsning.

Kl. IV. 10 tim. — *Cornelius Nep.* Aristides, Pausanias, Iphicrates, Chabrias och Timotheus. Högre afdeln. dessutom Lysander. — Grammatik: Formläran fullständigare samt det vigtigaste af kasusläran i Syntaxen med extemporerade öfningar.

Kl. V. Lägre afdeln. 8 tim. — *Cornelius Nep.* Miltiades, Themistocles, Cimon, Iphicrates och Thrasybulus. — *Ovidii* Metamorph., Philemon & Baucis, Orpheus. — Grammatik: Formläran utförligare samt det vigtigaste af Syntaxen och Prosodiken efter *Rabes* mindre lärobok. — Extemporerade satsöfningar.

Högre afdeln. 8 tim. — *Cæsar* de bello Gallico 1:a och 2:a böckerna. — *Ovidii* Metamorph., Phaëthon. — Repetition af *Rabes* Grammatik.

Kl. VI. Lägre afdeln. 8 tim. — *Livius:* förra häften af 1:sta Boken. — *Virgilius:* 4:de Bok. — *Cicero:* De Amicitia. — Grammatik och Prosodik efter *Rabes* lärobok.

Högre afdeln. 8 tim. — *Livius:* sednare hälften af 1:sta och förra hälften af 2:dra Boken. — *Cicero:* Oratio pro S. Roscio Amerino. — *Virgilius:* 1:sta och 2:dra Böck. — Grammatik och Prosodik efter *Rabes* lärobok.

Kl. VII. Lägre afdeln. 7 tim. — *Livius:* 3:dje Bok. — *Cicero:* Epist., Brefven från tiden för Prokonsulatet, efter *Süpfle's* edition. — *Horatius:* 1:sta Bok. af Od. — *Virgilius:* Æn. 3:dje Bok. — Repetition af Grammatiken. — Extemporalier efter *Törneblads* Latinska skriföfningar.

Högre afdeln. 7 tim. — *Cicero:* Qvæst. Tuscul. 1:sta Bok.; Epistolæ, repet. af Brefven från tiden efter *Ciceros* återkallande till

Prokonsulatet, efter *Süpfle's* edition. — *Horatius:* 1:sta och 2:dra Böck. af Od. — *Virgilius:* Æn. 5:te och 6:te Böck. — Grammatik och Extemporalier såsom i lägre afdeln. — Antiqviteter efter *Bojesen*.

Ett hemthema i veckan för klass. V—VII.

Grekiska.

Klassen. V. Lägre afdeln. 6 tim. — Verba impura och de på *μι* med tillhörande läseöfningar efter *Aulin*. — *Aulins* Läsebok fablerna 1—8. — *Xenophons* Anabasis Bok 1, kap. 1. — Repetition af de förut lästa.

Högre afdeln. 5 tim. — Attiska dialektens formlära temligen fullständigt. — *Xenophons* Anabasis Bok. 1, kap. 2—8.

Kl. VI. Lägre afdeln. 6 tim. — Attiska formläran i det närmaste fullständig och af den Episka det vigtigaste muntligen meddeladt. — *Xenophons* Anabasis kap. 9 och 10 af 1:sta Bok. samt 2:dra Bok. — *Homeri* Odyssé 1:sta rhapsodien.

Högre afdeln. 6 tim. — Formlära, Attisk och Episk, fullst. — *Xenophons* Anabasis 3:dje och 4:de Böck. — *Homeri* Odyssé, rhapsodien 1, 2 och 3.

Kl. VII. Lägre afdeln. 5 tim. — Formlära, Attisk och Episk, fullständigt repet. — Syntax till Verbum med lokutionsöfningar. — *Xenophons* Anabasis 6:te Bok. — *Homeri* Odyssé, 4:de rhapsodien. — *Homeri* Iliad, 1:sta rhapsodien.

Högre afdeln. 5 tim. — Formlära och Syntax fullständig. — *Xenophons* Anabasis 6 Böck. — *Homeri* Odyssé, 5 rhapsodier.

Hebreiska.

Klassen VII. Lägre afdeln. 2 tim. — *Tullbergs* Läsebok de 4 första kap.. — *Lindbergs* Grammatik till Verba Gutturalia.

Högre afdeln. 2 tim. — 1 Mos. B. och Davids Psalmer efter *Tullbergs* Läsebok. — Det vigtigaste af Grammatiken efter *Lindberg*.

B. **Lärarne.**

Inom Lärarepersonalen hafva under läseåret följande förändringar inträffat: Ritläraren Hr *T. C. Körner* afled den 28 Nov. 1865, efter att hafva sedan Höstterminen 1858 härstädes tjenstgjort: Theologiæ Lektorn, Prosten och Kyrkoherden i Badelunda Ph. Doktor *L. Westerlund*, som började tjenstgöra vid Westerås högre lärdomsskola Höstterm. 1832, och från denna tid nästan utan afbrott ända till innevarande års början fortfarit i sin lärareverksamhet dels såsom Apologist, dels såsom Collega, dels såsom Kon-

Rektor, dels såsom Rektor, samt från Höstterminen 1848 såsom Lektor och från Höstterminen 1850 till och med Vårterminen 1855 såsom Rektor för det då förenade läroverket, har under den 13 September 1865 blifvit af Kgl. Maj:t utnämnd till Kyrkoherde i Harplinge och Steninge Församlingars Pastorat af Götheborgs Stift, hvilken befattning han med den 1 Maj d. å. tillträder. Läroverket ser sig härigenom för framtiden beröfvadt förmonen att få tillgodogöra sig den grundliga lärdom, det lefvande nit och intresse för ungdomen och undervisningen, som Prosten *Westerlund* redan vid sitt inträde i Lärarekallet medförde, samt den rika erfarenhet, som han under en så långvarig och mångsidig verksamhet i skolans tjenst och under en i dess framtida utveckling mäktigt ingripande brytningsperiod förvärfvat, men kan icke annat än till fullo erkänna billigheten af hans önskan att nu få utbyta den förra ansträngande verksamheten emot en annan mindre ansträngande, och då han nu går att i en annan krets af lärjungar utöfva en annan art af lärareverksamhet, ehuru visserligen icke heller *den* för honom hvarken ny eller främmande, medtager han härifrån både nuvarande och förra embetsbröders och lärjungars hjertliga och uppriktiga tacksamhet och välönskningar. — Till den genom Prosten *Westerlunds* vunna befordran lediga Theologiæ-Lektorsbeställningen samt den dermed förenade kyrkoherdebeställningen i Badelunda præbende-Pastorat har högv. Domkapitlet under den 28 sistlidne April utnämnt Theologiæ Docenten vid Kgl. Akademien i Upsala, Theolog. Candidaten, Phil. Doktor *F. Gihl*, som den 1 instundande Juni kommer att tillträda dessa befattningar. Af ju större vigt för ungdomens uppfostran det läroämne är, som Lektor *Gihl* sålunda kommer att öfvertaga, desto större anledning har Läroverket att lyckönska sig till att hafva vid sig fästat en man, hvars lärdom, redan vunna öfning i lärarekallet samt öfriga egenskaper berättiga till förhoppningar om en välsignelserik verksamhet.

Tjenstlediga hafva varit: Lektorn, Prosten *J. F. Norman*, Lektor *V. Enblom* och Adjunkten *A. Hedenlund*, alla 3 under hela läseåret, för sjukdom, samt under Vårterm. Lektorn, Prosten *L. Westerlund* i anseende till vunnen befordran. **Förordnade:** till vikar. Lektorer: Adjunkten Phil. Dokt. *C. A. Hvasser* för Prosten *Norman;* Phil. Candid. *R. Afzelius* för Lektor *Enblom;* Docenten Phil. Dokt. *F. Gihl* för Prosten *Westerlund,* de 2 förstnämnda under hela läseåret, den sistnämnda under Vårterminen; till vikar. Adjunkter: Stud. vid Upsala Universitet *C. E. H. Kökeritz* för Adj. *Hvasser* i anledning af nyssnämnde dennes förordnande, under hela läseåret, samt för Adj. *Hedenlund* under Höstterm. Stud. *J. A. Brandberg,* under Vårterm. Phil. Cand. *P. R. Billmanson.* Med H. H. Efori tillåtelse öfvertog Regementspastor *P. Pettersson* ifrån den 22 Sept. till Höstterm. slut en del af Prosten *Westerlunds* undervisningsskyldighet. Ritlärarebefattningen har sedan förre innehafvarens död på förordnande uppehållits af Gymnastikläraren Kaptenen och Riddaren *S. Lidman.* Såsom biträdande Instruktör vid Gymnastiköfningarna har under läseåret tjenstgjort Fouriren vid Westmanlands Regemente Hr *F. W. E. Möller.*

I anseende till det vid Höstterminens början betydligt ökade lärjungeantalet beslöt Collegium, att med stöd af nådiga Circulärbrefvet den 20 Mars 1858 hos H. H. Eforus anmäla behofvet af ännu en lärares anställande vid Läroverket. Kongl. Maj:t, hos hvilken underdånig framställning härom gjorts, har i nåd. skrifvelse till H. H. Eforus af den 29 September 1865 förklarat sig icke hafva funnit skäl till denna framställning lemna nådigt bifall.

Undervisningen var under Höstterminen på följande sätt fördelad emellan Lärarne:

Undertecknad Rektor: Latin i klass. VII	14	t:r	i veckan.
Lektorn, R. N. O., L. K. V. A., Phil. Dokt. *E. G. Björling:* Mathematik i VII, VI$_2$.*), VI$_1$. *r.**) . .	20	„	„
Lektorn, Prosten *L. Westerlund:* Christendom i VII—V$_2$.; Hebreiska	15	„	„
Lektorn, Ph. Dokt. *J. S. Löfberg:* Historia och Geografi i VII, VI *k.*, VI$_2$. *r.*	16	„	„
Lektorn, Ph. Dokt. *C. H. Johanson:* Naturvetenskap i VII, VI, V$_2$. *k.*	20	„	„

*) 2.=högre, 1.=lägre afdelningen, *k.*=klassiska linien, *r.*=reallinien.

Lektorn, Ph. Dokt. *D. A. Sundén:* Filosofi i VII$_2$.; Svenska i VII—V . .	17 t:r i veckan.
v. Lektorn, Ph. Dokt. *C. A. Hvasser:* Grekiska i VII—VI	22 „ „
v. Lektorn, Ph. Cand. *R. Afzelius:* Franska i VII, VI$_2$. *k.*; Engelska i VII—VI; Tyska i VI—V$_2$. . .	21½ „ „
Adjunkten, Kon-Rektor *D. Olauson:* Latin i VI	16 „ „
Adjunkten, Phil. Dokt. *H. E. Lyrberg:* Christendom i V$_1$.—II; Latin i IV; morgonbönerna med dithörande bibelförklaring	32 „ „
Adjunkten *S. H. Rathsman:* Franska i VI$_2$. *r.* VI$_1$.—IV; Tyska i V$_1$.; Kalligrafi i IV	26½ „ „
Adjunkten, Ph. Dokt. *F. J. L. Wulff:* Mathematik i VI$_1$. *k.*, V, IV *k.*	27 „ „
Adjunkten, Ph. Dokt. *P. A. Peterson:* alla ämnen i II utom Christendom, Kalligrafi och Teckning; Svenska i IV; Tyska i IV . . .	28 „ „
Adjunkten, Ph. Dokt, *G. A. Westholm:* Latin i V$_1$., Hist. och Geogr. i VI$_1$. *r.* samt V	27 „ „
Adjunkten, Ph. Dokt. *C. J. Tengman:* Engelska i V—III; Latin i V$_2$.; Naturvetenskap i V *r.*; . . .	24 „ „
Adjunkten, Ph. Cand. *K. A. Stigman:* alla ämnen i I	30 „ „
v. Adjunkten *C. E. H. Kökeritz:* Grekiska i V; Mathemat. i IV *r.* samt III; Naturvet. i V$_1$., III samt *r.* i IV och III särskilda timmar	28 „ „
v. Adjunkten *J. A. Brandberg:* Latin i III; Svenska i III; Hist. och Geogr. i IV—III; Tyska i III; Naturvetenskap i IV	30 „ „
Musik-Direktören *J. G. Nordvall:* Musik och Sång i alla klasser . . .	10 „ „

Ritläraren *T. C. Körner*: Kalligrafi i III
och II; Teckning i alla klasser...10 t:r i veckan.
Gymnastikläraren, Kaptenen och Ridd. *S. Lidman*: Gymnastik och vapenföring i alla klasser . . . . 8 „ „

Under Vårterminen har Lektor *F. Gihl* haft Christendomsundervisningen i klass. VII—V1., och den undervisningsskyldighet, som under Höstterminen tillkom Stud. *Brandberg*, har under Vårterm. öfvertagits af v. Adjunkten Phil. Cand. *P. R. Billmanson*. Under samma tid har, såsom redan är nämndt, Kapten *Lidman* varit tillförordnad Ritlärare. I öfrigt hafva såväl läseordningen som fördelningen af undervisningen varit gällande under hela läseåret, med undantag dock för den redan omnämnda förändringen uti den dagliga undervisningstidens indelning.

Skriföfningarna hafva under läseåret handhafts:
de *Latinska* af Rektor för klass. VII; af Kon-Rektor *Olauson* för VI; af Adj. *Tengman* för V2.; af Adj. *Westholm* för V1.
de *Svenska* af Lektor *Sundén* för VII, VI r., V2.; af Lektorerna *Löfberg* och *Johanson* för VI2. k.; af Adj. *Wulff* för VI1.k.; af Adj. *Tengman* för V2. (jämte Lekt. *Sundén*); af v. Adj. *Kökeritz* för V1.
de *Franska* af v. Lektor *Afzelius* för VII.
de *Tyska* af v. Lektor *Afzelius* för VI; af v. Lektor *Hvasser* för V2.; af Adj. *Rathsman* för V1.; af Adj. *Peterson* för IV.

Klassföreståndare hafva under läseåret varit: för VII2. Lektor *Björling*; för VII1. Lektor *Johanson*; för VI2. Kon-Rektor *Olauson*; för VI1. v. Lektor *Hvasser*; för V2. Adj. *Rathsman*; för V1. Adj. *Wulff*; för IV Adj. *Lyrberg*; för III under Höstterm. v. Adj. *Brandberg*, under Vårterm. v. Adj. *Billmanson*; för II Adj. *Peterson*; för I Adj. *Stigman*. Den särskilda inspektionen öfver lärjungarne har varit fördelad emellan samtlige lärarne.

C. Lärjungarne.

Antalet utgjorde vid förra Vårterminens slut	262	
Under detta läseår hafva blifvit inskrifne:		
Höstterminen . . .	57	
Vårterminen . . .	3	322
Under läseåret afgångne	33	
Sålunda utgör antalet denna dag	289	322

Af dessa tillhöra 21 första klassen; 48 andra; 38 tredje; 36 fjerde; 34 femte, lägre afd.; 35 femte, högre afd.; 28 sjette, lägre afd.; 28 sjette, högre afd.; 16 sjunde, lägre afd.; 5 sjunde, högre afd. Realisternas antal är 39, hvaraf 5 tillhöra tredje klassen; 9 fjerde; 10 femte, lägre afd.; 10 femte, högre afd.; 3 sjette, lägre afd.; 2 sjette, högre afd. — 18 lärjungar hafva läst Latin utan Grekiska, 7 Hebreiska, 19 Engelska, ehuru tillhörande klassiska linien. Från klassiska till reala linien hafva under läseåret 2:ne lärjungar öfvergått, från reala till klassiska ingen.

Genom dödsfall har läroverket förlorat 4 flitige och välartade lärjungar, *J. G. T. Tillander*, död d. $^{19}/_{7}$ 1865, *N. M. Molin*, död d. $^{20}/_{10}$ 1865, *S. S. H. af Winklerfelt*, död d. $^{10}/_{11}$ 1865, och *J. V. Edman*, död d. $^{10}/_{3}$ 1866. Af dessa tillhörde *Tillander* klassen VI1., *Molin* I, *Winklerfelt* VI1. och *Edman* IV. Af de öfrige afgångne hafva 6 anmälts skola öfvergå till annat läroverk, 2 till krigs-akademien, 1 till postkontor, 1 till boktryckeri, 4 till handel, eller näringar, 2 till bruksyrket, 13 till andra yrken.

D. Skollokalen.

Med undantag af en fullständig reparation af samtliga gipstaken i läroverkshuset, hvilken under förliden sommar verkställdes, är i afseende på skollokalen ingenting anmärkningsvärdt att nu omnämna.

E. Undervisnings-materielen.

För den kemiska undervisningen hafva under detta läseår blifvit inköpta åtskilliga apparater, hvaraf läroverket förut var nästan helt och hållet i saknad. För den

Zoologiska undervisningen hafva blifvit inköpta skeletter af hund, katt, lekatt, råtta, igelkott, ormvråk.

Bland för Läroverkets medel inköpta böcker må nämnas: *Th. Mommsen:* Römische Geschichte; *Anthony Rich:* Illustrirtes Wörterbuch der Römischen Alterthümer; *A. Schnitzlein:* Iconographia familiarum natural. regni vegetabilis, Heft. XVIII; *S. Ribbing:* Antropologi 6 ex.; *Lindblad:* Dansk läsebok 10 ex.; *Drysén:* Franska skriföfningar 6 ex.

Följande gåfvor till Bibliotheket och samlingarna får jag med tacksamhet omnämna: från *Kongl. Ecclesiastikdepartementet: A. Frigell:* C. Julii Cæsaris de bello Gallico libri septem cum libro octavo *a. Hirth.* Vol. I. II. III.; *Brunius:* Gotlands konsthistoria, första delen; *Rietz:* Ordbok öfver Svenska Allmogespråket, häft. I—V; en samling Program från Danska och Norska läroverk; — från *Kongl. Svenska Akademien:* Dess för 1865 preglade minnespenning; — från Herrar Fullmägtige i Jernkontoret genom Herr Bergshauptmannen och Riddaren *P. N. Sevén* i Sala: en samling af 150 stuffer Svenska bergarter med åsatta etiketter; — från *Smithsonian Institution* i Washington: *Contributions to Knowledge,* Vol. XIV, 1865; *Annual Report* 1863; — från *Westmanlands och Dala Nation i Upsala:* Universitets-trycket för läseåret 1864—65; — från Hr *Boktryckaren A. F. Bergh* och från *Boktryckeri-Aktie-Bolaget:* allt Westerås-tryck för år 1865; — från *Professoren och Bibliothekarien m. m. J. H. Schröders* Sterbhus enligt den aflidnes testamente: *Dio Cassius:* Ed. Reimarus, Vol. 1 in fol.; *Dictionnaire de Trevoux,* Voll. 7 in fol.; *Stephanus Byzantinus,* De Urbibus, Vol. 1 in fol.; *Jöcher,* Gelehrten-Lexicon, Voll. 4 in qv.; *Svenska Minnesskrifter* ifrån 1744—1853, Voll. 24 in 8:o; Supplement Voll. 5 in qv. & 8:o; *Likpredikningar,* äldre, Voll. 22 in qv.; *Programmata Upsal.* 1668—1857, Voll. 4 samt en kapsel; *Program. Lund.* 1669—1852, Voll. 3; *Varia* (Progr. etc.), en kapsel; *Finska programmer* 1667—1851, Voll. 2; *Catalogi prælect. Upsal.* 1678—1852, *Lundens.* 1762—1851, Voll. 2; *Aboëns.* 1755—1851; *Diverse programmer* (Westerås m. fl.), Voll. 2, *Westerås Consistorii Circulairer* ifrån 1737, Voll. 3 och 1 bundt; *Den Norske Rigs Tidende* 1815—21; *Svenska Biet* 1841—44; *Argus* 1821—31; *Aftonbladet* 1831—33, 35; *Med-*

borgaren 1830, 31; *Heimdall* 1831, 32; *Granskaren* 1826—30; *Officiella underrättelser om kriget* 1813—14 (ur diverse Tidningar); *Åbo Tidningar* 1798, 1800, 01, 03, 13; *Samlaren* 1829, 30, 36; *Conversationsbladet* 1826—28; *Skandinavbladet* 1833; *Kometen* 1825—27; *Strengnäs Veckoblad* 1826—28; *Göteborgs-Posten* 1814, 15; *Göteborgs Dagblad* 1834—36; *Skånska Correspondenten* 1833—36; *Norrlands Tidningar* 1835—37, 42; *Elegant Tidning* 1810; *Nya Skandinaven* 1812, 13; *Westerås Tidningar* 1813; Äldre, sällsyntare Tidningsblad till complettering; — från f. d. Statsrådet m. m. *F. O. Silfverstolpe:* En högst dyrbar samling af omkring 11,000 porträtter, graverade i sten och koppar, hvaribland flera af hög ålder och stort värde; — från *Westerås Gille:* en Basviol samt en samling musikalier; — af Stud. *C. W. Fahlcrantz:* en *Haliotis;* — af Stud. *L. Westerlund:* en mindre samling hafssnäckor och några äldre mynt.

Dessutom får jag med tacksamhet omnämna följande gåfvor till läroverket:

Från Hr Öfverstelöjtnanten och Riddaren *V. Edman:* en Stipendiifond af 4,000 rdr rmt enligt följande gåfvobref:

Till Rektorn vid högre Elementarläroverket i Westerås Filosofie Doktorn Höglärde Hr *A. L. Mossberg!*

Den dag, då det för Fäderneslandets väl vigtiga beslutet, om antagande af Kongl. Majestäts Nådiga förslag till ny Riksdags-Ordning, vann sin fulländning, eller den 8:de December 1865, kommer, jag vågar hoppas det, att hädanefter räknas till en af Svenska folkets käraste feste-dagar. Om ock mången varm fosterlandsvän hyst farhågor och betänkligheter i afseende på den pånyttfödelse Svenska Folket genom ofvannämnde beslut genomgått, är jag dock förvissad om, att alla goda Medborgare ej allenast förena sig i glädjen öfver ett lyckligt och utan blodsutgjutelse vunnet slut på den sorgliga Ståndssplittringen, utan ock af innersta hjerta önska och hoppas, att Svenska Folket, hädanefter *odeladt*, måtte med gemensamma krafter verka för det kära Fosterlandets ära och sjelfständighet. — Då vilkoret härför utan tvifvel är en mera spridd upplysning och bildning hos den jordbrukande befolkningen, som genom den nya sakernas ordning fått sig anförtrodt det största inflytandet vid afgörandet af de vigtigaste samhällsfrågor, bör det ligga hvarje medborgare om hjertat, att, hvar och en i sin mon, sätta den mindre bemedlade i tillfälle, att vinna de kunskaper, som äro nödvändiga, för att med klar och oförvillad blick kunna uppfatta och bedömma Statens angelägenheter. För att i min ringa mon verka till detta afsevärda mål, får jag härmedelst till Eder, Herr Rector! öfverlemna Fyra Tusen (4000) Riksdaler Riksmynt, med ödmjuk anhållan, att detta kapital, afsedt att bilda en Stipendii-Fond vid Högre Elementarläroverket i Westerås, måtte af Läroverkets Styrelse vårdas, emot real-säkerhet förräntas, och den årliga afkomsten deraf, hvarje år på den minnesvärda dagen den 8:de December, utdelas till lika belopp åt Fyra vid nämnde Läroverk studerande, mindre bemedlade, ynglingar af den jordbrukande befolkningen inom Westmanlands Län, hvilka utmärkt sig för godt uppförande samt flit och håg för nyttiga kunskapers inhemtande.

Svanå den 8 December 1865.

V. Edman.

Från Sällskapet "*Karlsbröderna*": 200 Rdr Rmt, som genom Hr Faktor *A. G. Lidbeck* å Sällskapets vägnar blifvit till Rektor öfverlemnade, "för att af Lärare-Collegium vid slutet af Vårterminen detta år såsom 2:ne stipendier, hvartdera å 100 Rdr, tilldelas tvänne behöfvande, för flit och uppförande fördelaktigt utmärkte ynglingar uti 6:te eller 7:de klasserna af högre Elementarläroverket."

Då vid förra årsberättelsens utgifvande tiden för den då förestående muntliga afgångsexamen vid Läroverket icke var känd, må här omnämnas, att denna examen egde rum den 29 och 30 Maj 1865 med 8 af Läroverkets lärjungar: *J. E. Brodin, C. V. Modin, O. E. Björling, G. E. Sundqvist, J. A. Brandberg, J. C. A. Pousette, C. G. Edman, E. C. von Unge*, hvilka samtlige blefvo mogne förklarade. Såsom Censorer fungerade: Professorn vid Upsala Universitet, Theol. Cand. *C. A. Hultcrantz* och Professorn vid Kongl. Vetenskaps-Akademien, Riddaren af Kongl. Nordstjerneorden och S:t Olofsorden *D. G. Lindhagen.*

Den skriftliga examen med samtlige lärjungarne i läroverkets högsta afdelning, 5 till antalet, som i stadgad ordning anmält sig till afgångsexamen under innevarande Vårtermin, egde enligt föreskrift rum den 18, 20, 21 och 23 nästlidne April. Den muntliga examen kommer att börjas den 7 instundande Juni.

Årsexamen med Läroverkets samtliga klasser kommer att hållas *Måndagen den 4 Juni* kl. 8—10, 11—½2, hvarefter omedelbart följer slutöfning i Sång på stora lärosalen. Sedan derefter flyttningen klasserna emellan, äfvensom de belöningar och understöd, som blifvit lärjungar tillerkända, offentligen gifvits tillkänna, kommer ungdomen att af H. H. Eforus hemförlofvas.

Uppvisning i Gymnastik sker *Lördagen den 2 Juni* kl. 5 e. m.

Att Läroverkets Eforus, Biskopen och Commendören med stora Korset af Kongl. Nordstjerne-Orden, En af de Aderton i Svenska Akademien m. m. Högvördigste Hr Doktor C. E. FAHLCRANTZ mätte täckas genom sin närvaro gifva åt ofvannämnda Läroverkets offentliga förrättningar ökad vigt och betydelse, derom anhåller jag härmed vördsammast. Med samma vördsamma anhållan vänder jag mig äfven till de män, hvilka H. H. Eforus anmodat att såsom ledare och vittnen vid examen tillstädesvara: Länets Höfding, R. N. O., Herr Grefve FR. CRONSTEDT, Domprosten, L. N. O., Herr Doktor C. O. BJÖRLING, Landssekreteraren, Ph. Dokt. Herr N. C. E. TREFFENBERG, Landskamreraren, R. N. O., Herr C. M. SELLING, f. d. Landssekreteraren, R. N. O., Ph. Dokt. Herr A. W. AHLBORG, f. d. Landt-Räntmästaren, R. W. O., Herr F. A. ALM, Borgmästaren Hr E. W. ABENIUS, Lasarettsläkaren Hr Doktor J. F. CLARÉUS, Prosten, L. W. O., Ph. Dokt. Hr L. E. BOBERG, Prosten, Ph. Dokt. Hr C. F. WALL, Häradshöfdingen Hr G. BERGMANSON, Brukspatronen Ph. Dokt. Hr J. WAHLSTRÖM; och skall räkna det för en heder och en glädje för Läroverket att vid samma tillfällen få se rätt talrikt närvarande ungdomens Föräldrar, Anhörige och Målsmän, samt öfrige Vetenskapernas och den offentliga undervisningens Gynnare och Vänner.

Westerås den 26 Maj 1866.

Ludvig Mossberg.

II. Lägre Elementarläroverket i Sala.

(Uppgift af Rektor, Mag. J. G. Westman.)

A. Undervisningen.

Höstterminen började den 30 Augusti och slutade den 19 December; Vårterminen började den 18 Januari och kommer att afslutas den 6 Juni.

Tiden för den dagliga undervisningen har varit kl. 7—9 och 10—12 förmiddagarne samt kl. 3—5 Måndags-, Tisdags-, Thorsdag- och Fredagseftermiddagar.

Första och andra klassernas lärjungar, med 2 lästimmar mindre än 3:dje klassens, hafva varit lediga kl. 7—9 Thorsdagar. Fjerdedels-timmen, hvarje morgon, före kl. 7 har blifvit använd till bön och bibelläsning. — Gymnastiköfningarne hafva försiggått kl. 12—½1 hvarje dag; öfningarne i Ritning och Sång hafva hållits, de förre kl. 2—3 Onsdags- och Lördagseftermiddagar, de sednare kl. 3—4 samma eftermiddagar.

Af de förda anteckningarne visar det sig, att vid härvarande läroverk hemlexor under detta år börjat gifvas först i 3:dje klassen och till någon dag icke i flera läroämnen än 2:ne.

Den tid, som på detta hemarbete behöft användas, kan icke någon dag för någon lärjunge beräknas högre än 1 timme.

Beträffande omfånget af undervisningen, får jag hänvisa till här bifogade klasskurser. Då vid detta läroverk icke obetydliga svårigheter skulle uppstå, om inom hvardera af de 2:ne nedersta klasserna undervisningen skulle meddelas af en enda lärare, dels emedan i sådant fall endast *en* lärare blefve öfrig för 3:dje klassen, hvilken likväl fordrar serskild lärare för realisterne under de timmar de öfrige läsa latin äfvensom en lärare de timmar, Rector från undervisningsskyldighet är befriad, dels emedan här finnas äldre lärare, hvilka en lång följd af år varit vana vid ämnesläsning; så torde man kunna få antaga, att sådana omständigheter här äro för handen, hvilka 16:de § af Läroverksstadgan afser. — Genom att vissa timmar sammanslå de begge nedersta klasserna med gemensamt meddelad undervisning, har det blifvit möjligt att, med det antal lärare som finnes, uppehålla undervisningen på 3:dje klassens begge linier.

B. Lärarne.

Undervisnings-skyldigheten har varit fördelad på följande sätt:

Rector har undervisat: i Christendom 3 timmar, i Mathematik 3, i Svenska 8, i Historia och Geografi 10, — tillsammans 24 timmar hvarje vecka.

Collega *J. G. Arpi:* i Latin 10 timmar, i Christendom 6, i Mathematik 8, i Kalligrafi 4, — tillsammans 28 timmar.

Collega, Mag. *P. E. Wallstersson:* i Mathematik 7 timmar, i Naturvetenskap 5, i Tyska 13, i Engelska 3, — tillsammans 28 timmar.

Skriföfningarne hafva försiggått på lärorummet och rättats af läraren i ämnet.

Cantor, Rådman *J. F. Löfdahl* har undervisat i Sång 2 timmar i veckan.

T. f. Gymnastiklär. Löjtnant *F. Aminoff:* i Gymnastik 3 timmar.

T. f. Ritlärarinnan Demoiselle *A. Lindfeldt:* i Ritning 2 timmar.

Collega *Arpi* har varit Klassföreståndare för 1:a klass.
Collega *Wallstersson* - - - för 2:a "
Rector - - - - - - för 3:e "

C. Lärjungarne.

Under sommarferierna afgingo 8, af hvilka 5 öfvergått till högre Elementarläroverk; vid höstterminens början inskrefvos 6; antalet var den terminen 40.

Sedan vid vårterminens början 3 blifvit inskrifna, är antalet denna termin 43.

D. Skol-lokalen.

Det nya läroverkshuset kommer under innevarande år att inredas och afputsas.

Under detta läseår har den gamla lokalen oförändrad varit begagnad.

E. Undervisnings-materielen.

Ifrån Statsverket, genom Consistorii-expeditionen, har Läroverket fått emottaga: *Rydqvist* Sv. språkets lagar, 3:dje delen, 5 ex., deraf 4 till præmier; *J. Cæsar*, de bello gallico, 3 delar, ed. *Frigell*, 1 ex.; *Rietz*, Sv. allmoge-språket, 5 häften, 1 ex.; samt *Statistiska Central-Byråns* underdåniga berättelse för 1862, 1 häfte.

Den tillökning, som genom inköp tillkommit, består förnämligast i diverse ritetuder.

F. Examina.

Hösttermins-examen hölls den 19 December; såsom ledare och vittnen voro dervid närvarande: Herr Bergshauptmannen och Riddaren Mag. *P. N. Sevén*, som under Herr Contractsprosten *J. E. Fants* vistande vid riksdagen haft H. H. Ephori förordnande att vara Läroverkets Inspector, Herr Kyrkoherden *C. C. Lindborg* och Herr Comministern, v. Pastorn *G. E. Borgman*.

Offentlig års-examen kommer att hållas den 6 instundande Juni.

Sala den 7 Maj 1866.

Klasskurser för Elementarläroverket i Sala.

Christendom.

Klassen I. — Biblisk Hist.: Gamla Testamentets, efter Hybner. — Första hufvudstycket af Katechesen. — Valda Bibelspråk och Psalmer.

Kl. II. — Bibl. Hist.: Nya Testamentets. — Andra hufvudstyck. af Katechesen. — Valda Bibelspråk och Psalmer.

Kl. III. — Bibl. Hist.: repetition. — 3:dje, 4:de och 5:te hufvudstyck. af Katechesen. — Valda Bibelspråk och Psalmer.

Historia och Geografi.

Kl. I. — Geografi: Sveriges, Norriges och Danmarks politiska efter Palmblads Lärobok.

Kl. II. — Historia: till Wasa-ätten efter Ekelunds mindre sammandrag jemte lämplig Läsebok. — Geografi: Rysslands och Englands politiska.

Kl. III. — Historia: till Frihetstiden jemte lämplig Läsebok. — Geografi större delen af Europas politiska.

Mathematik.

Kl. I. — Arithmetik: Hela tal. — Öfning i hufvudräkning. — Lineartekning efter Ekman.

Kl. II. — Arithm.: Sorträkning. — Öfning i hufvudräkning. — Lineartekning.

Kl. III. — Arithm.: Sorträkning. Bråk samt enkel Regula-de-tri. — Geometri: Euklides Bok. I, utom bevisen för theoremerna.

Real-linien dessutom: Sammansatt Regula-de-tri, jemte serskilda praktiska öfningar i Arithmetik.

Naturvetenskap.

Kl. I. — Fysiska Geografien Allmän kännedom om Verldsdelarne samt det vigtigaste af Europas fysiska geografi efter Palmblad.

Kl. II. — Fysisk Geografi: det allmännaste af Globläran och de främmande Verdsdelarnes fysiska Geografi. — Botanik: Arrhenius, botanikens första grunder, det med gröfre stil tryckta. Insamling af 50 Vextarter.

Kl. III. — Fysiska Geografien afslutad och repeterad. — Botanik: Arrhenius, botanikens första grunder, fullständigt med begagnande af plancherna i Anderssons och Thedenii Skol-botanik. Insamling af 50 Vextarter.

Real-linien dessutom: det vigtigaste af 1:sta, 2:dra, 6:te och 7:de kap. af Agardhs Naturkunnighetens första grunder.

Svenska Språket.

Kl. I — Redogörelse för Ordklasserna och Satsdelarne efter 1:sta och 2:dra kap. af J. I. Brodéns lärobok. — Uppläsning af valda stycken ur Hist. Läsebok, med redogörelse för innehållet. — Rättstafningsöfningar.

Kl. II. — Brodéns lärobok: 1:sta, 2:dra och 3:dje kap. fullständigare. Det nödvändigaste af afdeln. 1 och 2 i 4:de kap. Uppläsning af valda stycken. — Satsöfningar och Skriföfningar.

Kl. III. — Läseöfningar. — Repetition af det lästa i Brodéns lärobok med fortsatta Satsöfningar. — Skriföfningar.

Tyska.

Kl. I. — Svedboms Elementarkurs 32 "Fabeln". — Det vigtigaste af formläran efter Stahls lärobok.

Kl. II. — Svedboms Elementarkurs 32 "Fabeln" och några "kurze Erzählungen". — Det vigtigaste af formläran efter Stahls lärobok.

Kl. III. — Svedboms Elementarkurs fullständigt samt styck. 1—15 af samme författares större Läsebok. — Formläran utförligare.

Engelska.

Kl. III. — Uttalsläran efter Olde. Explikation: Öhrlanders lärobok 15 sidor jemte nödig Grammatik.

Latin.

Kl. III. — Läseöfningar, efter Rabe, i förening med extemporerade Satsöfningar. Det vigtigaste af Formläran och Syntaxen. Cornelius Nep. de första "fältherrarne".

III. Lägre Elementarläroverket i Arboga.

(Uppgift af Rector, Mag. L. H. Afzelius.)

Undervisningen.

Höstterminen började den 29 Augusti och afslutades den 18 December; Vårterminen började den 20 Januari och kommer att afslutas den 8 inst. Juni.

En 4:de Lärare, hvars aflöning bekostas af enskilda personer, har fortfarande varit anställd vid Läroverket, så att undervisningen för öfra afdelningen af 3:dje klassen kunnat utsträckas till 4:de klassens läroämnen och lärokurser. Läsetimmarna hafva varit förlagda till förmiddagarna kl. 8—10 samt 12—3 e. m., och dessutom för 3:dje klassens båda afdelningar till kl. 5—6 e. m.: Måndagar och Thorsdagar för klassiska linien, Tisdagar och Fredagar för real-linien. Öfningarna i Sång, 2:ne timmar i veckan, samt i Ritning, 2:ne timmar, hafva varit förlagda till eftermiddagarna. Öfningarna i Gymnastik och Exercis, 3:ne timmar, hafva varit förlagda, dels till eftermiddagarna, dels ock, sedan det till följd af lärjungarnes ökade antal befanns nödigt att i afseende på gymnastikundervisningen fördela lärjungarne i 2:ne afdelningar, under vissa dagar i veckan till 1:sta halftimmen efter morgonlektionernas slut.

Hvad det hemarbete beträffar, som blifvit de särskilda klasserna ålagdt, har detsamma sträckts så långt ned, som nåd. Läroverksstadgan tillåter. Alltså hafva först i klasserna ofvanom den 1:sta dagliga hemlexor gifvits: för 2:dra klassen i allmänhet i 2:ne ämnen — några dagar i veckan blott i ett —; för 3:dje klassens nedra afdelning i allmänhet i 2:ne ämnen, för 3:dje klassens öfra afdelnings real-linie i allmänhet i 2:ne ämnen och för samma afdelninsg klassiska linie i allmänhet i 3:ne ämnen. Några skriftliga hemarbeten hafva icke varit lärjungarne ålagde. — Med undantag för 2:dra klassen, der lärjungarne haft sig ålagdt, att, sedan ett stycke i Tyska läseboken förut blifvit under lärarens ledning på lärorummet väl genomgånget, hemma repetera detsamma, för att nästa lektionstimme kunna detsamma öfversätta, har all explikation af de resp. språken skett på lärorummet, och deruti inga hemlexor behöft gifvas. Den tid, som hemlexorna sålunda kunnat anses upptaga för lärjungar af medelmåttiga anlag, har varit: för 3:dje klassens öfra afdelning $1\frac{1}{2}$ à 2 timmar dagligen; för 3:dje klassens nedra afdelning samt 2:dra klassen 1 à $1\frac{1}{2}$ timma.

Undervisningen har varit fördelad mellan Lärarne på följande sätt:

Rector: Kristendom i klass. III, 2 timmar; Latin i kl. III, 8 tim.; Engelska och Tyska i kl. III; Franska i kl. III, öfra afdeln.; Svenska i kl. III och i II, 2 tim. — tillsammans 24 tim. i veckan;

Kollega *O. Olsson:* alla ämnen i klass. I, tillsammans 30 timmar;

Vik. Kollega *Arosin:* Naturvetenskap samt Historia och Geografi i kl. III och II; Kristendom i kl. II; Svenska i kl. II, 2 tim.; Välskrifning i kl. III och II; tillsammans 28 timmar;

Extra-läraren *Sundell:* Matematik i kl. III och II; Latin i kl. III, 4 tim.; Bibl. Hist. i kl. III, 1 tim.; Tyska i kl. II; tillsammans 28 timmar.

Den sistnämnde har dessutom biträdt Rector vid de Latinska skriföfningarna.

Under läseåret hafva följande lärostycken blifvit genomgångna:

Första klassen.

Kristendom: Biblisk Hist., Gamla Testamentets, efter Åkerblom. — Första hufvudstycket af Katechesen. — Utanläsning af några valda psalmer.

Modersmålet: Efter Brodéns lärobok, Kap. 1—3 till den aktiva böjningen, det vigtigaste af sats- och formläran, med satsanalys och muntliga rättstafningsöfningar. — Uppläsning af valda stycken ur historisk läsebok med redogörelse för innehållet af det lästa.

Tyska: Svedboms Elementarkurs, 25 af fablerna. — Formlära, det vigtigaste af läran om substantiver, adjektiver och pronomina, efter Hjort.
Mathematik: Arithm. de 4 räknesätten i hela tal. — Öfning i hufvudräkning. — Lineartecknning.
Naturvetenskap: Allmän kännedom om verldsdelarna samt det vigtigaste af Europas fysiska Geografi, efter Palmblad.
Historia och Geografi: Sveriges, Norges och Danmark polit. Geografi.

Andra klassen.

Kristendom: Biblisk Hist., Nya Testamentets. — 1—3 hufvudst. af Katechesen. — Utanläsning af valda psalmer.
Modersmålet: Brodéns lärobok, 1—3 Kap., fullständigare. — Satsanalys; skriftliga rättstafningsöfningar.
Tyska: Svedboms Elementarkurs, fablerna, samt några af "Kurze Erzählungen." — Formlära efter Hjort, det vigtigaste.
Mathematik: Arithm. Bråk (vanliga och Decimalbråk), samt sorters fördelning och reduktion. — Öfning i hufvudräkning. — Linearteckning.
Naturvetenskap: Botanik, Anderssons Inledning till Botaniken, 1 Häft., (med tillhjelp af Anderssons Botaniska väggtaflor), det vigtigaste om växtorganernas former. — Insamling af 30 växtarter. — Fysisk Geografi: Europas, Asiens och Afrikas.
Historia och Geografi: Fäderneslandets Historia till Gustaf II Adolf efefter Ekelund. — Geografi: Europas politiska till Preussen, efter Palmblad.

Tredje klassen.

Nedra Afdelningen:

Kristendom: Biblisk Hist. repet. — 4—5 hufvudst. af Katechesen och repet. — Utanläsning af valda psalmer.
Modersmålet: Brodéns lärobok, repet. af det förut genomgångna; Kap. 4, det nödvändigaste; af Kap. 5 Rättstafnings- och Interpunktionsläran; dertill hörande Skriföfningar. — Realliniens särskilda timmar hafva uteslutande varit egnade åt Skriföfningar.
Latin: Rabe's lärobok, det vigtigaste af formläran, samt 1—3 afdeln. af läseboken.
Tyska; Formläran utförligare; Svedboms större läsebok, styck. 1—23.
Engelska: Enbloms lärobok, Uttalsläran, Läseboken sidd. 1—20 med undantag af styck. 19, 20; Grammatik muntligt meddelad.
Mathematik: Arithmetik: Sorträkning och enkel Regula-de-tri, åtskilliga lärjungar äfven sammansatt Regula-de tri. — Geometri: Euklides, Bok. 1 till propos. 27.
Naturvetenskap: Botanik: Anderssons Inledning till Botaniken, 1 häft., med ledning af Anderssons Botan. Väggtaflor, samt in-

samlade 75 växtarter. — Zoologi: Sundevalls lärobok, t. o. m. läran om däggdjuren 4:de ordningen (Real-linien). — Fysisk Geografi: alla verldsdelarnas.

Historia och Geografi: Fäderneslandets Historia till Frihetstiden. — Geografi: Europas politiska till Spanien.

Öfra Afdelningen:

Kristendom: Lika med nedra afdelningen; Katekisation.

Modersmålet: Lika med nedra afdelningen, men fullständigare. Realliniens särskilda timme uteslutande använd till Skriföfn.

Latin: Cornel. Nepos; Themistocles, Miltiades, Aristides, Cimon; Formläran fullständigare; Casusläran det vigtigaste.

Tyska: Svedboms st. läsebok, styck. 1—50; Formläran fullständigare; af Syntaxen det nödvändigaste. — Real-linien har på den särskilda timmen sysselsats med lättare lokutions-öfningar.

Engelska: Enbloms lärobok; Läseboken, styck. 1—31; Formläran det vigtigaste.

Franska: Oldes lärobok, det vigtigaste af formläran till de irreguliera Verberna; Läsebokens 1:sta afdeln. styck. 1—42.

Mathematik: Arithmetik: enkel och sammansatt Regula-de-tri. — Geom.: Euklides, Bok. 1—2. — Algebra: Björlings, till Kap. om negativa qvantiteter. — Real-linien dessutom särskilda praktiska öfningar i Arithmetik, t. o. m. Bolagsräkning.

Naturvetenskap: Botanik: Anderssons Inledn. till Botaniken, 1 häft. — Insamling af 150 växtarter. — Zoologi: till och med läran om däggdjuren. — Fysisk Geografi, alla verldsdelarnes.

Historia och Geografi: Fäderneslandets Historia afslutad. — Europas politiska Geografi afslutad; grunddragen af de öfriga verldsdelarnes Geografi.

Lärarne.

Sedan förra årsberättelsen afgafs, har läroverket erhållit en ny Ordinarie Lärare i Kaptenen vid K. Westmanlands Regemente, Herr *C. B. T. Wolffram*, hvilken, af ren välvilja för läroverket, mot slutet af förra läseåret sökte den lediga Gymnastiklärare-befattningen, och derpå erhöll fullmakt den 26 Maj 1865. Öfrige Ordinarie lärare äro: undertecknad Rektor, Kollega, Phil. Cand. *O. Olsson*, samt Sånglärare, Musikdirektören *J. G. Wahlström*. Dessutom hafva under hela läseåret tjenstgjort: Studeranden *S. J. Arosin* såsom Vik. Kollega och Studeranden *L. T. Sundell* såsom Extra-lärare, samt under Vårterminen Telegrafkommissarien *A. H. L. Björklund* såsom Vik. Ritlärare. Såsom biträdande Instruktör i Gymnastik och Exercis har Furiren vid K. Westmanlands Reg:te Hr *E. M. Eklund* fortfarande varit anställd.

Rektor har varit klassföreståndare för 3:dje klassens öfra afdelning; Extra-läraren *Sundell* för nedra afdeln. af samma klass; Vik. Kollega *Arosin* för 2:dra och Kollega *Olsson* för 1:sta klassen.

Lärjungarne.

Vid förra redogörelsens afgifvande var lärjungarnes antal 75. Af dessa afgingo dock, straxt före terminens slut, 2 af 2:dra klassens lärjungar, den ene till landtmannayrket, den andra till handel, och var således antalet vid förra Vårterminens afslutande 73. Då efter läseårets slut af 3:dje klassens öfra afdelning de 2:ne enda, som anmält sig vilja vid Högre Läroverk fortsätta sina studier, på giltiga skäl begärde få vid läroverket qvarstadna ytterligare ett år, blef deras antal, som ifrån nämnda klass lemnade läroverket, blott 5, af hvilka afgingo: 2 till bruksrörelse, 2 till landtbruk, 1 för att ingå i krigsståndet; från de lägre klasserna afgingo 3, neml. 1 från 2:dra klass. med afgångsbetyg till 2:dra klass. af Clara Elementarläroverk, 1 från 1:sta klass. till Strengnäs H. Elementarläroverk, 2:dra klass., 1 utan anmälan. Höstterminen inskrefvos 21 lärjungar, 3 i 2:dra klass., 18 i 1:sta. Antalet således under denna termin 86, deraf under terminen afgingo: 1 från 3:dje klass. nedra afdeln. till Örebro H. Elementarläroverk, 3:dje klass., samt 3 från öfra afdeln., 1 till följd af omöjligheten att längre kunna sig vid läroverket uppehålla, de andre utan föregången anmälan. Vid Vårterminens början återkom en af dessa sistnämnda, afgick 1 från 3:dje klass., för att ingå i handel, samt inskrefvos 3 i 1:sta klass., hvadan antalet för närvarande utgör 85, deraf 10 i 3:dje klass. öfra afdeln., 23 i 3:dje klass. nedra afdeln,. 28 i 2:dra och 24 i 1:sta klassen. Af 3:dje klass. öfra afdeln. hafva 6 lärjungar läst Latin; de 2:ne ofvannämnda, som förut tillbragt ett år i denna afdeln. och således läst Grekiska, hafva på särskilda timmar fått undervisning i detta språk för att underhålla hvad de deruti förut inhämtat. Af nedra afdelningens lärjungar hafva 8 läst Latin, sedan en lärjunge vid läseårets början öfvergått från klassiska linien till den reala.

Skol-lokalen.

Sedan förra årsberättelsen afgafs, har, hvad sjelfva läroverkshuset beträffar, den i samma årsberättelse omnämnda förändringen af rummen i nedra våningen till en del försiggått, så att derstädes erhållits 2:ne vackra klassrum, hvilka under läseåret varit upplåtna åt 1:sta klassen. — Det nya Gymnastikhuset, som lofvar blifva utmärkt vackert och ändamålsenligt, är till det yttre i det närmaste färdigt, och arbetas nu på inredningen med all flit, så att man har skäl hoppas, att detsamma skall till nästa termin blifva färdigt till begagnande. Gårdsplatsen, hvilken på södra sidan förut var sumpig, blef förlidne höst grunddikad, och har nämnda olägenhet visat sig derigenom fullkomligt afhjelpt.

Undervisnings-materielen.

För läroverkets egna medel hafva under året blifvit inköpte: Fristedt, Sveriges Pharm. Växter, 1—4; ett Tellurium; fortsättning af Anderssons Botaniska väggtaflor; några väggkartor samt en trumma.

Från Consistorium har läroverket fått emottaga: Rydqvist, Sv. språkets lagar, 3:e delen; Frigell, Cæsaris de bello gallico libri septem, 3 delar; Rietz, Sv. Allmogespråket, 5 häften; Anvisningar och råd till lärare samt en samling af läroverkens årsberättelser.

Genom gåfvor af några stadsbor har den lilla samlingen af uppstoppade foglar blifvit tillökad.

Examina.

Höstterminens examen hölls den 18 December, dervid såsom ledare och vittnen voro närvarande: Inspector Scholæ, Herr Kontraktsprosten Ph. Dokt. *H. J. Robson;* Herr Öfverste-Löjtnanten och Riddaren *O. Bergenstråle;* Herr Prosten och Kyrkoherden Ph. Dokt. *N. O. Törnblom;* Ordföranden bland Stadsfullmäktige, Herr Brukspatronen *C. Stenberg* samt Stads- och Bataljonsläkaren Herr Med. Dokt. *N. A. Sparrman.* Den offentliga årsexamen är af H. H. Ephorus utsatt att hållas den 8 inst. Juni.

Arboga den 7 Maj 1866.

IV. Stadspedagogien i Köping.

(Uppgift af Rektor, Mag. M. Barkén.)

A. Undervisningen.

Höstterminen började detta läseår den 23 Augusti och slutades den 18 December. Vårterminen började den 23 Januari och kommer att afslutas den 4 Juni.

I afseende på den dagliga undervisningstidens indelning, hafva lärotimmarna varit desamma som under flera föregående år, nemligen kl. 7—9 och 10—1. Måndags och Fredagseftermiddagar kl. 3—4 har ungdomen öfvats i Sång samt Tisdags- och Thorsdagseftermiddagar kl. 5—6 uti Gymnastik, hvilken öfning måst förläggas till denna timma, emedan skolan fortfarande saknar gymnastiklokal och derföre måste för denna öfning begagna en af stadens folkskolesalar, hvilken först vid den tiden är ledig. En timma i veckan hafva de ibland ungdomen, hvilka sådant önskat, under Vårterminen erhållit undervisning i Violinspelning af Sångläraren och de äldste likaledes en timma i veckan af t. f. Gymnastikläraren blifvit öfvade i florettföring.

De uti 1:sta klassen genomgångna lärokurserna hafva varit hufvudsakligen desamma, som i Kongl. Maj:ts nådiga Skolestadga finnas föreskrifna. Uti Rektorsklassen, som af en del lärjungar begagnas 1—5 år, måste undervisningen till följe deraf till omfånget lämpas efter lärjungarnes ålder och olika framsteg. Så hafva 6 erhållit undervisning uti Engelska språket och 5 på särskilda timmar om eftermiddagarna uti det Latinska.

Läroböckerna äro i allmänhet desamma som vid läroverket i Westerås.

B. Lärarne.

Rektor och Kollega hafva undervisat inom hvar sin klass, dock har Kollega *Bellander* bestridt undervisningen i Engelska språket 3 timmar i veckan. Under dessa timmar har Kollega-klassen af Rektor undervisats i Arithmetik tillsammans med de yngre lärjungarne inom Rektors-klassen, hvika icke läst Engelska.

Undervisning i Sång har meddelats af Ordinarie Läraren *F. A. Hyckerström* och Gymnastiköfningarna varit ledda af Löjtnanten vid Nerikes regimente *R. Schenström*, hvilken ifrån medlet af Oktober dertill varit förordnad, sedan ingen i allo kompetent sökande anmält sig till denna befattning.

C. Lärjungarne.

Vid förra läseårets slut utgjorde lärjungarnes antal			40
Vid Höstterminens början inskrefvos . .	8		
„ Vårterminens „ „ . .	9	17	57
Deremot afgingo vid Höstterminens början	11		
och vid Vårterminens början	2	13	
Af dessa hafva 3 öfvergått till andra läroverk; de andra till handel, näringar och landtbruk.			
Närvarande antalet i Rektorsklassen . .	21		
„ „ Kollegaklassen . .	23	44	57

D. Skollokalen.

Härvid har under året ingen förändring egt rum; men sedan skolan nu fått lärare i Gymnastik, blir det alldeles oundgängligt att med första erhålla särskild gymnastiklokal.

E. Undervisnings-materielen.

Af Skolkassans medel hafva blifvit inköpta: ett Tellurium, *Bromme's* Atlas till djurrikets naturalhistoria, fortsättning af *Åkerlund*, Svenska foglar, samt åtskilliga lexica, läse- och läroböcker, hvilka af medellösa lärjungar fått begagnas såsom lån, dessutom några Floretter och behöfliga trägevär. Genom Consistorii-expeditionen har skolan fått emottaga *Rietz'*, Ordbok öfver Svenska Allmogespråket I—V, *Olai Petri* Krönika m. m. samt åtskilliga läroverks årsberättelser, dock långt ifrån allas.

Af Handlanden *J. A. Ericson* i Köping har skolan erhållit ett nytt Skarpskyttegevär af Wredeska modellen.

F. Examina.

Höstterminens examen hölls den 18 December under ledning af Skolans Inspektor, Prosten, L. N. O. Th. Dokt. *O. R. Bellander* och Kommminister *J. G. Stenman*. Denna termins offentliga examen är utsatt att hållas den 4 Juni.

Köping den 8 Maj 1866.

V. Stadspedagogien i Nora.

(Uppgift af Rektor E. **Brandberg**.)

Undervisningen.

Läseårets hösttermin, som tog sin början den 28 Aug., fortgick till den 18 December; Vårterminen började den 22 Januari och kommer att afslutas den 9 Juni.

De flesta lärotimmarne hafva likasom förlidet år varit förlagda på förmiddagarne, nemligen fyra dagar i veckan kl. 7—9 och 10—1 och de öfriga tvenne kl. 7—9 och 10—12, samt dessutom Måndagar och Thorsdagar kl. 4—5. Under den kalla och mörka årstiden har likväl en halftimmes framflyttning egt rum. Undervisning i sång har meddelats Tisdagar kl. 3—4 och Lördagar kl. 12—1 samt i Gymnastik Måndagar kl. 12—1, Onsdagar och Fredagar kl. 4—5.

De antagna läroböckerne äro ungefär desamma, som de uti 4 nedre klasserne af Örebro Elementarläroverk begagnade; och, liksom vid detta sednare, har under året *Lyths* lärobok i Tyska språket blifvit utbytt mot *Hjorts*. Under detta läseår, såsom under alla föregående ifrån pedagogiens utvidgning till tvåklassiskt läroverk, har hvardera klassen varit fördelad i hufvudsakligen tvänne afdelningar eller läslag. I följd häraf hafva nedra klassens lärokurser ungefärligen motsvarat 1:a och 2:a klassens, och de i öfra klassens lägre afdelning genomgångna kurser den 3:dje klassens af nyssnämnda Elem.-läroverk. Åt de lärjungar, som icke ämna fortsätta sina studier vid högre läroverk, utan qvarstanna ännu ett eller annat år i öfra klassen, har undervisning blifvit meddelad till det omfång, som deras ålder, flit och fallenhet medgifvit.

De serskilda lärotimmarne hafva varit fördelade på följande sätt: Rektor har undervisat i Kristendom 8 timmar, i Tyska 6, i

Historia och Geografi 9, i Kalligrafi 4 och i Engelska 3, tillsammans 30; t. f. Kollegan *O. A. Nilsson*: i Svenska språket 10, i Naturvetenskap 6, i Mathematik 14, tillsammans 30 timmar. Rättandet af lärjungarnes skriftliga uppsatser har varit fördeladt mellan lärarne.

Enär under året blott 3 lärjungar i öfre klassen anmält sig till läsning af Latin, hafva inga serskilda timmar deråt varit anslagna, utan hafva de deruti af t. f. Kollegan blifvit undervisade på de 5 räknetimmarne.

Lärarne.

Någon förändring med lärarepersonalen har ej under året egt rum, utan hafva samma ordinare och t. f. lärare som under det föregående året tjenstgjort. Rektor har varit föreståndare för öfra och t. f. Kollegan för nedra klassen.

Lärjungarnes

antal utgjorde vid vårterminens afslutning förl. år 34, af hvilka före läseårets början 10 lemnade läroverket. Bland dessa afgick 1 till Örebro Elem.-läroverk (4 kl.), 3 antogo Bruksbetjentsplatser och de öfriga 6 ingingo i näringarne eller Bergsbruksyrket. Under Höstterminen inskrefvos 6, hvadan antalet då utgjorde 30. Under vinterferierna afgick 1 till Örebro Elem.-läroverk; och enär under innevarande Vårtermin ingen blifvit inskrifven, deremot en hoppfull yngling i nedra klassen på morgonen af denna dag fallit offer för den här gängse skarlakansfebern, utgör lärjungeantalet f. n. blott 28, eller 14 i hvardera klassen.

Skollokalen.

Någon åtgärd till afhjelpande af den i föregående årens uppgifter omnämnda fuktigheten i skolrummen har ännu icke blifvit vidtagen. Men alldenstund genom Drätselkammarens försorg en architekt nyligen blifvit anmodad att uppgöra ritning till Gymnastikhus och ny Skol-lokal, och detta ärende i Juni lärer förekomma till öfverläggning och afgörande på allmän Rådstufva; har man all anledning att hoppas, det byggnadsarbetet med första sättes i verket. Måtte ock Stadens innevånare, vid fullbordandet af detta kostsamma, men för dem hedrande byggnadsföretag, och isynnerhet vid uppförandet af ett nytt lärohus, i främsta rummet afse detsammas *ändamålsenlighet*!

Undervisnings-materielen.

För skolkassans medel hafva under året blifvit inköpta: Ett Orgelharmonium med 2 spel, 4 register och 5 oktaver, att begagnas vid sångöfningarne, söndagsgudstjensterne och bönstunderne; 25 st. trägevär med bajonetter och beslag m. m.; Åtskilliga läroböcker och en årgång af Emanuelsons Predikningar öfver de nya texterna. Från Statsverket har Skolan genom Consistorii-expeditionen erhållit 5 häften af *Rietz' Ordbok öfver Svenska Allmogespråket*, och af Skolungdomen diverse svenska och utländska mynt.

Stipendier.

Ej mindre än tvenne prof af välvilja har skolan under året fått röna: 1:o i det framlidne Komministern i Julita Församling af Strengnäs Stift *P. U. Norén*, genom testamente af d. 18 April 1859, ihågkommit detsamma med ett penningebelopp, som, efter i fjol verkställd utredning af hans sterbhus, befanns utgöra 130 Rdr, hvaraf årliga räntan skall tillfalla någon medellös, för flit och sedlighet väl vitsordad, lärjunge af stadens Borgareklass; 2:o i det Bruksegaren och Handlanden i staden *O. Forsell*, till minne af Representationsfrågans lyckliga utgång, genom gåfvobref af den 8 December 1865 till pedagogien donerat en Stipendiifond af 500 Rdr, hvaraf äfven årliga räntan skall tilldelas *en* eller högst *tvänne* medellösa samt för flit och godt uppförande utmärkta lärungar. Välsignelse öfver den aflidne välgörarens stoft, och en varm, vördnadsfull tacksägelse å lärares och lärjungars vägnar åt den ännu lefvande!

Examina.

Hösttermins-examen hölls d. 18 December, dervid såsom ledare vittnen voro närvarande: Skolans Inspektor, Kontraktsprosten *Bohm*; Borgmästaren *C. J. Watz* och Provincial-läkaren, Kongl. Lif-Medicus, Dokt. *L. Engström*. Dagen för Wårtermins-examen är bestämd till den 9 Juni.

Nora den 9 Maj 1866.

VI. Stadspedagogien i Linde.

(Uppgift af Rektor, Mag. E. J. Tägtström.)

A. Undervisningen.

Höstterminen började den 24 Aug. och slutade den 15 Dec.; Vårterminen öppnades den 22 Jan. Tiden för densammas afslutande är ännu ej bestämd. Undervisningstiden har, i likhet med hvad förut egt rum, varit förlagd dels på förmiddagarne så, att läsningarne efter förrättad morgonbön och bibelläsning begynt kl. 8 och fortgått till 9 $^1/_2$, samt sedan från kl. 10 till kl. 12 (Onsdagar och Lördagar till 12 $^1/_2$); dels på Måndags-, Tisdags-, Thorsdags- och Fredagseftermiddagar kl. 3—5 (under den mörkare årstiden 2—4). Af Läroböcker begagnas desamma som i Örebro Högre Elementarläroverk.

Undervisningen i Gymnastik och Exercis har fortfarande blifvit bestridd af Veterinär-läkaren *J. A. Åkerman.*

B. Lärarne.

Undertecknad är fortfarande Pedagogiens ende lärare.

C. Lärjungarne.

Deras antal var Hötterminen 22 och är nu under Vårterminen 28.

D. Skollokalen.

Oförändrad.

E. Undervisnings-materielen.

Sex stycken trägevär till begagnande af Skolans medellöse ynglingar hafva under årets lopp för Skolkassans egna medel blifvit inköpta.

F. Examina.

Hösttermins-Examen hölls i närvaro af Kontrakts-Prosten, L. N. O., *C. D. Arosenius* den 15 Dec.; tiden för Vårterminens afslutande är ännu ej bestämd.

Lindesberg i Maj 1866.