Danskernes Historie Online
Danske Slægtsforskeres Bibliotek

Dette værk er downloadet fra Danskernes Historie Online

Danskernes Historie Online er Danmarks største digitaliseringsprojekt af litteratur inden for emner som personalhistorie, lokalhistorie og slægtsforskning. Biblioteket hører under den almennyttige forening Danske Slægtsforskere. Vi bevarer vores fælles kulturarv, digitaliserer den og stiller den til rådighed for alle interesserede.

Støt Danskernes Historie Online - Bliv sponsor
Som sponsor i biblioteket opnår du en række fordele. Læs mere om fordele og sponsorat her: https://slaegtsbibliotek.dk/sponsorat

Ophavsret
Biblioteket indeholder værker både med og uden ophavsret. For værker, som er omfattet af ophavsret, må PDF-filen kun benyttes til personligt brug.

Links
Slægtsforskernes Bibliotek: https://slaegtsbibliotek.dk
Danske Slægtsforskere: https://slaegt.dk

Summations-Formler

for den uendelige Række

$$\frac{a}{b(b+c)}+\frac{a}{(b+2c)\,(b+3c)}+\frac{a}{(b+4c)\,(b+5c)}+\frac{a}{(b+6c)\,(b+7c)}+\ldots\ldots$$

samt for nogle andre af lignende Form.

Indbydelses-Skrift

til den offentlige Examen

i

Sorøe-Academies Skole

af

O. V. Nielsen,

Lector i Mathematik ved Academiet.

Kjøbenhavn.

Trykt hos Directeur Jens Hostrup Schultz,

Kongelig og Universitets-Bogtrykker.

1825.

Nykjöbing Cathedralskole

Nærværende Afhandling er en Omarbeidelse og Udvidelse af Forfatterens, til det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab indsendte, Besvarelse af den for Aaret 1813 fremsatte mathematiske Priis-Opgave, hvilken til Selskabets Tilfredshed blev opløst af Hr. Professor Schrader i Tübingen. Omendskjøndt nu denne Forfatter senere har udgivet sit kronede Priis-Skrift (Commentatio de summatione seriei $\frac{a}{b(b+d)}+\frac{a}{(b+2d)(b+3d)}+\frac{a}{(b+4d)(b+5d)}\ldots\ldots$ Auctore *Eduardo Schradero*. Vimariæ 1818) haaber jeg dog, det ikke vil være Mathematikens Yndere ukjært, her at finde samme Æmne behandlet paa en anden Maade og dette saa meget mere som min Afhandling indeholder Summeringen af nogle flere uendelige Rækker end den i Spørgsmaalet involverede, ligesom det ogsaa vil befindes, at den af mig angivne Tilnærmelses-Methode hurtigere fører til Maalet end den af Hr. Professor Schrader bestemte. Endnu maa jeg tilføie at den første af mine Opløsnings-Methoder her fremtræder langt fuldstændigere end den var, da den tilsendtes Videnskabernes Selskabet, hvorimod den anden næsten er bleven aldeles uforandret.

Første Opløsnings-Methode.

§. 1.

Da $\frac{a}{b(b+c)}=\frac{a}{c}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b+c}\right)$; $\frac{a}{(b+2c)(b+3c)}=\frac{a}{c}\left(\frac{1}{b+2c}-\frac{1}{b+3c}\right)$; $\frac{a}{(b+4c)(b+5c)}=\frac{a}{c}\left(\frac{1}{b+4c}-\frac{1}{b+5c}\right)$; o. s. v., bliver den uendelige Række $\frac{a}{b(b+c)}+\frac{a}{(b+2c)(b+3c)}+\frac{a}{(b+4c)(b+5c)}+\ldots\ldots=\frac{a}{c}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+2c}-\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{b+4c}-\frac{1}{b+5c}\ldots\ldots\right)$. Sættes nu Summen af den første Række $=S$ og af den sidste $=s$, er $S=\frac{a}{c}.\ s$.

I Rækken s afvexlede Tegnene $+$ og $-$. For det Følgendes Skyld ville vi ogsaa betragte de Rækker, hvis Led alle ere positive og sætte Summen $= {}'s$ saaledes at

$${}'s=\frac{1}{b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{b+4c}+\frac{1}{b+5c}\ldots\ldots$$

Indtil videre antages at b og c ere hele, positive og indbyrdes udelelige Tal, samt at $b - 1 < c$.

§. 2.

Rækkerne s og $'s$ kunne henføres til disse almindeligere: $\frac{x^b}{b} \mp \frac{x^{b+c}}{b+c} + \frac{x^{b+2c}}{b+2c} \mp \frac{x^{b+3c}}{b+3c} \ldots\ldots$ Da nu, i Følge Integral-Regningen, $\frac{x}{b} = \int x^{b-1}\,dx$; $\frac{x^{b+c}}{b+c} = \int x^{b+c-1}\,dx$; o. s. v., findes heraf $s = \int (x^{b-1} - x^{b+c-1} + x^{b+2c-1} - x^{b+3c-1} \ldots\ldots)\,dx = \int \frac{x^{b-1}\,dx}{1+x^c}$ og $'s = \int (x^{b-1} + x^{b+c-1} + x^{b+2c-1} + x^{b+3c-1} \ldots\ldots)\,dx = \int \frac{x^{b-1}\,dx}{1-x^c}$.

Begge disse Differentialer findes integrerede hos Euler i hans: Institutiones calculi integralis, 1ste Deel, Side 45-51, og jeg behøvede derfor kun at henvise dertil; men med Hensyn til den Anvendelse, vi her gjøre af disse Integraler, anseer jeg følgende Udvikling mere passende.

§. 3.

Dersom en vilkaarlig Cirkel-Bue sættes $= \varphi$ og Radien $= 1$, da er, som bekjendt, $(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^c = \cos c\varphi + \sin c\varphi\sqrt{-1}$; altsaa omvendt $\sqrt[c]{\cos c\varphi + \sin c\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}$ eller, naar vi antage $c\varphi = \psi$, $\sqrt[c]{\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1}} = \cos\frac{1}{c}\psi + \sin\frac{1}{c}\psi\sqrt{-1}$. Nu har enhver Rod saa mange Værdier som Rod-Exponenten har Enheder, vor Rod-Størrelse følgeligen c Værdier. Og virkeligen indeholdes alle Rodderne til $\sqrt[c]{\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1}}$ i dette almindelige Udtryk: $\cos\frac{1}{c}(\psi + m\,.\,360^\circ) + \sin\frac{1}{c}(\psi + m\,.\,360^\circ)\sqrt{-1}$, hvori m enten er Nul eller ethvert heelt Tal, som er mindre c. Rigtigheden heraf kan saaledes bevises: efter det Foregaaende er $(\cos\frac{1}{c}(\psi + m\,.\,360^\circ) + \sin\frac{1}{c}(\psi + m\,.\,360^\circ)\sqrt{-1})^c = \cos(\psi + m\,.\,360^\circ) + \sin(\psi + m\,.\,360^\circ)\sqrt{-1}$. Er nu $m = 0$ eller et heelt Tal, da er $\cos(\psi + m\,.\,360^\circ) = \cos\psi$ og $\sin(\psi + m\,.\,360^\circ) = \sin\psi$, hvoraf følger at $(\cos\frac{1}{c}(\psi + m\,.\,360^\circ)$

$+\sin\frac{1}{c}(\psi+m\,.\,360^{\circ})\sqrt{-1})^{c}=\cos\psi+\sin\psi\sqrt{-1}$ og omvendt $\sqrt[c]{\cos\psi+\sin\psi\sqrt{-1}}$ $=\cos\frac{1}{c}(\psi+m\,.\,360^{\circ})+\sin\frac{1}{c}(\psi+m\,.\,360^{\circ})\sqrt{-1}$. I dette Udtryk sættes for m efterhaanden 0; 1; 2; 3; 4; .... indtil det Tal, der er 1 mindre end c. Satte vi $m=c$ eller $m>c$, fremkom derved dog ikke andre end de allerede bestemte Rødder.

§. 4.

Af den i foregaaende Paragraph angivne Formel, kunne vi nu betjene os for at bestemme Rødderne saavel af den positive som af den negative Eenhed. Af den sidste ville vi først udvikle dem og sætte derfor $\psi=180^{\circ}$, hvoraf følger at $\cos\psi=-1$ og $\sin\psi=0$. Værdierne af $\sqrt[c]{-1}$ blive følgeligen, naar vi sætte $\frac{1}{c}\,.\,180^{\circ}=p$, disse: $\cos p+\sin p\sqrt{-1}$; $\cos 3p+\sin 3p\sqrt{-1}$; $\cos 5p+\sin 5p\sqrt{-1}$; indtil den sidste Rod, som bliver: $\cos(2c-1)p+\sin(2c-1)p\sqrt{-1}$. Nu er i Almindelighed $\cos np+\sin np\sqrt{-1}=(\cos p+\sin p\sqrt{-1})^{n}$; sættes derfor $\cos p+\sin p\sqrt{-1}=a$, da blive Rødderne til $\sqrt[c]{-1}$ følgende: a; a^{3}; a^{5}...... a^{2c-5}; a^{2c-3}; a^{2c-1}. Men da $a^{2c}=1$, bliver $a^{2c-5}=a^{-5}$; $a^{2c-3}=a^{-3}$ og $a^{2c-1}=a^{-1}$ og vi kunne derfor ogsaa udtrykke Rødderne til $\sqrt[c]{-1}$ paa denne Maade: a; a^{3}; a^{5};....... a^{-5}; a^{-3}; a^{-1}. Er c et ulige Tal, bliver den midterste Rod $=a^{\pm c}=-1$.

Endnu kan erindres at $a^{-1}=\frac{1}{a}=\frac{1}{\cos p+\sin p\sqrt{-1}}=\cos p-\sin p\sqrt{-1}$; $a^{-3}=\frac{1}{a^{3}}=\frac{1}{\cos 3p+\sin 3p\sqrt{-1}}=\cos 3p-\sin 3p\sqrt{-1}$; o. s. v.

§. 5.

Antages $\psi=360^{\circ}$, da er $\cos\psi=1$ og $\sin\psi=0$. Deraf findes, ved efterhaanden for m at sætte 0; 1; 2; 3; 4;.... indtil $c-1$ og ved tillige at antage $\frac{1}{c}\,.\,360^{\circ}=q$, Rødderne til $\sqrt[c]{1}$ at være følgende: $\cos q+\sin q\sqrt{-1}$; $\cos 2q+\sin 2q\sqrt{-1}$; $\cos 3q+\sin 3q\sqrt{-1}$;...... indtil den sidste Rod, som bliver $\cos cq+\sin cq\sqrt{-1}=\cos 360^{\circ}+\sin 360^{\circ}\sqrt{-1}=1$. Sættes $\cos q+\sin q\sqrt{-1}=b$, bliver $\cos 2q+\sin 2q\sqrt{-1}=b^{2}$; $\cos 3q+\sin 3q\sqrt{-1}=b^{3}$; o. s. v. og Rødderne til $\sqrt[c]{1}$ ere derfor b; b^{2}; b^{3};..... b^{c-3}; b^{c-2}; b^{c-1} og $b^{c}=1$. Da nu i

Almindelighed $b^{c-n} = b^c . b^{-n} = b^{-n}$, kunne Rødderne til $\sqrt[c]{1}$ ogsaa udtrykkes saaledes: b; b^2; b^3; ...... b^{-3}; b^{-2}; b^{-1} og 1.

Er c et lige Tal, bliver een af Brøkerne $\frac{1}{c}$; $\frac{2}{c}$; $\frac{3}{c}$; ...... $= \frac{1}{2}$ og den dertil svarende Værdie af $\sqrt[c]{1}$ bliver da $\cos 180° + \sin 180° \sqrt{-1} = -1$, hvilken Rod vil falde midt imellem b og b^{-1}.

Ogsaa her er $b^{-1} = \cos q - \sin q \sqrt{-1}$; $b^{-2} = \cos 2q - \sin 2q \sqrt{-1}$; $b^{-3} = \cos 3q - \sin 3q \sqrt{-1}$; o. s. v.

I Øvrigt er, som let sees, $q = 2p$ og $b = a^2$, naar c har samme Værdie i dem.

§. 6.

Af §. 4 følger, at Factorerne til $1 + x^c$ ere: $-a + x$; $-a^3 + x$; $-a^5 + x$; ......; $-a^{-5} + x$; $-a^{-3} + x$; $-a^{-1} + x$; det er $(-a + x)(-a^3 + x)(-a^5 + x) \ldots\ldots (-a^{-5} + x)(-a^{-3} + x)(-a^{-1} + x) = 1 + x^c$. Men $a^{-1} . a^{-3} . a^{-5} \ldots\ldots a^5 . a^3 . a = \pm 1$, nemlig $+1$ naar c er et lige og -1 naar det er et ulige Tal, hvoraf følger, at $-a^{-1} . -a^{-3} . -a^{-5} \ldots\ldots -a^5 . -a^3 . -a$ i alle Tilfælde er $= 1$. Multipliceres hermed den nyligen angivne Ligning, findes:

$$(1 - a^{-1}x)(1 - a^{-3}x)(1 - a^{-5}x) \ldots\ldots (1 - a^5 x)(1 - a^3 x)(1 - ax) = 1 + x^c.$$

Nu er:

$$\frac{1}{1 - a^{-1}x} = \frac{(1 + x^c):(1 - a^{-1}x)}{1 + x^c} = \frac{1 + a^{-1}x + a^{-2}x^2 \ldots\ldots + a^{-(c-1)}x^{c-1}}{1 + x^c}$$

$$\frac{1}{1 - a^{-3}x} = \frac{(1 + x^c):(1 - a^{-3}x)}{1 + x^c} = \frac{1 + a^{-3}x + a^{-6}x^2 \ldots\ldots + a^{-3(c-1)}x^{c-1}}{1 + x^c}$$

$$\frac{1}{1 - a^{-5}x} = \frac{(1 + x^c):(1 - a^{-5}x)}{1 + x^c} = \frac{1 + a^{-5}x + a^{-10}x^2 \ldots\ldots + a^{-5(c-1)}x^{c-1}}{1 + x^c}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{1}{1 - a^5 x} = \frac{(1 + x^c):(1 - a^5 x)}{1 + x^c} = \frac{1 + a^5 x + a^{10}x^2 \ldots\ldots + a^{5(c-1)}x^{c-1}}{1 + x^c}$$

$$\frac{1}{1 - a^3 x} = \frac{(1 + x^c):(1 - a^3 x)}{1 + x^c} = \frac{1 + a^3 x + a^6 x^2 \ldots\ldots + a^{3(c-1)}x^{c-1}}{1 + x^c}$$

$$\frac{1}{1 - ax} = \frac{(1 + x^c):(1 - ax)}{1 + x^c} = \frac{1 + ax + a^2 x^2 \ldots\ldots + a^{c-1}x^{c-1}}{1 + x^c}$$

Men da $a^c + 1 = 0$, er, i Følge Ligningernes bekjendte Egenskaber, ikke allene $a + a^3 + a^5 \ldots\ldots + a^{-5} + a^{-3} + a^{-1} = 0$, men ogsaa i Almindelighed $a^m + a^{3m} + a^{5m} \ldots\ldots + a^{-5m} + a^{-3m} + a^{-m} = 0$, forudsat at m hverken er Nul, c eller et Multiplum af c. Anvendes dette paa Ovenstaaende, findes $\frac{1}{1-a^{-1}x} + \frac{1}{1-a^{-3}x} + \frac{1}{1-a^{-5}x} \ldots\ldots + \frac{1}{1-a^5 x} + \frac{1}{1-a^3 x} + \frac{1}{1-ax} = \frac{c}{1+x^c}$, hvoraf $\frac{1}{1+x^c} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{1-a^{-1}x} + \frac{1}{1-a^{-3}x} + \frac{1}{1-a^{-5}x} \ldots\ldots + \frac{1}{1-a^5 x} + \frac{1}{1-a^3 x} + \frac{1}{1-ax}\right)$ og $\frac{x^{b-1}}{1+x^c} = \frac{1}{c}\left(\frac{x^{b-1}}{1-a^{-1}x} + \frac{x^{b-1}}{1-a^{-3}x} + \frac{x^{b-1}}{1-a^{-5}x} \ldots\ldots + \frac{x^{b-1}}{1-a^5 x} + \frac{x^{b-1}}{1-a^3 x} + \frac{x^{b-1}}{1-ax}\right)$.

Videre er:

$$\frac{x^{b-1}}{1-a^{-1}x} = -\,a\,x^{b-2} - a^2 x^{b-3} - a^3 x^{b-4} \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{a^{b-1}}{1-a^{-1}x}$$

$$\frac{x^{b-1}}{1-a^{-3}x} = -\,a^3 x^{b-2} - a^6 x^{b-3} - a^9 x^{b-4} \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{a^{3(b-1)}}{1-a^{-3}x}$$

$$\frac{x^{b-1}}{1-a^{-5}x} = -\,a^5 x^{b-2} - a^{10} x^{b-3} - a^{15} x^{b-4} \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{a^{5(b-1)}}{1-a^{-5}x}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{x^{b-1}}{1-a^5 x} = -\,a^{-5} x^{b-2} - a^{-10} x^{b-3} - a^{-15} x^{b-4} \ldots\ldots + \frac{a^{-5(b-1)}}{1-a^5 x}$$

$$\frac{x^{b-1}}{1-a^3 x} = -\,a^{-3} x^{b-2} - a^{-6} x^{b-3} - a^{-9} x^{b-4} \ldots\ldots + \frac{a^{-3(b-1)}}{1-a^3 x}$$

$$\frac{x^{b-1}}{1-ax} = -\,a^{-1} x^{b-2} - a^{-2} x^{b-3} - a^{-3} x^{b-4} \ldots\ldots + \frac{a^{-(b-1)}}{1-ax}$$

Følgeligen bliver $\frac{x^{b-1}}{1-a^{-1}x} + \frac{x^{b-1}}{1-a^{-3}x} + \frac{x^{b-1}}{1-a^{-5}x} \ldots\ldots + \frac{x^{b-1}}{1-a^5 x} + \frac{x^{b-1}}{1-a^3 x} + \frac{x^{b-1}}{1-ax} = \frac{a^{b-1}}{1-a^{-1}x} + \frac{a^{3(b-1)}}{1-a^{-3}x} + \frac{a^{5(b-1)}}{1-a^{-5}x} \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{a^{-5(b-1)}}{1-a^5 x} + \frac{a^{-3(b-1)}}{1-a^3 x} + \frac{a^{-(b-1)}}{1-ax}$, hvoraf igjen udledes $\frac{x^{b-1}}{1+x^c} =$

$\frac{1}{c}\left(\frac{a^{b-1}}{1-a^{-1}x}+\frac{a^{3(b-1)}}{1-a^{-3}x}+\frac{a^{5(b-1)}}{1-a^{-5}x}\ldots\ldots+\frac{a^{-5(b-1)}}{1-a^{5}x}+\frac{a^{-3(b-1)}}{1-a^{3}x}+\frac{a^{-(b-1)}}{1-ax}\right)$; altsaa tillige $s=\int\frac{x^{b-1}dx}{1+x^c}=\frac{1}{c}\int\left(\frac{a^{b-1}}{1-a^{-1}x}+\frac{a^{3(b-1)}}{1-a^{-3}x}+\frac{a^{5(b-1)}}{1-a^{-5}x}\ldots\ldots+\frac{a^{-5(b-1)}}{1-a^{5}x}+\frac{a^{-3(b-1)}}{1-a^{3}x}+\frac{a^{-(b-1)}}{1-ax}\right)dx$.

Nu er i Almindelighed $\int\frac{Adx}{B+Cx}=\frac{A}{C}L(B+Cx)$, hvor L betegner den naturlige Logarithme og A, B samt C ere bestandige Størrelser. Anvendes dette paa ovenstaaende Differential, findes $s=\int\frac{x^{b-1}dx}{1+x^c}=-\frac{1}{c}(a^bL(1-a^{-1}x)+a^{3b}L(1-a^{-3}x)+a^{5b}L(1-a^{-5}x)\ldots\ldots+a^{-5b}L(1-a^5x)+a^{-3b}L(1-a^3x)+a^{-b}L(1-ax))$ og da saavel dette Integral, som den uendelige Række, hvis Sum det angiver, forsvinde naar $x=0$, er den Bestandige selv $=0$.

I den først opgivne Række s er $x=1$, som indsat giver os $s=-\frac{1}{c}(a^b L(1-a^{-1})+a^{3b}L(1-a^{-3})+a^{5b}L(1-a^{-5})\ldots\ldots+a^{-5b}L(1-a^5)+a^{-3b}L(1-a^3)+a^{-b}L(1-a))$, hvilket Udtryk indeholder c Led.

§. 7.

Af de i foregaaende Paragraph angivne Logarithme-Størrelser kunne to og to paa denne Maade forbindes med hverandre: $a^bL(1-a^{-1})+a^{-b}L(1-a)=\frac{1}{2}(a^b+a^{-b})(L(1-a^{-1})+L(1-a))+\frac{1}{2}(a^b-a^{-b})(L(1-a^{-1})-L(1-a))=\frac{1}{2}(a^b+a^{-b})L(2-a-a^{-1})+\frac{1}{2}(a^b-a^{-b})L\frac{1-a^{-1}}{1-a}$. Men i Almindelighed er $L(2-a^m-a^{-m})=L(-a^{\frac{1}{2}m}\sqrt{-1}+a^{-\frac{1}{2}m}\sqrt{-1})^2=L(2\sin\frac{1}{2}mp)^2=2L2\sin\frac{1}{2}mp$ og ligeledes er $L\frac{1-a^{-n}}{1-a^n}=L-a^{-n}=La^{c-n}=(c-n)La$. Derfor bliver $a^bL(1-a^{-1})+a^{-b}L(1-a)=(a^b+a^{-b})L2\sin\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}(c-1)(a^b-a^{-b})La$. Paa samme Maade findes $a^{3b}L(1-a^{-3})+a^{-3b}L(1-a^3)=(a^{3b}+a^{-3b})L2\sin\frac{3}{2}p+\frac{1}{2}(c-3)(a^{3b}-a^{-3b})La$; $a^{5b}L(1-a^{-5})+a^{-5b}L(1-a^5)=(a^{5b}+a^{-5b})L2\sin\frac{5}{2}p+\frac{1}{2}(c-5)(a^{5b}-a^{-5b})La$; o. s. v. Sættes nu $(a^b+a^{-b})L2\sin\frac{1}{2}p+(a^{3b}+a^{-3b})L2\sin\frac{3}{2}p+(a^{5b}+a^{-5b})L2\sin\frac{5}{2}p+\ldots\ldots=\mathfrak{A}$ og $\frac{1}{2}(c-1)(a^b-a^{-b})La+\frac{1}{2}(c-3)(a^{3b}-a^{-3b})La+\frac{1}{2}(c-5)(a^{5b}-a^{-5b})La\ldots\ldots=\mathfrak{B}$, findes

$s = -\frac{1}{c}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})$, hvor Intet videre er at tilføie hvis c er et lige Tal, og da bestaaer $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$ hvert af $\frac{1}{2}c$ Led. Er derimod c ulige, bliver den mellemste af Logarithme-Størrelserne denne: $\mathfrak{a}^{\pm bc} L(1-\mathfrak{a}^{\pm c}) = (-1)^b L2 = \pm L2$, hvor $+L2$ gjelder naar b er et lige og $-L2$ naar det er et ulige Tal. I dette Tilfælde bliver $s = -\frac{1}{c}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B} \pm L2)$ og saavel $\mathfrak{A}$ som $\mathfrak{B}$ bestaaer da af $\frac{c-1}{2}$ Led.

Heraf følger, at naar $c=1$, forsvinde baade $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$, og da b i dette Tilfælde kun kan have Værdien 1, bliver $s = L2$, hvilket er indlysende af sig selv.

§. 8.

Da $L\,2\sin\frac{1}{2}p = L\,2 + L\sin\frac{1}{2}p$; $L\,2\sin\frac{3}{2}p = L\,2 + L\sin\frac{3}{2}p$; o. s. v., bliver $\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}^{b} + \mathfrak{a}^{-b} + \mathfrak{a}^{3b} + \mathfrak{a}^{-3b} + \mathfrak{a}^{5b} + \mathfrak{a}^{-5b} \ldots\ldots)\,L\,2 + (\mathfrak{a}^{b}+\mathfrak{a}^{-b})\,L\sin\frac{1}{2}p + (\mathfrak{a}^{3b}+\mathfrak{a}^{-3b})\,L\sin\frac{3}{2}p + (\mathfrak{a}^{5b}+\mathfrak{a}^{-5b})\,L\sin\frac{5}{2}p \ldots\ldots$ Er nu c lige, forsvinder Coefficienten til $L\,2$; er c derimod ulige, bliver denne Coefficient ∓ 1, nemlig -1 naar b er lige og $+1$ naar b er ulige. Sættes derfor $(\mathfrak{a}^{b}+\mathfrak{a}^{-b})\,L\sin\frac{1}{2}p + (\mathfrak{a}^{3b}+\mathfrak{a}^{-3b})\,L\sin\frac{3}{2}p + (\mathfrak{a}^{5b}+\mathfrak{a}^{-5b})\,L\sin\frac{5}{2}p \ldots\ldots = {}'\mathfrak{A}$, bliver, hvis c er lige, $\mathfrak{A} = {}'\mathfrak{A}$, og, hvis c er ulige, $\mathfrak{A} = \mp L\,2 + {}'\mathfrak{A}$; altsaa i alle Tilfælde $s = -\frac{1}{c}({}'\mathfrak{A}+\mathfrak{B})$.

Da i Almindelighed $\mathfrak{a}^{e} + \mathfrak{a}^{-e} = 2\cos ep$, bliver ${}'\mathfrak{A} = 2\cos bp\,L\sin\frac{1}{2}p + 2\cos 3\,bp\,L\sin\frac{3}{2}p + 2\cos 5\,bp\,L\sin\frac{5}{2}p \ldots\ldots$, et Udtryk, der ikke, saavidt jeg skjønner, videre lader sig forkorte, naar c er et ulige Tal. Er derimod c lige, og b altsaa ulige, kan ${}'\mathfrak{A}$ betydelig sammendrages; thi da er ${}'\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}^{b}+\mathfrak{a}^{-b})\,L\sin\frac{1}{2}p + (\mathfrak{a}^{3b}+\mathfrak{a}^{-3b})\,L\sin\frac{3}{2}p + (\mathfrak{a}^{5b}+\mathfrak{a}^{-5b})\,L\sin\frac{5}{2}p \ldots\ldots + (\mathfrak{a}^{(c-5)b}+\mathfrak{a}^{-(c-5)b})\,L\sin\frac{c-5}{2}p + (\mathfrak{a}^{(c-3)b}+\mathfrak{a}^{-(c-3)b})\,L\sin\frac{c-3}{2}p + (\mathfrak{a}^{(c-1)b}+\mathfrak{a}^{-(c-1)b})\,L\sin\frac{c-1}{2}p)$. Nu er i Almindelighed $\mathfrak{a}^{\pm(c-m)b} = \mathfrak{a}^{\pm bc}.\,\mathfrak{a}^{\mp mb} = -\,\mathfrak{a}^{\mp mb}$ og $\sin\frac{c-n}{2}p = \sin(90^\circ - \frac{1}{2}np) = \cos\frac{1}{2}np$. Anvendes dette paa Ovenstaaende, findes ${}'\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}^{b}+\mathfrak{a}^{-b})\,L\sin\frac{1}{2}p + (\mathfrak{a}^{3b}+\mathfrak{a}^{-3b})\,L\sin\frac{3}{2}p + (\mathfrak{a}^{5b}+\mathfrak{a}^{-5b})\,L\sin\frac{5}{2}p \ldots\ldots - (\mathfrak{a}^{5b}+\mathfrak{a}^{-5b})\,L\cos\frac{5}{2}p - (\mathfrak{a}^{3b}+\mathfrak{a}^{-3b})\,L\cos\frac{3}{2}p - (\mathfrak{a}^{b}+\mathfrak{a}^{-b})\,L\cos\frac{1}{2}p = (\mathfrak{a}^{b}+\mathfrak{a}^{-b})\,L\frac{\sin\frac{1}{2}p}{\cos\frac{1}{2}p} + (\mathfrak{a}^{3b}+\mathfrak{a}^{-3b})\,L\frac{\sin\frac{3}{2}p}{\cos\frac{3}{2}p} + (\mathfrak{a}^{5b}+\mathfrak{a}^{-5b})\,L\frac{\sin\frac{5}{2}p}{\cos\frac{5}{2}p} \ldots\ldots\ldots = 2\,(\cos bp$

$L \tan \frac{1}{2} p + \cos 3bp \, L \tan \frac{3}{2} p + \cos 5bp \, L \tan \frac{5}{2} p \ldots\ldots)$, et Udtryk, som vi, for at adskille det fra det foregaaende, ville sætte $= {''}\mathfrak{A}$. I dette Tilfælde bliver altsaa $s = -\frac{1}{c}({''}\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$.

Herved er endnu at erindre, at dersom $\frac{1}{2}c$ er et lige Tal, vil ${''}\mathfrak{A}$ bestaae af $\frac{1}{4}c$ Led; er derimod $\frac{1}{2}c$ ulige, indeholder ${''}\mathfrak{A}$ kun $\frac{c-2}{4}$ Led; thi sættes $c = 2'c$ og $'c$ er et ulige Tal, bliver Coefficienten til det Led, som ligger midt imellem $(a^b + a^{-b}) \, L \sin \frac{1}{2} p$ og $(a^{(c-1)b} + a^{-(c-1)b}) \, L \sin \frac{c-1}{2} p$ (med hvilket derfor intet Led bliver at forbinde) følgende: $a^{b'c} + a^{-b'c}$. Men $a^{-b'c} = - a^{2b'c} \cdot a^{-b'c} = - a^{+b'c}$, altsaa $a^{b'c} + a^{-b'c} = a^{b'c} - a^{b'c} = 0$. Heraf følger, at naar $c = 2$, forsvinder ${''}\mathfrak{A}$ og s bliver da $= -\frac{1}{2}\mathfrak{B}$.

§. 9.

Hvad $\mathfrak{B}$ angaaer, da kan den i alle Tilfælde sammendrages til eet eneste Led. Efter §. 7 er nemlig $\mathfrak{B} = \frac{1}{2} L a \, ((c-1)(a^b - a^{-b}) + (c-3)(a^{3b} - a^{-3b}) + (c-5)(a^{5b} - a^{-5b}) \ldots\ldots)$ og derfor $-\frac{1}{c}\mathfrak{B} = -\frac{1}{2c} L a \, ((c-1)(a^b - a^{-b}) + (c-3)(a^{3b} - a^{-3b}) + (c-5)(a^{5b} - a^{-5b}) \ldots\ldots)$; men $-\frac{1}{2c} L a = \frac{1}{2c} L a^{-1} = \frac{c}{2c^2} L a^{-1} = \frac{1}{2c^2} L a^{-c} = \frac{1}{2c^2} L -1$, altsaa $-\frac{1}{c}\mathfrak{B} = \frac{1}{2c^2} L -1 \, ((c-1)(a^b - a^{-b}) + (c-3)(a^{3b} - a^{-3b}) + (c-5)(a^{5b} - a^{-5b}) \ldots\ldots)$.

Af Integral-Regningen vide vi dernæst, at $\int \frac{dx}{1+x^2} = Arc.\tan x$, men tillige er $\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{dx}{1 + x\sqrt{-1}} + \frac{dx}{1 - x\sqrt{-1}} \right) = -\frac{1}{2}\sqrt{-1} \, L(1 + x\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\sqrt{-1} \, L(1 - x\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\sqrt{-1} \, L \frac{1 - x\sqrt{-1}}{1 + x\sqrt{-1}}$. Følgelig er $Arc.\tan x = \frac{1}{2}\sqrt{-1} \, L \frac{1 - x\sqrt{-1}}{1 + x\sqrt{-1}}$. Antages nu $x = 1$, bliver $Arc.\tan x = \frac{1}{8}$ Peripherie $= \frac{1}{4}\pi$, altsaa $\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{-1} \, L \frac{1 - \sqrt{-1}}{1 + \sqrt{-1}}$ og $\pi = 2\sqrt{-1} \, L \frac{1 - \sqrt{-1}}{1 + \sqrt{-1}} =$

$\sqrt{-1}\, L\frac{-2\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\; L-1$, hvoraf igjen $L-1 = -\pi\sqrt{-1}$. Indsættes denne Værdie, findes $-\frac{1}{c}\mathfrak{B} = -\frac{\pi\sqrt{-1}}{2c^2}((c-1)(a^b - a^{-b}) + (c-3)(a^{3b} - a^{-3b}) + (c-5)(a^{5b} - a^{-5b}) \ldots\ldots)$, eller, for Korthedს Skyld, $-\frac{1}{c}\mathfrak{B} = -\frac{\pi\sqrt{-1}}{2c^2}.\mathfrak{C}$. For at bestemme Værdien af $\mathfrak{C}$, tage vi særskilt Hensyn til om c er lige eller ulige.

1) Er c lige, b altsaa ulige, bliver $\mathfrak{C} = (c-1)(a^b - a^{-b}) + (c-3)(a^{3b} - a^{-3b}) + (c-5)(a^{5b} - a^{-5b}) \ldots\ldots + 5(a^{(c-5)b} - a^{-(c-5)b}) + 3(a^{(c-3)b} - a^{-(c-3)b}) + (a^{(c-1)b} - a^{-(c-1)b})$, hvoraf $(a^b - a^{-b})\mathfrak{C} = (c-1)(a^{2b} - 2 + a^{-2b}) + (c-3)(a^{4b} - a^{2b} - a^{-2b} + a^{-4b}) + (c-5)(a^{6b} - a^{4b} - a^{-4b} + a^{-6b}) \ldots\ldots + 5(a^{(c-4)b} - a^{(c-6)b} - a^{-(c-6)b} + a^{-(c-4)b}) + 3(a^{(c-2)b} - a^{(c-4)b} - a^{-(c-4)b} + a^{-(c-2)b}) + (a^{cb} - a^{(c-2)b} - a^{-(c-2)b} + a^{-cb}) = -2c + 2 + 2(a^{2b} + a^{-2b} + a^{4b} + a^{-4b} + a^{6b} + a^{-6b} \ldots\ldots + a^{(c-6)b} + a^{-(c-6)b} + a^{(c-4)b} + a^{-(c-4)b} + a^{(c-2)b} + a^{-(c-2)b}) + a^{cb} + a^{-cb}$. Nu er $a^c = a^{-c} = -1$; $a^{cb} = a^{-cb} = -1$ og derfor $2 + a^{cb} + a^{-cb} = 0$, hvoraf følger at $(a^b - a^{-b})\mathfrak{C} = -2c + 2(a^{2b} + a^{-2b} + a^{4b} + a^{-4b} + a^{6b} + a^{-6b} \ldots\ldots - a^{-6b} - a^{6b} - a^{-4b} - a^{4b} - a^{-2b} - a^{2b}) = -2c$.

2) Er c ulige, bliver $\mathfrak{C} = (c-1)(a^b - a^{-b}) + (c-3)(a^{3b} - a^{-3b}) + (c-5)(a^{5b} - a^{-5b}) \ldots\ldots + 6(a^{(c-6)b} - a^{-(c-6)b}) + 4(a^{(c-4)b} - a^{-(c-4)b}) + 2(a^{(c-2)b} - a^{-(c-2)b})$; altsaa $(a^b - a^{-b})\mathfrak{C} = (c-1)(a^{2b} - 2 + a^{-2b}) + (c-3)(a^{4b} - a^{2b} - a^{-2b} + a^{-4b}) + (c-5)(a^{6b} - a^{4b} - a^{-4b} + a^{-6b}) \ldots\ldots + 6(a^{(c-5)b} - a^{(c-7)b} - a^{-(c-7)b} + a^{-(c-5)b}) + 4(a^{(c-3)b} - a^{(c-5)b} - a^{-(c-5)b} + a^{-(c-3)b}) + 2(a^{(c-1)b} - a^{(c-3)b} - a^{-(c-3)b} + a^{-(c-1)b}) = -2c + 2 + 2(a^{2b} + a^{-2b} + a^{4b} + a^{-4b} + a^{6b} + a^{-6b} \ldots\ldots + a^{(c-7)b} + a^{-(c-7)b} + a^{(c-5)b} + a^{-(c-5)b} + a^{(c-3)b} + a^{-(c-3)b} + a^{(c-1)b} + a^{-(c-1)b}) = -2c + 2(a^{2b} + a^{4b} + a^{6b} \ldots\ldots + a^{(c-7)b} + a^{(c-5)b} + a^{(c-3)b} + a^{(c-1)b} + a^{(c+1)b} + a^{(c+3)b} + a^{(c+5)b} + a^{(c+7)b} \ldots + a^{(2c-6)b} + a^{(2c-4)b} + a^{(2c-2)b} + a^{2cb}) = -2c$.

Saaledes er ogsaa i dette Tilfælde $(a^b - a^{-b})\,\mathfrak{C} = -2c$, hvoraf $\mathfrak{C} = -\frac{2c}{a^b - a^{-b}} = -\frac{2c}{2\sin bp\sqrt{-1}} = -\frac{c}{\sin bp\sqrt{-1}}$. Indsættes denne Værdie i Udtrykket for $-\frac{1}{c}\mathfrak{B}$, findes endeligen $-\frac{1}{c}\mathfrak{B} = -\frac{\pi\sqrt{-1}}{2c^2} \times -\frac{c}{\sin bp\sqrt{-1}}$ $= \frac{\pi}{2c\sin bp}$.

Af alle disse Undersøgelser følger nu, at

1) naar c er lige og b altsaa ulige, bliver

$$s = \frac{\pi}{2c\sin bp} - \frac{1}{c}{}''\mathfrak{A}$$

2) naar c er ulige, bliver

$$s = \frac{\pi}{2c\sin bp} - \frac{1}{c}{}'\mathfrak{A}.$$

Endnu kan det erindres, at dersom de Briggiske Logarithmer betegnes med Bogstavet l, er i Almindelighed $LA = 2{,}3025851\ lA$. Anvendes dette paa det Foregaaende, findes:

$${}'\mathfrak{A} = 2.2{,}3025851\,(\cos bpl \sin \tfrac{1}{2}p + \cos 3bpl \sin \tfrac{3}{2}p + \cos 5bpl \sin \tfrac{5}{2}p \ldots)$$
$${}''\mathfrak{A} = 2.2{,}3025851\,(\cos bpl \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}p + \cos 3bpl \operatorname{tang} \tfrac{3}{2}p + \cos 5bpl \operatorname{tang} \tfrac{5}{2}p \ldots)$$

§. 10.

I §. 2 fandtes ${}'s = \int \frac{x^{b-1}\,dx}{1-x^c}$. Betjene vi os nu af en Fremgangsmaade, der ganske ligner den i §. 6, finde vi ${}'s = \frac{1}{c}\int\Big(\frac{\mathfrak{b}^{b-1}}{1-\mathfrak{b}^{-1}x} + \frac{\mathfrak{b}^{2(b-1)}}{1-\mathfrak{b}^{-2}x} + \frac{\mathfrak{b}^{3(b-1)}}{1-\mathfrak{b}^{-3}x}$ $\ldots\ldots + \frac{\mathfrak{b}^{-3(b-1)}}{1-\mathfrak{b}^3x} + \frac{\mathfrak{b}^{-2(b-1)}}{1-\mathfrak{b}^2x} + \frac{\mathfrak{b}^{-(b-1)}}{1-\mathfrak{b}x} + \frac{1}{1-x}\Big)\,dx$, hvoraf ${}'s = -$ $\frac{1}{c}(\mathfrak{b}^b L(1-\mathfrak{b}^{-1}x) + \mathfrak{b}^{2b} L(1-\mathfrak{b}^{-2}x) + \mathfrak{b}^{3b} L(1-\mathfrak{b}^{-3}x) \ldots\ldots + \mathfrak{b}^{-3b} L(1-\mathfrak{b}^3x)$ $+ \mathfrak{b}^{-2b} L(1-\mathfrak{b}^2x) + \mathfrak{b}^{-b} L(1-\mathfrak{b}x) + L(1-x))$. Ogsaa i dette Integral er den Bestandige Nul.

Sættes nu $x=1$, findes ${}'s = -\frac{1}{c}(\mathfrak{b}^b L(1-\mathfrak{b}^{-1}) + \mathfrak{b}^{2b} L(1-\mathfrak{b}^{-2}) +$ $\mathfrak{b}^{3b} L(1-\mathfrak{b}^{-3}) \ldots\ldots + \mathfrak{b}^{-3b} L(1-\mathfrak{b}^3) + \mathfrak{b}^{-2b} L(1-\mathfrak{b}^2) + \mathfrak{b}^{-b} L(1-\mathfrak{b})) -$ $\frac{1}{c} L0$; men, efter Slutningen af §. 5, er $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^2$, som indsat giver os ${}'s =$ $-\frac{1}{c}(\mathfrak{a}^{2b} L(1-\mathfrak{a}^{-2}) + \mathfrak{a}^{4b} L(1-\mathfrak{a}^{-4}) + \mathfrak{a}^{6b} L(1-\mathfrak{a}^{-6}) \ldots\ldots + \mathfrak{a}^{-6b} L(1-\mathfrak{a}^6)$

$+\alpha^{-4b}L(1-\alpha^4)+\alpha^{-2b}L(1-\alpha^2))-\frac{1}{c}L0$. Dernæst er $\alpha^{2b}L(1-\alpha^{-2})+\alpha^{-2b}L(1-\alpha^2)=\frac{1}{2}(\alpha^{2b}+\alpha^{-2b})L(2-\alpha^2-\alpha^{-2})+\frac{1}{2}(\alpha^{2b}-\alpha^{-2b})L\frac{1-\alpha^{-2}}{1+\alpha^2}=(\alpha^{2b}+\alpha^{-2b})L\,2\sin p+\frac{1}{2}(c-2)(\alpha^{2b}-\alpha^{-2b})L\alpha$. Ligeledes bliver $\alpha^{4b}L(1-\alpha^{-4})+\alpha^{-4b}L(1-\alpha^4)=(\alpha^{4b}+\alpha^{-4b})L\,2\sin 2p+\frac{1}{2}(c-4)(\alpha^{4b}-\alpha^{-4b})L\alpha$; $\alpha^{6b}L(1-\alpha^{-6})+\alpha^{-6b}L(1-\alpha^6)=(\alpha^{6b}+\alpha^{-6b})L\,2\sin 3p+\frac{1}{2}(c-6)(\alpha^{6b}-\alpha^{-6b})L\alpha$; o. s. v. Følgeligen bliver $'s=-\frac{1}{c}((\alpha^{2b}+\alpha^{-2b})L\,2\sin p+(\alpha^{4b}+\alpha^{-4b})L\,2\sin 2p+(\alpha^{6b}+\alpha^{-6b})L\,2\sin 3p\ldots\ldots+\frac{1}{2}L\alpha((c-2)(\alpha^{2b}-\alpha^{-2b})+(c-4)(\alpha^{4b}-\alpha^{-4b})+(c-6)(\alpha^{6b}-\alpha^{-6b})\ldots\ldots)+L0)$, eller, for Korthheds Skyld, $'s=-\frac{1}{c}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+L0)$. Er c ulige, bliver Intet videre at tilføie, og da bestaaer $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$ hvert af $\frac{c-1}{2}$ Led; er derimod c lige, b altsaa ulige, da bliver det Led, der ligger midt imellem $\alpha^{2b}L(1-\alpha^{-2})$ og $\alpha^{-2b}L(1-\alpha^2)$ dette: $\alpha^{\pm bc}L(1-\alpha^{\mp c})=-L2$, og da bestaaer $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$ hvert af $\frac{c-2}{2}$ Led. I dette Tilfælde bliver derfor $'s=-\frac{1}{c}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+L0-L2)$. Naar følgeligen $c=1$ eller $c=2$ forsvinde $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{B}$. Rækkens Sum bliver altsaa i første Tilfælde $=-L0$, og i sidste $=-\frac{1}{2}L0+\frac{1}{2}L2$.

§. 11.

Da $L\,2\sin p=L2+L\sin p$; $L\,2\sin 2p=L2+L\sin 2p$; o. s. v., bliver $\mathfrak{A}=(\alpha^{2b}+\alpha^{-2b}+\alpha^{4b}+\alpha^{-4b}\ldots\ldots)L2+(\alpha^{2b}+\alpha^{-2b})L\sin p+(\alpha^{4b}+\alpha^{-4b})L\sin 2p+(\alpha^{6b}+\alpha^{-6b})L\sin 3p\ldots\ldots$ Er nu c et lige Tal, forsvinder Coefficienten til $L2$; er derimod c ulige, bliver denne Coefficient $=-1$; sættes derfor $(\alpha^{2b}+\alpha^{-2b})L\sin p+(\alpha^{4b}+\alpha^{-4b})L\sin 2p+(\alpha^{6b}+\alpha^{-6b})L\sin 3p\ldots\ldots='\mathfrak{A}$, bliver i første Tilfælde $\mathfrak{A}='\mathfrak{A}$ og i sidste $\mathfrak{A}='\mathfrak{A}-L2$. Indsættes disse Værdier i den nylig angivne Formel for $'s$, findes, hvad enten c er lige eller ulige, $'s=-\frac{1}{c}('\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+L0-L2)$.

Da $\alpha^{2b}+\alpha^{-2b}=2\cos 2bp$; $\alpha^{4b}+\alpha^{-4b}=2\cos 4bp$; o. s. v., er tillige $'\mathfrak{A}=2(\cos 2bp\,L\sin p+\cos 4bp\,L\sin 2p+\cos 6bp\,L\sin 3p\ldots\ldots)$, et Udtryk, der, saavidt jeg skjønner, ikke videre kan forkortes naar c er ulige. Er c derimod et lige Tal, bliver $'\mathfrak{A} = (a^{2b} + a^{-2b}) L \sin p + (a^{4b} + a^{-4b}) L \sin 2p + (a^{6b} + a^{-6b}) L \sin 3p \ldots\ldots + (a^{(c-6)b} + a^{-(c-6)b}) L \sin \frac{c-6}{2} p + (a^{(c-4)b} + a^{-(c-4)b}) L \sin \frac{c-4}{4} p + (a^{(c-2)b} + a^{-(c-2)b}) L \sin \frac{c-2}{4} p = (a^{2b} + a^{-2b}) L \sin p + (a^{4b} + a^{-4b}) L \sin 2p + (a^{6b} + a^{-6b}) L \sin 3p \ldots\ldots - (a^{6b} + a^{-6b}) L \cos 3p - (a^{4b} + a^{-4b}) L \cos 2p - (a^{2b} + a^{-2b}) L \cos p = 2 (\cos 2bp \, L \operatorname{tang} p + \cos 4bp \, L \operatorname{tang} 2p + \cos 6bp \, L \operatorname{tang} 3p \ldots\ldots)$, et Udtryk, som jeg, for at skille det fra det foregaaende, vil sætte $= ''\mathfrak{A}$. Dersom $\frac{c-2}{2}$ er et lige Tal, bestaaer $''\mathfrak{A}$ af $\frac{c-2}{4}$ Led; er derimod $\frac{c-2}{2}$ et ulige Tal, indeholder $''\mathfrak{A}$ kun $\frac{c-4}{4}$ Led; thi da bliver Coefficienten til det midterste Led denne: $a^{\frac{1}{2}bc} + a^{-\frac{1}{2}bc} = 0$.

§. 12.

Efter §. 10 er $\mathfrak{B} = \frac{1}{2} La \; ((c-2)(a^{2b} - a^{-2b}) + (c-4)(a^{4b} - a^{-4b}) + (c-6)(a^{6b} - a^{-6b}) \ldots\ldots)$, eller, for Korthedś Skyld, $\mathfrak{B} = \frac{1}{2} La \,.\, \mathfrak{C}$, altsaa $-\frac{1}{c}\mathfrak{B} = -\frac{1}{2c} La \,.\, \mathfrak{C}$, hvoraf, ligesom i §. 9, findes $-\frac{1}{c}\mathfrak{B} = -\frac{\pi\sqrt{-1}}{2c^2} \,.\, \mathfrak{C}$. For at bestemme Værdien af $\mathfrak{C}$, maae vi ogsaa her særskilt tage Hensyn til om c er lige eller ulige.

1) Er c lige, b altsaa ulige, bliver $\mathfrak{C} = (c-2)(a^{2b} - a^{-2b}) + (c-4)(a^{4b} - a^{-4b}) + (c-6)(a^{6b} - a^{-6b}) \ldots\ldots + 6(a^{(c-6)b} - a^{-(c-6)b}) + 4(a^{(c-4)b} - a^{-(c-4)b}) + 2(a^{(c-2)b} - a^{-(c-2)b})$; altsaa $(a^{2b} - a^{-2b}) \mathfrak{C} = (c-2)(a^{4b} - 2 + a^{-4b}) + (c-4)(a^{6b} - a^{2b} - a^{-2b} + a^{-6b}) + (c-6)(a^{8b} - a^{4b} - a^{-4b} + a^{-8b}) \ldots\ldots + 6(a^{(c-4)b} - a^{(c-8)b} - a^{-(c-8)b} + a^{-(c-4)b}) + 4(a^{(c-2)b} - a^{(c-6)b} - a^{-(c-6)b} + a^{-(c-2)b}) + 2(a^{cb} - a^{(c-4)b} - a^{-(c-4)b} + a^{-cb}) = -2c + 4 - (c-4)(a^{2b} + a^{-2b}) + 4(a^{4b} + a^{-4b} + a^{6b} + a^{-6b} + a^{8b} + a^{-8b} \ldots\ldots + a^{(c-8)b} + a^{-(c-8)b} + a^{(c-6)b} + a^{-(c-6)b} + a^{(c-4)b} + a^{-(c-4)b} + a^{(c-2)b} + a^{-(c-2)b}) + 2a^{cb} + 2a^{-cb} = -2c + 4 - c(a^{2b} + a^{-2b}) + 4(a^{2b} + a^{-2b} + a^{4b} + a^{-4b} + a^{6b} + a^{-6b} + a^{8b} + a^{-8b} + \ldots\ldots - a^{-8b} - a^{8b} - a^{-6b} - a^{6b} - a^{-4b} - a^{4b} - a^{-2b} - a^{2b}) - 2 - 2 = -2c - c(a^{2b} + a^{-2b})$.

2) Er c ulige, bliver $\mathfrak{C} = (c-2)(a^{2b} - a^{-2b}) + (c-4)(a^{4b} - a^{-4b}) - (c-6)(a^{6b} - a^{-6b}) \ldots\ldots + 5(a^{(c-5)b} - a^{-(c-5)b}) + 3(a^{(c-3)b} - a^{-(c-3)b}) + a^{(c-1)b}$

$-\mathfrak{a}^{-(c-1)b}$; altsaa $(\mathfrak{a}^{2b}-\mathfrak{a}^{-2b})\,\mathfrak{C}=(c-2)(\mathfrak{a}^{4b}-2+\mathfrak{a}^{-4b})+(c-4)(\mathfrak{a}^{6b}-\mathfrak{a}^{2b}-\mathfrak{a}^{-2b}+\mathfrak{a}^{-6b})+(c-6)(\mathfrak{a}^{8b}-\mathfrak{a}^{4b}-\mathfrak{a}^{-4b}+\mathfrak{a}^{-8b})\ldots\ldots+5(\mathfrak{a}^{(c-3)b}-\mathfrak{a}^{(c-7)b}-\mathfrak{a}^{-(c-7)b}+\mathfrak{a}^{-(c-3)b})+3(\mathfrak{a}^{(c-1)b}-\mathfrak{a}^{(c-5)b}-\mathfrak{a}^{-(c-5)b}+\mathfrak{a}^{-(c-1)b})+(\mathfrak{a}^{(c+1)b}-\mathfrak{a}^{(c-3)b}-\mathfrak{a}^{-(c-3)b}+\mathfrak{a}^{-(c+1)b})=-2c+4-(c-4)(\mathfrak{a}^{2b}+\mathfrak{a}^{-2b})+4(\mathfrak{a}^{4b}+\mathfrak{a}^{-4b}+\mathfrak{a}^{6b}+\mathfrak{a}^{-6b}+\mathfrak{a}^{8b}+\mathfrak{a}^{-8b}\ldots\ldots+\mathfrak{a}^{(c-7)b}+\mathfrak{a}^{-(c-7)b}+\mathfrak{a}^{(c-5)b}+\mathfrak{a}^{-(c-5)b}+\mathfrak{a}^{(c-3)b}+\mathfrak{a}^{-(c-3)b})+3(\mathfrak{a}^{(c-1)b}+\mathfrak{a}^{-(c-1)b})+\mathfrak{a}^{(c+1)b}+\mathfrak{a}^{-(c+1)b}$; men $\mathfrak{a}^{2cb}=1$ og $\mathfrak{a}^{-(c\mp 1)b}=\mathfrak{a}^{(c\pm 1)b}$; derfor bliver $(\mathfrak{a}^{2b}-\mathfrak{a}^{-2b})\,\mathfrak{C}=-2c-c(\mathfrak{a}^{2b}+\mathfrak{a}^{-2b})+4(\mathfrak{a}^{2b}+\mathfrak{a}^{4b}+\mathfrak{a}^{6b}+\mathfrak{a}^{8b}\ldots\ldots+\mathfrak{a}^{(c-7)b}+\mathfrak{a}^{(c-5)b}+\mathfrak{a}^{(c-3)b}+\mathfrak{a}^{(c-1)b}+\mathfrak{a}^{(c+1)b}+\mathfrak{a}^{(c+3)b}+\mathfrak{a}^{(c+5)b}+\mathfrak{a}^{(c+7)b}\ldots\ldots+\mathfrak{a}^{(2c-8)b}+\mathfrak{a}^{(2c-6)b}+\mathfrak{a}^{(2c-4)b}+\mathfrak{a}^{(2c-2)b}+\mathfrak{a}^{2cb})=-2c-c(\mathfrak{a}^{2b}+\mathfrak{a}^{-2b})$.

Saaledes bliver, ogsaa i dette Tilfælde, $(\mathfrak{a}^{2b}-\mathfrak{a}^{-2b})\,\mathfrak{C}=-2c-c(\mathfrak{a}^{2b}+\mathfrak{a}^{-2b})$, følgeligen $\mathfrak{C}=\dfrac{-2c-c(\mathfrak{a}^{2b}+\mathfrak{a}^{-2b})}{\mathfrak{a}^{2b}-\mathfrak{a}^{-2b}}=\dfrac{-2c-2c\,.\cos 2bp}{2\sin 2bp\sqrt{-1}}=-\dfrac{c(1+\cos 2bp)}{\sin 2bp\sqrt{-1}}$. Indsættes denne Værdie i Udtrykket for $-\dfrac{1}{c}\mathfrak{B}$, findes endeligen $-\dfrac{1}{c}\mathfrak{B}=-\dfrac{\pi\sqrt{-1}}{2c^2}\times-\dfrac{c}{\sin bp\sqrt{-1}}=\dfrac{\pi}{2c\sin bp}$.

Af de foregaaende Undersøgelser følger nu, at

1) naar c er lige og b altsaa ulige, bliver

$$'s=\frac{\pi(1+\cos 2bp)}{2c\sin 2bp}-\frac{1}{c}(''\mathfrak{A}+L0-L2) \text{ og}$$

2) naar c er ulige, bliver

$$'s=\frac{\pi(1+\cos 2bp)}{2c\sin 2bp}-\frac{1}{c}('\mathfrak{A}+L0-L2).$$

Tillige er

$$'\mathfrak{A}=2.2{,}3025851\,(\cos 2bpl\,\sin p+\cos 4bpl\,\sin 2p+\cos 6bpl\,\sin 3p\ldots)$$
$$''\mathfrak{A}=2.2{,}3025851\,(\cos 2bpl\,\mathrm{tang}\,p+\cos 4bpl\,\mathrm{tang}\,2p+\cos 6bpl\,\mathrm{tang}\,3p\ldots)$$

§. 13.

I Formelen for $'s$ fandtes Udtrykket $-\dfrac{1}{c}L0$; nu er $L0=-\infty$; altsaa $-\dfrac{1}{c}L0=\dfrac{1}{c}.\infty$, og $'s$ er derfor selv uendelig stor. Da den imidlertid bestaaer af een uendelig stor Størrelse og een endelig, kunne vi betjene os af den, til at bestemme den endelige Sum af saadanne Rækker, som kunne opløses i tvende eller flere andre, der ere af samme Form som $'s$ og tillige ere saaledes beskafne, at de uendelig store Størrelser hæve hverandre, og kun de endelige Dele blive tilbage og udgjøre Summen af Hoved-Rækken. Dette er f. Ex. Tilfældet med selve Rækken s; thi $s = \frac{1}{b} - \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+2c} - \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{b+4c} - \frac{1}{b+5c} \ldots\ldots = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b+2c} + \frac{1}{b+2c} + \frac{1}{b+4c} \ldots\ldots\right) - \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{b+5c} \ldots\ldots\right)$ og den er derfor liig Forskjellen imellem tvende Rækker, der have samme Form som $'s$, og i hvilke de uendelig store Størrelser (i begge $-\frac{1}{2c}L\mathrm{o}$) hæve hverandre.

Havde den opgivne Række S havt afvexlende Tegn, da havde vi faaet $S = \frac{a}{b(b+c)} - \frac{a}{(b+2c)(b+3c)} + \frac{a}{(b+4c)(b+5c)} - \frac{a}{(b+6c)(b+7c)} \ldots\ldots = \frac{a}{c}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+c} - \frac{1}{b+2c} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{b+4c} - \frac{1}{b+5c} - \frac{1}{b+6c} + \frac{1}{b+7c} \ldots\ldots\right) = \frac{a}{c}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+2c} + \frac{1}{b+4c} - \frac{1}{b+6c} \ldots\ldots\right) - \frac{a}{c}\left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{b+5c} - \frac{1}{b+7c} \ldots\ldots\right)$, og Rækken kunde saaledes opløses i tvende andre, der summeres efter Formelen for s.

§. 14.

Ved Hjelp af Formlerne for s og $'s$ kunne overalt de Rækker summeres, hvis Tællere ere lige store, og hvis Nævnere ere eensdannede Producter af Ledene i en arithmetisk Række af 1ste Orden. Saaledes da $\frac{a}{b(b+c)(b+2c)} = \frac{a}{2c^2}\left(\frac{1}{b} - \frac{2}{b+c} + \frac{1}{b+2c}\right)$; $\frac{a}{(b+3c)(b+4c)(b+5c)} = \frac{a}{2c^2}\left(\frac{1}{b+3c} - \frac{2}{b+4c} + \frac{1}{b+5c}\right)$; o. s. v. bliver $\frac{a}{b(b+c)(b+2c)} \pm \frac{a}{(b+3c)(b+4c)(b+5c)} + \frac{a}{(b+6c)(b+7c)(b+8c)} \pm \frac{a}{(b+9c)(b+10c)(b+11c)} \ldots\ldots = \frac{a}{2c^2}\left(\left(\frac{1}{b} \pm \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{b+6c} \pm \frac{1}{b+9c}\right.\right.$

$$\ldots\ldots\Big) - 2\left(\frac{1}{b+c} \pm \frac{1}{b+4c} + \frac{1}{b+7c} \pm \frac{1}{b+10c}\ldots\ldots\right) + \left(\frac{1}{b+2c} \pm \frac{1}{b+5c} + \frac{1}{b+8c} \pm \frac{1}{b+11c}\ldots\ldots\right)\Big)\Big),$$ og følgeligen kan Hoved-Rækken, hvis alle Leddene have samme Tegn, summeres ved Formelen for $'s$, og, hvis Tegnene ere afvexlende, ved Formelen for s. I det første Tilfælde hæve de uendelig store Størrelser hverandre og Rækkens Sum bliver endelig.

Paa samme Maade findes $$\frac{a}{b(b+c)(b+2c)(b+3c)} \pm \frac{a}{(b+4c)(b+5c)(b+6c)(b+7c)} + \frac{a}{(b+8c)(b+9c)(b+10c)(b+11c)} \pm \frac{a}{(b+12c)(b+13c)(b+14c)(b+15c)}\ldots\ldots$$
$$= \frac{a}{2.3c^3}\Big(\Big(\frac{1}{b} \pm \frac{1}{b+4c} + \frac{1}{b+8c} \pm \frac{1}{b+12c}\ldots\ldots\Big) - 3\left(\frac{1}{b+c} \pm \frac{1}{b+5c} + \frac{1}{b+9c} \pm \frac{1}{b+13c}\ldots\ldots\right) + 3\left(\frac{1}{b+2c} \pm \frac{1}{b+6c} + \frac{1}{b+10c} \pm \frac{1}{b+14c}\ldots\ldots\right) - \left(\frac{1}{b+3c} \pm \frac{1}{b+7c} + \frac{1}{b+11c} \pm \frac{1}{b+15c}\ldots\ldots\right)\Big).$$ Denne Række kan følgeligen ogsaa summeres, enten ved Formelen for s, eller ved den for $'s$. Det samme vil, som let sees, være Tilfældet med alle uendelige Rækker af lignende Form.

§. 15.

I Slutningen af §. 1 er det antaget, at $b - 1 < c$; er dette ikke Tilfældet, divideres x^{b-1} med $x^c + 1$, indtil Resten faaer en Exponent, som har den omtalte Egenskab. Var f. Ex. $b = 13$ og $c = 5$, da var i Almindelighed $s = \int\frac{x^{12}\,dx}{1+x^5}$; men $\frac{x^{12}}{1+x^5} = \frac{x^{12}}{x^5+1} = x^7 - x^2 + \frac{x^2}{1+x^5}$, altsaa $\int\frac{x^{12}\,dx}{1+x^5} = \int\left(x^7 - x^2 + \frac{x^2}{1+x^5}\right)dx$ $= \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{3}x^3 + \int\frac{x^2\,dx}{1+x^5}$, hvilket sidste Integral bestemmes ved Formelen for s, ved at sætte $b = 3$ og $c = 5$.

Ligeledes antoges der, at b og c vare indbyrdes Prim-Tal; ere de det ikke, men f. Ex. m er deres største fælles Maal, saa at $b = m'b$ og $c = m'c$, da bliver Rækken $s = \frac{1}{m'b} - \frac{1}{m'b + m'c} + \frac{1}{m'b + 2m'c} - \frac{1}{m'b + 3m'c}\ldots\ldots = \frac{1}{m}\Big(\frac{1}{'b} -$

$\frac{1}{'b+'c}+\frac{1}{'b+2'c}-\frac{1}{'b+3'c}\ldots\ldots)$ i hvilken sidste Række $'b$ og c' ere indbyrdes Prim-Tal.

Indeholde b og c Brøker, saa at f. Ex. $b=\frac{e}{f}$ og $c=\frac{g}{h}$ (hvor e; f; g og h ere hele Tal), da kan Rækken paa denne Maade befries for Brøkerne: $s=\frac{1}{\frac{e}{f}}-$

$$\frac{1}{\frac{e}{f}+\frac{g}{h}}+\frac{1}{\frac{e}{f}+\frac{2g}{h}}-\frac{1}{\frac{e}{f}+\frac{3g}{h}}\ldots\ldots=\frac{f}{e}-\frac{fh}{eh+fg}+\frac{fh}{eh+2fg}-$$

$$\frac{fh}{eh+3fg}\ldots\ldots=fh\left(\frac{1}{eh}-\frac{1}{eh+fg}+\frac{1}{eh+2fg}-\frac{1}{eh+3fg}\ldots\ldots\right)$$

hvilken Række har samme Form som s i §. 1.

Ere b og c begge negative, da skeer derved ingen anden Forandring ved Rækken s, end at dens Tegn forvandles til de modsatte. Have derimod b og c forskjellige Tegn, summerer man en Deel af Rækken særskilt, forinden man anvender Formelen for s. Er f. Ex. $b=7$ og $c=-3$, bliver $s=\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\ldots\ldots$, af hvilken Række de 3 første Led særskilt summeres, og Summen af de øvrige bestemmes ved Formelen for s, naar i den b sættes $=2$ og $c=3$.

Ere endeligen b og c, eller een af dem, irrationale, da kan Rækken ikke letteligen summeres efter denne Methode.

Hvad der i Øvrigt er anført i dette Paragraph, gjelder ogsaa de Rækker der have Form tilfælles med $'s$. Dog maae herfra undtages det Tilfælde, at b og c ere indbyrdes delelige Tal. Er f. Ex. m deres største fælles Maal, og vi sætte $b=m'b$, $c=m'c$, da bliver $'s=\frac{1}{m'b}+\frac{1}{m'b+m'c}+\frac{1}{m'b+2m'c}\ldots\ldots=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{'b}\right.$ $\left.+\frac{1}{'b+'c}+\frac{1}{'b+2'c}\ldots\ldots\right)$, eller, for Kortheds Skyld, $'s=\frac{1}{m}{''s}$; men tillige er $'s=\int\frac{x^{m'b-1}\,dx}{1-x^{m'c}}$, eller, ved at sætte $x^m=y$, $'s=\frac{1}{m}\int\frac{y^{'b-1}\,dy}{1-y^{'c}}$, hvoraf følger at ${''s}=\int\frac{y^{'b-1}\,dy}{1-y^{'c}}$. Integreres nu dette Differential, og y dernæst sættes $=x^m=1$, bliver Alt ligesom i §. 10 og følgende, undtagen Ledet $L(1-y)$, thi da $y=x^m$, bliver $L(1-y) = L(1-x^m) = L(1-x)(1+x+x^2+x^3\ldots\ldots+x^{m-1}) = L(1-x)+L(1+x+x^2+x^3\ldots\ldots+x^{m-1})$, det er, for $x=1$, $L(1-y) = L0+Lm$. Derfor kan, i det antagne Tilfælde, Summen af Rækken ''s bestemmes ved een af de i §. 12 fundne Formler, naar for $L0$ sættes $L0+Lm$.

§. 16.

Den i de foregaaende Paragrapher angivne Opløsnings-Methode ville vi nu oplyse ved nogle Exempler, hvorved vi tillige sættes i Stand til nøiere at sammenligne den med den, som i det Følgende skal fremsættes.

1ste Exempel. At summere Rækken $\frac{2}{3.7}+\frac{2}{11.15}+\frac{2}{19.23}\ldots\ldots = S$. Her er $a=2$; $b=3$; $c=4$ og $p=45°$, altsaa, efter §. 9, $S=\frac{2}{4}s=\frac{\pi}{16\sin 135°} - \frac{1}{4}.2{,}3025851\cos 135°\; l\,\mathrm{tang}\,22°30' = \frac{\pi}{16\sin 45°}+\frac{1}{4}.2{,}3025851\cos 45° \times l\,\mathrm{tang}\,22°30'$. Regningen kan nu udføres paa denne Maade: $l\pi = 0{,}4971499$; $Cl\,16 = 0{,}7958800-2$; $Cl\sin 45° = 0{,}1505150$; $l\frac{\pi}{16\sin 45°} = 0{,}4435449-1 = l\,0{,}2776802$; $l\,\mathrm{tang}\,22°30' = 0{,}6172243-1 = -0{,}3827757$; $ll\,\mathrm{tang}\,22°30' = 0{,}5829444-1$; $l\frac{1}{4} = 0{,}3979400-1$; $l\,2{,}3025851 = 0{,}3622157$; $l\cos 45° = 0{,}8494850-1$; $l(\frac{1}{4}.2{,}3025851\cos 45°\; l\,\mathrm{tang}\,22°30') = 0{,}1925851-1 = l-0{,}1558063$. Følgeligen $S = 0{,}2776802-0{,}1558063 = 0{,}1218739$.

2det Exempel. At summere Rækken $\frac{3}{52.57}+\frac{3}{62.67}+\frac{3}{72.77}\ldots\ldots\ldots = S$. Her er $a=3$; $b=52$; $c=5$ og $p=36°$; altsaa $S=\frac{3}{5}(\frac{1}{52}-\frac{1}{57}+\frac{1}{62}-\frac{1}{67}+\frac{1}{72}-\frac{1}{77}\ldots\ldots)=\frac{3}{5}s$, hvor s bestemmes ved dette Integral: $s=\int\frac{x^{51}dx}{1+x^5}$. Nu er $\frac{x^{51}}{1+x^5}=\frac{x^{51}}{x^5+1}=x^{46}-x^{41}+x^{36}-x^{31}+x^{26}-x^{21}+x^{16}-x^{11}+x^6-x+\frac{x}{1+x^5}$ og derfor $s=\frac{1}{47}x-\frac{1}{42}x^{42}+\frac{1}{37}x^{37}-\frac{1}{32}x^{32}+\frac{1}{27}x^{27}-\frac{1}{22}x^{22}+\frac{1}{17}x^{17}-\frac{1}{12}x^{12}+\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{2}x^2+\int\frac{x\,dx}{1+x^5}$. Summen af Rækken s bestaaer saaledes af tvende Dele, nemlig, af $\frac{1}{47}-\frac{1}{42}+\frac{1}{37}-\frac{1}{32}+\frac{1}{27}-\frac{1}{22}+\frac{1}{17}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\frac{1}{2}$, som vi ville sætte $=\mathfrak{D}$, og af $\int\frac{x\,dx}{1+x^5}$, som sættes $=\mathfrak{E}$. Heraf finde vi $\mathfrak{D}=$ $-5\left(\frac{1}{47.42}+\frac{1}{37.32}+\frac{1}{27.22}+\frac{1}{17.12}+\frac{1}{7.2}\right)=-0{,}3968260$. Hvad $\mathfrak{E}$ angaaer, da bestemmes den efter §. 9 ved at sætte $b=2$; $c=5$ og $p=36^\circ$. Derfor bliver $\mathfrak{E}=\frac{\pi}{10\sin 72^\circ}-\frac{2}{5}.2{,}3025851\,(\cos 72^\circ\, l\sin 18^\circ+\cos 216^\circ\times$ $l\sin 54^\circ)=\frac{\pi}{10\sin 72^\circ}-\frac{2}{5}.2{,}3025851\,(\cos 72^\circ\, l\sin 18^\circ-\cos 36^\circ\, l\sin 54^\circ)$ eller, for Kortheds Skyld, $\mathfrak{E}=\frac{\pi}{10\sin 72^\circ}-\frac{2}{5}.2{,}3025851\,(e-f)$. Det Øvrige af Regningen udføres saaledes: $l\pi=0{,}4971499$; $Cl\,10\sin 72^\circ=0{,}0217937-1$; $l\frac{\pi}{10\sin 72^\circ}=0{,}5189436-1=l0{,}3303266$; $l\sin 18^\circ=0{,}4899824-1=$ $-0{,}5100176$; $ll\sin 18^\circ=0{,}7075852-1$; $l\cos 72^\circ=0{,}4899824-1$; $le=$ $0{,}1975676-1=l-0{,}1576041$; $l\sin 54^\circ=0{,}9079576-1=-0{,}0920425$; $ll\sin 54^\circ=0{,}9639879-2$; $l\cos 36^\circ=0{,}9079576-1$; $lf=0{,}8719455-2$ $=l-0{,}07446385$; $e-f=-0{,}08314025$; $l(e-f)=0{,}9198113-2$; $l\frac{2}{5}$ $=0{,}6020600-1$; $l2{,}3025851=0{,}3622157$; $l\frac{2}{5}.2{,}3025851\,(e-f)=$ $0{,}8840870-2=l-0{,}0765750$; $\mathfrak{E}=0{,}3303266+0{,}0765750=0{,}4069016$; altsaa $s=\mathfrak{D}+\mathfrak{E}=-0{,}3968260+0{,}4069016=0{,}0100756$ og $S=\frac{3}{5}s$ $=0{,}00604536$.

3die Exempel. Rækken $\frac{1}{5}-\frac{1}{12}+\frac{1}{19}-\frac{1}{26}\ldots\ldots=s$ skal summeres. Her er $b=5$; $c=7$; $p=\frac{1}{7}.180^\circ$; altsaa $s=\frac{\pi}{14.\sin\frac{5}{7}.180^\circ}-\frac{2}{7}.2{,}3025851.$ $(\cos\frac{5}{7}.180^\circ\, l\sin\frac{1}{7}.90^\circ+\cos\frac{15}{7}.180^\circ\, l\sin\frac{3}{7}.90^\circ+\cos\frac{25}{7}.180^\circ\, l\sin\frac{5}{7}.90^\circ)=$ $\frac{\pi}{14\sin\frac{2}{7}.180^\circ}+\frac{2}{7}.2{,}3025851\,(\cos\frac{2}{7}.180^\circ\, l\sin\frac{1}{7}.90^\circ-\cos\frac{1}{7}.180^\circ\, l\sin\frac{3}{7}.90^\circ$ $-\cos\frac{3}{7}.180^\circ\, l\sin\frac{5}{7}.90^\circ)$, eller, kortere udtrykt, $s=\frac{\pi}{14\sin\frac{2}{7}.180^\circ}+\frac{2}{7}.2{,}3025851.$ $(e-f-g)$. Regningen udføres forresten paa denne Maade: $l\pi=0{,}4971499$; $Cl\,14$ $=0{,}8538720-2$; $Cl\sin\frac{2}{7}.180^\circ=0{,}1068868$; $l\frac{\pi}{14\sin\frac{2}{7}.180^\circ}=0{,}4579087$ $-1=l0{,}2870177$; $l\sin\frac{1}{7}.90^\circ=0{,}3473708-1=-0{,}6526292$; $ll\sin\frac{1}{7}.90^\circ$

$= 0{,}8146664-1$; $l\cos\frac{2}{7}\,.\,180^\circ = 0{,}7948294-1$; $le = 0{,}6094958-1 = l-0{,}4069076$; $l\sin\frac{3}{7}\,.\,90^\circ = 0{,}7948294-1 = -0{,}2051706$; $ll\sin\frac{3}{7}\,.\,90^\circ = 0{,}3121152-1$; $l\cos\frac{1}{7}\,.\,180^\circ = 0{,}9547098-1$; $lf = 0{,}2668250-1 = l-0{,}1848523$; $l\sin\frac{5}{7}\,.\,90^\circ = 0{,}9547098-1 = -0{,}0452902$; $ll\sin\frac{5}{7}\,.\,90^\circ = 0{,}6560042-2$; $l\cos\frac{3}{7}\,.\,180^\circ = 0{,}3473708-1$; $lg = 0{,}0033750-2 = l-0{,}0100780$; $e-f-g = -0{,}2119773$; $l(e-f-g) = 0{,}3262894-1$; $l2 = 0{,}3010300$; $Cl7 = 0{,}1549020-1$; $l2{,}3025851 = 0{,}3622157$; $l\frac{2}{7}\,.\,2{,}3025851(e-f-g) = 0{,}1444371-1 = l-0{,}1394560$; Altsaa $s = 0{,}2870177-0{,}1394560 = 0{,}1475617$.

4de Exempel. Skal Rækken $\frac{1}{1\,.\,3\,.\,5}+\frac{1}{7\,.\,9\,.\,11}+\frac{1}{13\,.\,15\,.\,17}\ldots\ldots\ldots = S$ summeres, da er, efter §. 14, $S = \frac{1}{8}((\frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13}+\ldots\ldots\ldots) - 2(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}\ldots\ldots) + (\frac{1}{5}+\frac{1}{11}+\frac{1}{17}\ldots\ldots)) = \frac{1}{8}((\frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13}\ldots\ldots) - \frac{2}{3}(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\ldots\ldots\ldots) + (\frac{1}{5}+\frac{1}{11}+\frac{1}{17}\ldots\ldots\ldots))$ eller, kortere udtrykt, $S = \frac{1}{8}({}'s - \frac{2}{3}{}''s + {}'''s)$.

For $'s$ er nu $b = 1$; $c = 6$ og $p = 30^\circ$; altsaa $'s = \frac{\pi(1+\cos 60^\circ)}{12\sin 60^\circ} - \frac{1}{3}\cos 60^\circ\, L\,\text{tang}\,30^\circ - \frac{1}{6}L0 + \frac{1}{6}L2$. For $''s$ er $b = 1$; $c = 2$; $p = 90^\circ$ og derfor bliver, efter hvad der er anført i Slutningen af §. 10 og §. 15, $''s = -\frac{1}{2}L0 - \frac{1}{2}L3 + \frac{1}{2}L2$. Endeligen er $b = 5$; $c = 6$; $p = 30^\circ$ i Rækken $'''s$, og vi faae $'''s = \frac{\pi(1+\cos 300^\circ)}{12\sin 300^\circ} - \frac{1}{3}\cos 300^\circ\, L\,\text{tang}\,30^\circ - \frac{1}{6}L0 + \frac{1}{6}L2 = -\frac{\pi(1+\cos 60^\circ)}{12\sin 60^\circ} - \frac{1}{3}\cos 60^\circ\, L\,\text{tang}\,30^\circ - \frac{1}{6}Lo + \frac{1}{6}L2$. Indsættes disse Værdier findes $S = \frac{1}{8}(-\frac{2}{3}\cos 60^\circ\, L\,\text{tang}\,30^\circ + \frac{1}{3}L3) = \frac{1}{24}\,.\,2{,}3025851\,.\,(-l\,\text{tang}\,30^\circ + l3)$. Dernæst er $-l\,\text{tang}\,30^\circ = -0{,}7614394-1 = 0{,}2385606$; $l3 = 0{,}4771213$; $-l\,\text{tang}\,30^\circ + l3 = 0{,}7156819$; $l(-l\,\text{tang}\,30^\circ + l3) = 0{,}8457200-1$; $l\,2{,}3025851 = 0{,}3622157$; $l\frac{1}{24} = 0{,}6197888-2$; $lS = 0{,}8367245-2$; altsaa $S = 0{,}06866326$.

Af disse Exempler skjønnes det let at Rækkernes Summeren efter denne Opløsnings-Methode er temmelig vidtløftig og det desto mere, jo større c er, især hvis c tillige er et ulige Tal. Kunde imidlertid $'\mathfrak{A}$ og $''\mathfrak{A}$ sammendrages ligesaameget som $\mathfrak{B}$, vilde Beregningen derved særdeles lettes. Men endogsaa da vilde Methoden dog ikke kunne anvendes til at summere et endeligt Antal af Rækkens Led; thi de i det Foregaaende udfundne Formler angive ikkun Summen af den hele uendelige Række fra det Led at regne, i hvilket $b - 1 < c$. Vi gaae derfor over til at udvikle en anden Opløsnings-Methode, efter hvilken ikke allene Beregningerne næsten i alle Tilfælde ere lettere end efter den anførte, men som tillige kan anvendes til at opløse alle de til disse Rækkers Summeren henhørende Opgaver.

Anden Opløsnings-Methode.

§. 17.

I §. 1 er det viist at $S = \frac{a}{c} s$, og at $s = \frac{1}{b} - \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+2c} - \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{b+4c} - \frac{1}{b+5c} \ldots\ldots$ Denne Række opløses nu paa følgende Maade:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{b}$$

$$-\frac{1}{b+c} = -\frac{1}{b} + \frac{c}{b^2} - \frac{c^2}{b^3} + \frac{c^3}{b^4} - \frac{c^4}{b^5} + \frac{c^5}{b^6} \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{b+2c} = \frac{1}{b} - \frac{2c}{b^2} + \frac{2^2c^2}{b^3} - \frac{2^3c^3}{b^4} + \frac{2^4c^4}{b^5} - \frac{2^5c^5}{b^6} \ldots\ldots$$

$$-\frac{1}{b+3c} = -\frac{1}{b} + \frac{3c}{b^2} - \frac{3^2c^2}{b^3} + \frac{3^3c^3}{b^4} - \frac{3^4c^4}{b^5} + \frac{3^5c^5}{b^6} \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{b+4c} = \frac{1}{b} - \frac{4c}{b^2} + \frac{4^2c^2}{b^3} - \frac{4^3c^3}{b^4} + \frac{4^4c^4}{b^5} - \frac{4^5c^5}{b^6} \ldots\ldots$$

$$-\frac{1}{b+5c} = -\frac{1}{b} + \frac{5c}{b^2} - \frac{5^2c^2}{b^3} + \frac{5^3c^3}{b^4} - \frac{5^4c^4}{b^5} + \frac{5^5c^5}{b^6} \ldots\ldots$$

o. s. v.

Ved nu at addere de verticale Rækker, og ved at sætte $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots\ldots = A$; $1 - 2 + 3 - 4 + 5 \ldots\ldots = B$; $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 \ldots\ldots = C$; $1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 \ldots\ldots = D$; $1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 \ldots\ldots = E$; $1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 \ldots\ldots = F$; o. s. v. faae vi følgende Udtryk for Rækken:

$$s = A \cdot \frac{1}{b} + B \cdot \frac{c}{b^2} - C \cdot \frac{c^2}{b^3} + D \cdot \frac{c^3}{b^4} - E \cdot \frac{c^4}{b^5} + F \cdot \frac{c^5}{b^6} \ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{b}\left(A+B\cdot\left(\frac{c}{b}\right)-C\left(\frac{c}{b}\right)^2+D\left(\frac{c}{b}\right)^3-E\left(\frac{c}{b}\right)^4+F\left(\frac{c}{b}\right)^5\ldots\ldots\right)$$

altsaa $S=\frac{a}{c}\ s=\frac{a}{bc}\left(A+B\left(\frac{c}{b}\right)-C\left(\frac{c}{b}\right)^2+D\left(\frac{c}{b}\right)^3-E\left(\frac{c}{b}\right)^4\right.$ $\left.+F\left(\frac{c}{b}\right)^5\ldots\ldots\right)$.

Disse Coefficienter kunne bestemmes ved Hjelp af Differential-Regningen; de kunne nemlig henføres til denne almindelige Form: $1^m-2^mx+3^mx^2-4^mx^3+5^mx^4-6^mx^5\ldots\ldots$, som sættes $=M$. Antages her $x=1$ og for m efterhaanden sættes 0; 1; 2; 3; o. s. v. fremkomme derved Coefficienterne A; B; C; D; o. s. v. Kaldes den paa M næstfølgende Række N, saaledes at $N=1^{m+1}-2^{m+1}x+3^{m+1}x^2-4^{m+1}x^3+5^{m+1}x^4-6^{m+1}x^5\ldots\ldots$, da er $N=\frac{d(Mx)}{dx}$. Kunde derfor et endeligt Udtryk for Summen af een iblandt disse Rækker angives, da kunde af denne igjen alle de følgende udledes. Nu er $A=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5\ldots\ldots=\frac{1}{1+x}$; altsaa $B=\frac{d(Ax)}{dx}=\frac{1}{(1+x)^2}$; $C=\frac{d(Bx)}{dx}=\frac{1-x}{(1+x)^3}$; $D=\frac{d(Cx)}{dx}=\frac{1-4x+x^2}{(1+x)^4}$; $E=\frac{d(Dx)}{dx}=\frac{1-11x+11x^2-x^3}{(1+x)^5}$; $F=\frac{d(Ex)}{dx}=\frac{1-26x+66x^2-26x^3+x^4}{(1+x)^6}$; $G=\frac{d(Fx)}{dx}=\frac{1-57x+302x^2-302x^3+57x^4-x^5}{(1+x)^7}$; $H=\frac{d(Gx)}{dx}=\frac{1-120x+1191x^2-2416x^3+1191x^4-120x^5+x^6}{(1+x)^8}$; $I=\frac{d(Hx)}{dx}=\frac{1-247x+4293x^2-15619x^3+15619x^4-4293x^5+247x^6-x^7}{(1+x)^9}$; o. s. v.

Anvendes disse Bestemmelser paa vort specielle Tilfælde, i hvilket nemlig $x=1$, findes $A=\frac{1}{2}$; $B=\frac{1}{4}$; $C=0$; $D=-\frac{1}{8}$; $E=0$; $F=\frac{1}{4}$; $G=0$; $H=-\frac{17}{16}$; $I=0$. Følgeligen er $s=\frac{1}{b}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{c}{b}-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^3+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^5-\frac{17}{16}\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^7\ldots\ldots\right)$ og $S=\frac{a}{bc}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{c}{b}-\frac{1}{8}\left(\frac{c}{b}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{c}{b}\right)^5-\frac{17}{16}\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^7\ldots\ldots\right)$.

§. 18.

For at bestemme den Grad af Nøiagtighed, vi kunne vente os af denne Methode, ved blot at betjene os af den ovenfor bestemte Deel af Rækken, ville vi anvende den paa denne Række: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots\ldots$ der, som bekjendt, er $= L2$, og paa de Rækker, som fremkomme af denne ved efterhaanden forfra at borttage 1; 2; 3; o. s. v. Led, hvorved b efterhaanden faaer Værdien 1; 2; 3; o. s. v.; c derimod beholder Værdien 1. For Korthedს Skyld vil jeg tillige sætte den beregnede Deel af Rækken $s = \mathfrak{A}$ og Resten $= \mathfrak{B}$, saaledes at

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{c}{b}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{c}{b}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{c}{b}\right)^5 - \frac{17}{16}.\left(\frac{c}{b}\right)^7\right) \text{ og}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{b}\left(K.\left(\frac{c}{b}\right)^9 - M\left(\frac{c}{b}\right)^{10} + N\left(\frac{c}{b}\right)^{11} - O\left(\frac{c}{b}\right)^{12} \ldots\ldots\right).$$

Resultatet af disse Bestemmelser sees af følgende Tabel:

b	c	s	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$
1	1	0,6931471806	— 0,1875000000	0,8806471806
2	1	0,3068528194	0,3044433594	0,0024094600
3	1	0,1931471806	0,1930822283	0,0000649523
4	1	0,1401861527	0,1401815414	0,0000046113
5	1	0,1098138473	0,1098132800	0,0000005673
6	1	0,0901861527	0,0901860529	0,0000000998
7	1	0,0764805139	0,0764804913	0,0000000226
8	1	0,0663766290	0,0663766228	0,0000000062
9	1	0,0586233710	0,0586233691	0,0000000019
10	1	0,0524877401	0,0524877394	0,0000000007

Heraf sees at jo større b er imod c, det er jo mindre $\frac{c}{b}$ er, jo mere nærmer $\mathfrak{A}$ sig til Værdien af s, jo mindre bliver $\mathfrak{B}$ og med jo større Sikkerhed kan den bortkastes. Ved Anvendelsen af denne Methode iagttages derfor Følgende: Dersom b ikke allerede er flere Gange større end c (omtrent fra 5 til 10 Gange større, efter den Nøiagtighed som udfordres) da adderes paa den sædvanlige Maade de første Led af Rækken, indtil Nævneren af den første Brøk i den tilbageblevne Række er det behørige

Antal Gange større end c. Derpaa beregnes $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$ bortkastes), og til $\mathfrak{A}$ lægges Summen af Rækkens første Led, hvilket da udgjør s, hvoraf igjen S kan beregnes.

§. 19.

Denne Opløsnings-Methode ville vi, for Sammenligningens Skyld, oplyse ved de samme Exempler som ere beregnede i §. 16 efter den første, og tillige anvende den paa saadanne Opgaver, som ikke kunne opløses ved den.

1ste Exempel. Rækken $\frac{2}{3.7}+\frac{2}{11.15}+\frac{2}{19.23}+\frac{2}{27.31}\ldots\ldots = S$ skal summeres. Da her $b=3$ og $c=4$, adderes Rækkens 4 første Led særskilt, hvorved vi faae $\frac{2}{3.7}+\frac{2}{11.15}+\frac{2}{19.23}+\frac{2}{27.31}=0{,}11432545$. I den tilbageblevne Række $\frac{2}{35.39}+\frac{2}{43.47}\ldots\ldots$ som sættes $=\mathfrak{S}$, er $a=2$; $b=35$; $c=4$; altsaa $lc=0{,}6020600$; $lb=1{,}5440680$; $l\frac{c}{b}=0{,}0579920-1=l0{,}1142854$; $l\left(\frac{c}{b}\right)^3=0{,}1739760-3=l0{,}0014920$; $l\left(\frac{c}{b}\right)^5=0{,}2899600-5=l0{,}0000195$; $l\left(\frac{c}{b}\right)^7=0{,}4059440-7=l0{,}00000025$; følgelig $\mathfrak{S}=\frac{1}{70}(0{,}5+0{,}0285713-0{,}0001865+0{,}0000049-0{,}0000003)=0{,}00754842$ og $S=0{,}11432545+0{,}00754842=0{,}12187387$.

2det Exempel. At summere Rækken $\frac{3}{52.57}+\frac{3}{62.67}+\frac{3}{72.77}\ldots\ldots\ldots = S$. Her er $a=3$; $b=52$ og $c=5$, vi kunne derfor strax gaae over til Beregningen, som udføres saaledes: $lc=0{,}6989700$; $lb=1{,}7160033$; $l\frac{c}{b}=0{,}9829667-2=l0{,}0961538$; $l\left(\frac{c}{b}\right)^3=0{,}9489001-4=l0{,}0008890$; $l\left(\frac{c}{b}\right)^5=0{,}9148335-6=l0{,}0000082$; altsaa $S=\frac{3}{260}(0{,}5+0{,}0240384-0{,}0001111+0{,}0000021)=\frac{3}{260}\cdot 0{,}5239294=0{,}00604536$.

3die Exempel. Rækken $\frac{1}{5}-\frac{1}{12}+\frac{1}{19}-\frac{1}{26}\ldots\ldots = s$ skal summeres. Da $b=5$ og $c=7$, maae nogle af Rækkens første Led summeres særskilt. Nu er

$s = 7\left(\frac{1}{5 \cdot 12} + \frac{1}{19 \cdot 26} + \frac{1}{33 \cdot 40} + \frac{1}{47 \cdot 54}\right) + \frac{1}{61} - \frac{1}{68} \ldots\ldots$; men $7\left(\frac{1}{5 \cdot 12} + \frac{1}{19 \cdot 26} + \frac{1}{33 \cdot 40} + \frac{1}{47 \cdot 54}\right) = 0{,}1388978$. I den tilbageblevne Række, som vi sætte $= s$, er $b = 61$ og $c = 7$; altsaa $l\left(\frac{c}{b}\right) = 0{,}0597682 - 1 = l0{,}1147541$; $l\left(\frac{c}{b}\right)^3 = 0{,}1793046 - 3 = l0{,}0015111$; $l\left(\frac{c}{b}\right)^5 = 0{,}2988410 - 5 = l0{,}0000199$; $l\left(\frac{c}{b}\right)^7 = 0{,}4183774 - 7 = l0{,}00000026$; $s = \frac{1}{61}(0{,}5 + 0{,}0286885 - 0{,}0001889 + 0{,}0000050 - 0{,}0000003) = \frac{1}{61} \cdot 0{,}5026847 = 0{,}0086640$. Følgelig $s = 0{,}1388978 + 0{,}0086640 = 0{,}1475618$.

4de Exempel. At summere Rækken $\frac{3}{5\sqrt{3}(5\sqrt{3}+\sqrt{2})} + \frac{3}{(5\sqrt{3}+2\sqrt{2})(5\sqrt{3}+3\sqrt{2})} \ldots\ldots = S$. Her er $a = 3$; $b = 5\sqrt{3}$ og $c = \sqrt{2}$ altsaa $S = \frac{3}{5\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{c}{b}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{c}{b}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{c}{b}\right)^5 - \frac{17}{16}\left(\frac{c}{b}\right)^7\right)$. Nu er $l\sqrt{2} = 0{,}1505150$; $l5\sqrt{3} = 0{,}93753065$; $l\frac{c}{b} = 0{,}21298435 - 1 = l0{,}1632993$; $l\left(\frac{c}{b}\right)^3 = 0{,}63895305 - 3 = l0{,}0043546$; $l\left(\frac{c}{b}\right)^5 = 0{,}06492175 - 4 = l0{,}0001161$; $l\left(\frac{c}{b}\right)^7 = 0{,}49089045 - 6 = l0{,}0000031$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{c}{b} - \frac{1}{8}\left(\frac{c}{b}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{c}{b}\right)^5 - \frac{17}{16}\left(\frac{c}{b}\right)^7 = 0{,}5 + 0{,}0408248 - 0{,}0005443 + 0{,}0000290 - 0{,}0000033 = 0{,}5403062$; $l0{,}5403062 = 0{,}7326400 - 1$; $l3 = 0{,}4771213$; $Cl5 = 0{,}3010300 - 1$; $Cl\sqrt{6} = 0{,}6109243 - 1$; $lS = 0{,}1217156 - 1 = l0{,}1323475$.

5te Exempel. At bestemme Summen af de første 100 Led af denne Række $\frac{3}{52 \cdot 57} + \frac{3}{62 \cdot 67} + \frac{3}{72 \cdot 77} + \ldots\ldots = S$. Af det 2det Exempel sees at den hele Rækkes Sum er $= 0{,}00604536$. Borttages de første 100 Led, bliver den resterende Række, hvis Sum sættes $= \mathfrak{S}$, denne: $\frac{3}{1052 \cdot 1057} + \frac{3}{1062 \cdot 1067} \ldots\ldots$ Her er $a = 3$; $b = 1052$ og $c = 5$; $l\frac{c}{b} = 0{,}6769543 - 3 = l0{,}0047528$. I dette Tilfælde behøves ikke flere Led at beregnes. Heraf findes $\mathfrak{S} = \frac{3}{5260}\ (0{,}5 + 0{,}0011882) = 0{,}00028585$, altsaa Summen af Rækkens 100 første Led $= 0{,}00604536 - 0{,}00028585 = 0{,}00575951$.

§. 20.

I §. 14 er det viist hvorledes de der omtalte Rækker kunne summeres ved Hjelp af den 1ste Opløsnings-Methode; det skal nu vises hvorledes det samme Øjemed kan opnaaes ved een, med den i §. 17 overeensstemmende, Fremgangs-Maade.

Efter §. 14 er $\frac{a}{b(b+c)(b+2c)} + \frac{a}{(b+3c)(b+4c)(b+5c)} + \ldots\ldots\ldots =$
$\frac{a}{2c^2}\left(\frac{1}{b} - \frac{2}{b+c} + \frac{1}{b+2c} + \frac{1}{b+3c} - \frac{2}{b+4c} + \frac{1}{b+5c} \ldots\ldots\right)$ det er $S = \frac{a}{2c^2}\, s$.

Opløses nu Ledene i s, ligesom det er skeet i §. 17, bliver

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{b}$$

$$-\frac{2}{b+c} = -\frac{2}{b} + \frac{2c}{b^2} - \frac{2c^2}{b^3} + \frac{2c^3}{b^4} - \frac{2c^4}{b^5} \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{b+2c} = \frac{1}{b} - \frac{2c}{b^2} + \frac{2^2c^2}{b^3} - \frac{2^3c^3}{b^4} + \frac{2^4c^4}{b^5} \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{b+3c} = \frac{1}{b} - \frac{3c}{b^2} + \frac{3^2c^2}{b^3} - \frac{3^3c^3}{b^4} + \frac{3^4c^4}{b^5} \ldots\ldots$$

$$-\frac{2}{b+4c} = -\frac{2}{b} + \frac{2.4c}{b^2} - \frac{2.4^2c^2}{b^3} + \frac{2.4^3c^3}{b^4} - \frac{2.4^4c^4}{b^5} \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{b+5c} = \frac{1}{b} - \frac{5c}{b^2} + \frac{5^2c^2}{b^3} - \frac{5^3c^3}{b^4} + \frac{5^4c^4}{b^5} \ldots\ldots$$

o. s. v.

Adderes dernæst de verticale Rækker og $1-2+1+1-2+1\ldots\ldots$ sættes $=A$; $2-2-3+2.4-5-6\ldots.=B$; $2-2^2+3^2-2.4^2+5^2+6^2\ldots.$ $=C$; $2-2^3-3^3+2.4^3-5^3-6^3\ldots..=D$; $2-2^4-3^4+2.4^4-5^4-6^4$ $\ldots..=E$; o. s. v., da bliver $s=A.\frac{1}{b}+B.\frac{c}{b^2}-C.\frac{c^2}{b^3}+D.\frac{c^3}{b^4}-E.\frac{c^4}{b^5}$ $\ldots..=\frac{1}{b}\left(A+B.\left(\frac{c}{b}\right)-C\left(\frac{c}{b}\right)^2+D\left(\frac{c}{b}\right)^3-E\left(\frac{c}{b}\right)^4\ldots..\right)$; altsaa $S=\frac{a}{2bc^2}\left(A+B\left(\frac{c}{b}\right)-C\left(\frac{c}{b}\right)^2+D\left(\frac{c}{b}\right)^3-E\left(\frac{c}{b}\right)^4\ldots\ldots\right)$.

Summeringen af S beroer følgeligen paa Bestemmelsen af Coefficienterne A; B; C; D; E; o. s. v. Disse Coefficienter kunne nu henføres til denne almindelige Form: $e.1^m+f.2^m x+g.3^m x^2+h.4^m x^3+i.5^m x^4+k.6^m x^5\ldots\ldots$, som sættes $=M$. Sættes dernæst $e.1^{m+1}+f.2^{m+1}x+g.3^{m+1}x^2+h.4^{m+1}x^3+i.5^{m+1}x^4$ $\ldots\ldots=N$, da er $N=\frac{d(Mx)}{dx}$, hvoraf sees at en efterfølgende af disse Coefficienter stedse ved Differential-Regningens Hjelp kan udledes af den foregaaende. Det simpleste Tilfælde for M er naar $m=0$, da er $M=e+fx+gx^2+hx^3+ix^4+kx^5\ldots..$, en Række, hvis Sum, blandt andre Tilfælde, algebraisk kan angives, naar e; f; g; $\ldots..$ ere periodisk tilbagevendende og det skjønnes let at dette forholder sig saaledes med det Slags Rækker vi her omtale. For A er i vort specielle Tilfælde, $e=1$; $f=-2$; $g=h=1$; $i=-2$; $k=l=1$; o. s. v., hvoraf $A=1-2x+x^2+x^3$ $-2x^4+x^6\ldots\ldots=(1-2x+x^2)(1+x^3+x^6+x^9\ldots.)=\frac{1-2x+x^2}{1-x^3}$ $=\frac{1-x}{1+x+x^2}$. For de andre Coefficienter B; C; D; E; o. s. v. er $e=2$; $f=g=-1$; $h=2$; $i=k=-1$; o. s. v. Sættes $m=0$, findes $M=$ $2-x-x^2+2x^3-x^4-x^5\ldots..=(2-x-x^2)(1+x^3+x^6+x^9\ldots\ldots)$ $=\frac{2-x-x^2}{1-x^3}=\frac{2+x}{1+x+x^2}$. Heraf udledes igjen:

$$B=\frac{d(Mx)}{dx}=\frac{2+2x-x^2}{(1+x+x^2)^2}$$

$$C = \frac{d(Bx)}{dx} = \frac{2 + 2x - 9x^2 - 5x^3 + x^4}{(1 + x + x^2)^3}$$

$$D = \frac{d(Cx)}{dx} = \frac{2 - 39x^2 - 28x^3 + 27x^4 + 12x^5 - x^6}{(1 + x + x^2)^4}$$

$$E = \frac{d(Dx)}{dx} = \frac{2 - 6x - 131x^2 - 73x^3 + 330x^4 + 211x^5 - 64x^6 - 27x^7 + x^8}{(1 + x + x^2)^5}$$

$$F = \frac{d(Ex)}{dx} = \frac{2 - 20x - 393x^2 + 18x^3 + 2640x^4 + 1704x^5 - 1887x^6 - 1188x^7 + 120x^8 + 58x^9 - x^{10}}{(1 + x + x^2)^6}$$

o. s. v.

Nu er her $x = 1$, hvoraf findes $A = 0$; $B = \frac{1}{3}$; $C = -\frac{1}{3}$; $D = -\frac{1}{3}$; $E = 1$; $F = \frac{13}{9}$; o. s. v.

Følgeligen bliver:

$$s = \frac{1}{b}\left(\tfrac{1}{3}\left(\frac{c}{b}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{c}{b}\right)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{c}{b}\right)^3 - \left(\frac{c}{b}\right)^4 + \tfrac{13}{9}\left(\frac{c}{b}\right)^5 \ldots\ldots\right) \text{ og}$$

$$S = \frac{a}{2bc^2}\left(\tfrac{1}{3}\left(\frac{c}{b}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{c}{b}\right)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{c}{b}\right)^3 - \left(\frac{c}{b}\right)^4 + \tfrac{13}{9}\left(\frac{c}{b}\right)^5 \ldots\ldots\right)$$

I Øvrigt bliver her Fremgangsmaaden saaledes som det er anført i §. 18. Til at oplyse dette, kan eet Exempel være tilstrækkeligt og dertil vælges det i §. 16 beregnede 4de

Exempel. At summere Rækken $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{7.9.11} + \frac{1}{13.15.17} \ldots\ldots = S$. Da her $b = 1$ og $c = 2$, adderes først paa sædvanlig Maade de første 3 Led af Rækken, hvorved vi finde $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{7.9.11} + \frac{1}{13.15.17} = 0{,}06841133$. I den tilbageblevne Række $\frac{1}{19.21.23} + \frac{1}{25.27.29} \ldots\ldots$, som sættes $= \mathfrak{S}$, er $a = 1$; $b = 19$ og $c = 2$; altsaa $\frac{c}{b} = \frac{2}{19}$; $l\left(\frac{c}{b}\right) = 0{,}0222764 - 1 = l0{,}10526316$; $l\left(\frac{c}{b}\right)^2 = 0{,}0445528 - 2 = l0{,}01108033$; $l\left(\frac{c}{b}\right)^3 = 0{,}0668292 - 3 = l0{,}00116635$; $l\left(\frac{c}{b}\right)^4 = 0{,}0891056 - 4 = l0{,}00012277$; $l\left(\frac{c}{b}\right)^5 = 0{,}1113820 - 5 = l0{,}00001292$;

$S = \frac{1}{152}(0{,}03508772 + 0{,}00369344 - 0{,}00038878 - 0{,}00012277 + 0{,}00001866) = \frac{1}{152} \cdot 0{,}03828827 = 0{,}00025190$. Følgelig $S = 0{,}06841133 + 0{,}00025190 = 0{,}06866323$, hvilket paa det sidste Ciffer nær stemmer overeens med hvad der forhen er fundet.

Til Slutning tilføies at der ingen Vanskelighed vilde have at udlede lignende Summations-Formler for de øvrige i §. 14 omhandlede uendelige Rækker.

Rettelser.

Side 4 Linie 5 fra oven: $\frac{x}{b}$ skal være: $\frac{x^b}{b}$

— - — 4 fra neden: mindre c, skal være: mindre end c

— 5 — 11 —— Et —— En

— 15 — 13 —— $-\frac{c}{\sin bp\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{2c\sin bp}$ skal være:

$$-\frac{c\,(1+\cos 2bp)}{\sin 2bp\sqrt{-1}} = \frac{\pi\,(1+\cos 2bp)}{2c\sin 2bp}$$

Schema

over

Examinationens Gang

ved den offentlige Examen

i

Sorøe Academies Skole

den 25de Juli 1825 og følgende Dage.

Mundtlige Prøver.

		Første Værelse.			Andet Værelse.		
25de Juli.	Formiddag.	Latin . . . (Livius, Cicero, Virgil).	8-10	IV Classe.	Dansk	8-10½	I Classe.
		Tydsk . . .	10¼-12½				
	Eftermiddag.	Dansk . . .	3-5	III Cl.	Historie og Geographie . .	3-6	I Cl.
26de Juli.	Formiddag.	Religion . .	10¼-12	IV Cl.	Religion . . .	8-10	II Cl.
		Tydsk . . .	8-10	III Cl.	Fransk	10¼-12½	
	Eftermiddag.	Engelsk . .	3-5	III Cl.	Latin	3-6	I Cl.
27de Juli.	Formiddag.	Latin . . . (Cicero, Horats).	8-10	IV Cl.	Historie og Geographie . .	8-11	II Cl.
		Græsk . . .	10¼-12½				
	Eftermiddag.	Historie og Geographie	3-6	III Cl.	Latin	3-6	
					Fransk	3-5	I Cl.
28de Juli.	Formiddag.	Dansk . . .	8-10	IV Cl.			
		Religion . .	8-10	III Cl.			
		Arithmetik og Geometrie .	10¼-12½		Dansk	10¼-12½	II Cl.
	Eftermiddag.	Historie og Geographie	3-6	IV Cl.	Tydsk	3-5	I Cl.
29de Juli.	Formiddag.	Engelsk . .	8-10	IV Cl.	Arithmetik . . .	8-10	II Cl.
		Fransk . .	10¼-12	III Cl.	Græsk	10¼-12½	
					Religion . . .	8-10	I Cl.
					Naturhistorie .	10¼-12	
	Eftermiddag.	Fransk . .	3-5	IV Cl.			
		Latin . . .	3-6	III Cl.	Arithmetik . .	3-5	I Cl.
30te Juli.	Formiddag.	Arithmetik og Geometrie .	10¼-12½	IV Cl.			
		Græsk . . .	8-10	III Cl.	Tydsk	8-10	II Cl.

31te Juli. Formiddag. Musikprøve og Translocation. Kl. 8.

Skriftlige Prøver.

25de Juli.	Formiddag.	Latinsk Stil	8-12	III Classe.
		Fransk Stil	8-10	II Cl.
		Tegning	$10\frac{1}{4}$-12	II Cl.
	Eftermiddag.	Latinsk Stil	3-6	IV Cl.
		Latinsk Stil	3-6	II Cl.
26de Juli.	Formiddag.	Latinsk Oversættelse	8-10	IV Cl.
		Religionsprøve	$10\frac{1}{4}$-12	III Cl.
		Orthograghie	8-11	I Cl.
	Eftermiddag.	Dansk Udarbeidelse	3-6	IV Cl.
		Dansk Stil	3-5	II Cl.
27de Juli.	Formiddag.	Fransk Stil	8-10	III Cl.
		Calligraphie	$10\frac{1}{4}$-12	III Cl.
		Latinsk Stil	8-11	I Cl.
	Eftermiddag.	Historisk Udarbeidelse	3-6	IV Cl.
28de Juli.	Formiddag.	Fransk Stil	$10\frac{1}{4}$-$12\frac{1}{2}$	IV Cl.
		Tegning	8-10	I Cl.
		Religionsprøve	8-10	II Cl.
	Eftermiddag.	Tydsk Stil	3-5	II Cl.
		Dansk Stil	3-6	III Cl.
29de Juli.	Formiddag.	Religionsprøve	$10\frac{1}{4}$-$12\frac{1}{2}$	IV Cl.
		Tydsk Stil	8-10	III Cl.
	Eftermiddag.	Engelsk Stil	5-7	IV Cl.
		Calligraphie	3-5	II Cl.
30te Juli.	Formiddag.	Tydsk Stil	8-10	IV Cl.
		Tegning	$10\frac{1}{4}$-12	III Cl.
		Calligraphie	8-10	I Cl.

Svømning 12-1
Gymnastik 4-6

Ungdommens Fædre og Videnskabernes og Academiets Velyndere indbydes herved til at overvære de mundtlige Prøver og hædre Læreres og Lærlinges Flid med deres Nærværelse.

Sorøe den 1ste Juli 1825.

Tauber.