Indbydelsesskrift

til

den offentlige Examen

i

Slagelse lærde Skole

i September 1829.

1829

Slagelse.

Trykt hos Peter Magnus.

De Platoniske Legemer

analytisk behandlede

af

J. Andresen,

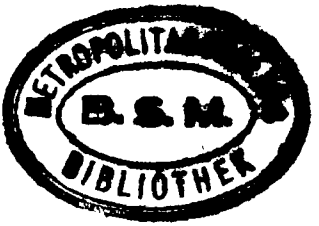
Adjunct.

Indbydelsesskrift

til

den offentlige Examen i Slagelse lærde Skole

i September 1829.



Slagelse.
Trykt hos Peter Magnus.

Blandt de vigtigste Anvendelser af den mathematiske Analysis fortjener vistnok den, i eet Udtryk at indfatte flere, ved første Anskuelse meget heterogent ladende Gjenstande, en af de første Pladser. Er dette almindelige Udtryk fundet, udledes deraf letteligen de særegne, der passe i hvert særligt Tilfælde. At anføre Exempler herpaa turde være saavel upassende, som overflødigt; men en saadan Anvendelse af Analysen vil Opløsningen af følgende Opgave vise:

Naar en Kugles Diameter er given, ved almindelige Formler at udtrykke Siden, Overfladen, og Indholdet af de fem regulaire, i Kuglen indskrivelige Legemer. [1])

[1]) Hvorvel Wolf (Syst. math. I. p. 319) udtrykker sig: *hæc doctrina* (sc. de corporibus regularibus) *rarissimi est usus*, turde man dog vel med Rette kunne modsætte denne Dom Følgende: at deres Egenskaber i og for sig give Anledning til meget interessante Undersøgelser; at de have den historiske Mærk-

§. 1.

Da bestemte Udtryk beholdes i det Følgende, vil det — især da ingen Figurer ledsage Afhandlingen — være rigtigst her at samle alle de senere forekommende Udtryk under Ét:

d = Kuglens Diameter.

x = Det indskrevne Legems Side.

A = Det indskrevne Legems Overflade.

S = Det indskrevne Legems Indhold.

φ = Den plane Vinkel, der danner den regulaire legemlige Vinkel.

ψ = Centervinklen i den regulaire Figur, der kan tænkes lagt under den regulaire legemlige Vinkel i en Afstand fra der

---

værdighed, at næsten alle Oldtidens Mathematikere og Philosopher fortrinligen beskæftigede sig med dem, saasom Plato (efter hvem de have faaet Navnet Platoniske Legemer), Euclides (om hvem Petrus Ramus (schol. math. lib. 21 p. 252, citeret af Gilbert: Geom. I. P. 223) siger, at Hovedøiemedet for Elementernes Affattelse var disse Legemers Undersøgelse), Hypsicles fra Alexandrien, og de af ham citerede Mathematikere (El. XIV og XV); og endeligen, at de i den physiske Chemie i den nyere Tid alle, paa Icosaedret nær, paa en afgiørende Maade fremtræde i Chrystallisationslæren (Hauy. tr. de miner. I. pag. 28. 273 o. f.); — ligesom og den Fuldstændighed, hvormed Wolf selv (l. c.) og især Bertrand (cours nouveau d. m. I. p. 271 sq.) have undersøgt disse Legemer, hvert for sig, turde tale mod Uvigtigheden af denne Undersøgelse. Hvad iøvrigt Benævnelsen: Platoniske Legemer, og Platos Anskuelser af dem angaaer, vil jeg henvise til §. 15.

legemlige Vinkels Toppunkt paa dens Side liig Legemets Side (Projections-vinklen for φ). [1])

z = Denne Figurs Side.

ζ = Denne Figurs mindste Radius.

ϑ = Denne Figurs største Radius.

y = Perpendikulairen fra den legemlige Vinkels Toppunkt ned paa denne Figurs Side.

η = Perpendikulairen fra den legemlige Vinkels Toppunkt ned paa Figuren, der dannes i Skjæringsplanet. [2])

---

[1]) De hidhørende Sætninger findes hos Bertrand (l. c. p. 254.). Denne Figur kan iøvrigt kun blive den ligesidede Triangel, Qvadratet, og den regulaire Femkant. Man kunde maaskee ønske sig en anden Definition, end Bertrands, af en regulair legemlig Vinkel; han definerer nemlig (l. c. p. 253.) en regulair legemlig Vinkel ved den, hvis plane Vinkler (les faces) ere lige store og lige inclinerede mod hinanden. Bedre turde man definere en regulair legemlig Vinkel ved den, der dannes af plane Vinkler, der kunne være Polygonvinkler i regulaire Figurer, det er, der kunne indfattes under Formlen $\frac{(2n-4).90^\circ}{n}$, hvori n kan betegne ethvert heelt positivt Tal; ved denne Definition vil den Indskrænkning, som Bertrand (l. c. p. 256. 260.) har anført, bortfalde. Værdierne for disse Vinkler findes i Tabellerne ved §. 3.

[2]) Denne Linie vil forlænget blive en Diameter (Bert. l. c. p. 256.); forlænges nemlig Skjæringsplanet, bliver det, uden i Octaetret (hvori det bliver en Storcirkel) en mindre Cirkel, hvori Figuren er indskreven; Perpendikulairen træffer Cirklens Centrum; den rette Linie fra Kuglens Centrum til enhver min-

ξ = den største Radius i den regulaire Figur, ved hvilken Legemet er construeret

ρ = Denne Figurs mindste Radius.

m = Antallet af denne Figurs Sider.

a = Dens Areal.

n = Antallet af de Figurer, af hvilke Legemet construeres.

r = Perpendikulairen fra Kuglens Centrum paa Legemets Sideflade. [1])

Endvidere bemærkes her, for Fuldstændigheds Skyld, at senere ville forekomme:

$\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$, og

$\beta = \frac{1}{2}(\psi - \varphi)$.

Man vil let indsee, at $\psi > \varphi$; thi naar p betegner Antallet af de plane Vinkler, der danne det

---

dre Cirkels Centrum er lodret paa Cirklen; altsaa udgiøre Perpendikulairen og denne Linie kun eenret Linie (El. XI. 2. I. 24.), der er dragen fra et Punkt i Kuglens Peripherie til Centrum, og som følgeligen forlænget bliver en Diameter i Kuglen. Man mærke videre, at i Tetraedret vil Perpendikulairen selv gaae igiennem Centret, og i Octaedret er Centret Perpendikulairens Endepunkt. Videre indsees letteligen, at denne Figur er lodret paa Kuglens Diameter (El. XI. def. 3.).

[1]) Denne Linie kan kaldes Legemets mindste Radius. Da nemligen alle Sidefladerne ere congruente, ere de dem omskrevne Cirkler det og; altsaa Perpendikulairerne det og; altsaa vil r være Radius til den i Legemet indskrevne Kugle.

Legemlige, bliver: $p\varphi < 4R$ [1])

$$\underline{p\psi = 4R \text{ [2])}}$$

$$\underline{p\varphi < p\psi}$$

$$\varphi < \psi$$

deraf følger, at $(\psi - \varphi)$ altid bliver positiv.

Endvidere følger, at

$$\varphi = \alpha - \beta, \text{ og}$$

$$\psi = \alpha + \beta.$$

§. 2.

Naar Kuglens Diameter er given, at finde det indskrevne regulaire Legems Side.

Der dannes en retvinklet Triangel af x, y og $\frac{1}{2}$ z; i denne er:

$$\underline{x : \tfrac{1}{2} z = \text{sin. tot.} : \text{sin. } \tfrac{1}{2}\varphi}$$

$$z = 2\,x.\ \text{sin. } \tfrac{1}{2}\varphi; \qquad \text{og}$$

$$\underline{x : y = \text{sin. tot.} : \text{cos. } \tfrac{1}{2}\varphi}$$

$$y = x.\ \text{cos. } \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Endvidere dannes i Skjæringsfiguren en retvinklet Triangel af ϑ, $\frac{1}{2}$ z og ζ; [3]) altsaa

---

[1]) El. XI. 21.

[2]) El. I. 15 corr.

[3]) I samme Triangel haves følgende Proportion:

$$\underline{\vartheta : \tfrac{1}{2} z = \text{sin. tot.} : \text{sin. } \tfrac{1}{2}\psi.}$$

$$\underline{\vartheta : x.\ \text{sin. } \tfrac{1}{2}\varphi = \text{sin. tot.} : \text{sin. } \tfrac{1}{2}\psi.}$$

$$\vartheta = x.\ \frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}\varphi.}{\text{sin. } \tfrac{1}{2}\psi.}$$

$$\frac{1}{2} z : \zeta = \sin. \text{ tot.} : \cot. \tfrac{1}{2} \psi.$$

$$\zeta = \tfrac{1}{2} z. \cot. \tfrac{1}{2} \psi; \qquad \text{nu er}$$

$$\frac{1}{2} z = x. \sin. \tfrac{1}{2} \varphi.$$

$$\zeta = x. \sin. \tfrac{1}{2} \varphi. \cot. \tfrac{1}{2} \psi.$$

$$= x. \frac{\sin. \tfrac{1}{2} \varphi. \cos. \tfrac{1}{2} \psi.}{\sin. \tfrac{1}{2} \psi.}$$

Videre dannes af y, ζ, η en retvinklet Trian gel, hvori:

$$\eta^2 = y^2 - \zeta^2$$

$$= x^2. \cos. {}^2\tfrac{1}{2} \varphi \div x^2 \left(\frac{\sin. {}^2\tfrac{1}{2} \varphi. \cos. {}^2\tfrac{1}{2} \psi.}{\sin. {}^2\tfrac{1}{2} \psi.}\right)$$

$$= x^2 \left(\frac{\cos. {}^2\tfrac{1}{2} \varphi. \sin. {}^2\tfrac{1}{2} \psi \div \sin. {}^2\tfrac{1}{2} \varphi. \cos. {}^2\tfrac{1}{2} \psi.}{\sin. {}^2\tfrac{1}{2} \psi.}\right)$$

$$= x^2 \left(\frac{\sin. \tfrac{1}{2} [\varphi + \psi]. \sin. \tfrac{1}{2} [\psi - \varphi]}{\sin. {}^2\tfrac{1}{2} \psi.}\right) \text{[1]}$$

$$= x^2. \frac{\sin. \alpha. \sin. \beta.}{\sin. {}^2\tfrac{1}{2} \psi.}$$

$$\eta = x. \frac{\sqrt{\sin. \alpha. \sin. \beta.}}{\sin. \tfrac{1}{2} \psi.}$$

I det Følgende anvendes vel ikke denne Formel men mueligen kunde den anvendes i Chrystallogra phien, da den udtrykker Radien til den Cirkel, der kan lægges gjennem Sidefladerne af en regulair legemlig Vinkel, hvis plane Vinkel ikke er $< 60°$ (Bert. l. c. p. 256) i en Afstand paa Siden fra den legemlige Vin kels Toppunkt $= x$.

[1]) Her anvendes Formlen: $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$, og de Formler, der udtrykke sin. $(p + q)$ og sin. $(p - q)$.

Endeligen er i Halvcirklen over Kuglens Diameter gjennem Legemets Sides Endepunkt:

$$d : x = x : \eta \text{ [1]}$$

$$d : x = 1 : \frac{\sqrt{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ \beta.}}{\sin.\ \frac{1}{2}\psi.}$$

Altsaa opløses Opgaven ved følgende almindelige Formel:

$$x = d.\ \frac{\sqrt{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ \beta.}}{\sin.\ \frac{1}{2}\psi.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A.)$$

§. 3.

Nu kan man let fremstille de særlige Formler for hvert enkelt Legems Side; og, for at undgaae Gjentagelser, indeholde følgende Tabeller Værdierne af de ved hvert Legeme forekommende Vinkler, samt de analytiske Udtryk for deres trigonometriske Linier, forsaavidt de i det Følgende anvendes. [2])

I.

	φ	$\frac{1}{2}\varphi$	ψ	$\frac{1}{2}\psi$	α	β
Tetraedret	60°	30°	120°	60°	90°	30°
Octaedret.....	60°	30°	90°	45°	75°	15°
Icosaedret	60°	30°	72°	36°	66°	6°
Hexaedret.....	90°	45°	120°	60°	105°	15°
Dodecaedret.....	108°	54°	120°	60°	114°	6°

[1]) El. VI., 8. corr. jfr. Camerer. obs. 3 i hans Udgave. (Berol. 1825. vol. 2. p. 203.)

[2]) I §. 11 findes en Tabel over Taludtrykkene for de enkelte Legemer.

II.

Vinklen.	sinus.	cosinus.
6°	$\frac{1}{8}(-1+\sqrt{[30-6\sqrt{5}]}-\sqrt{5})$	
15°	$\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}})$	
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
36°	$\frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$	$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$
45°	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
54°	$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5}}$
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
66°	$\frac{1}{8}(1+\sqrt{[30-6\sqrt{5}]}+\sqrt{5})$	
75°	$\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}})$	
90°	1	

Indsættes nu de i ovenstaaende Tabeller inde holdte Værdier, erholdes for:

Tetraedret:

$$x = d.\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = d.\sqrt{\tfrac{2}{3}} = d.\tfrac{1}{3}\sqrt{6}.$$

Octaedret:

$$x = d.\frac{(\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = d.\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\text{[1]}$$

Icosaedret:

$$x = d.\tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{24-8\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}\right]} =$$

[1]) Her bliver: $\beta = 15^\circ$, $\alpha = 75^\circ$; følgeligen
$\sin.\alpha.\sin.\beta. = \frac{1}{2}\cos.(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos.(\alpha+\beta$
$= \frac{1}{2}\cos.60^\circ - \frac{1}{2}\cos.90^\circ$
$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{4}$
hvorved Multiplicationen med de irrationale Stø relser, der ellers giver samme Resultat, undgaaes.

$$= d.\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{160 - 32\sqrt{5}}{80}\right]}$$

$$= d.\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}\right]}, \text{ eller og}$$

$$= d.\ \sqrt{\left[\frac{5 - \sqrt{5}}{10}\right]}\ ^{1)}$$

Hexaedret:

$$x = d.\ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= d.\ \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.\ ^{2)}$$

Dodecaedret:

$$x = d.\ \tfrac{1}{4}\sqrt{\left[\frac{24 - 8\sqrt{5}}{3}\right]}\ ^{3)}$$

$$= d.\ \tfrac{1}{2}\ \frac{\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})}}{\sqrt{3}}$$

$$= d.\ \tfrac{1}{2}\ \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}}\ ^{4)} =$$

---

1) Med rational Nævner: $x = d.\ \frac{1}{10}\sqrt{(50 - 10\sqrt{5})}$

2) Da sin. 105° = sin. 75°, og 15° er Complementet til 75°, anvendes her samme Lettelse, som blev anvendt ved Octaedret.

3) Her forekomme de samme Udtryk, som for Icosaedret.

4) Da $\sqrt{(a - \sqrt{b})} = \sqrt{(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{[a^2 - b]})} - \sqrt{(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{[a^2 - b]})}$, faaes her, da $a = 6$, $a^2 = 36$, $b = 20$:

$$\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})} = \sqrt{(3 + \tfrac{1}{2}\sqrt{16})} - \sqrt{(3 - \tfrac{1}{2}\sqrt{16})}$$
$$= \sqrt{5} - 1.$$

jfr. Vega. Vorl. 1. §. 285. Eulers Algebra 2 Theil 1, 8. §. 96.

$$= d. \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6} = d. \tfrac{1}{6} (\sqrt{15} - \sqrt{3}).$$

§. 4.

Interessant er det, at see, hvorledes Euclides [1]) geometrisk har construeret de her fundne analytiske Formler. Tetraedrets Side construeres ved at tegne en Halvcirkel over Kuglens Diameter, dele denne i tre lige store Dele, opreise en Perpendikulair ved det andet Delingspunkt, forlænge den til Halvcirkelen, og derpaa drage en Chorde til Diameterens fjerneste Endepunkt; denne Chorde er Tetraedrets Side. Heraf vil faaes Proportionen:

$$\frac{d : x = x : \tfrac{2}{3} d.}{x^2 = \tfrac{2}{3} d^2,}$$ [2]) vor Formel.

For at construere Octaedrets Side opreises Perpendikulairen i Centret, og en Chorde drages; her er strax:

$$x^2 = 2. \tfrac{1}{4} d^2 = \tfrac{1}{2} d^2,$$ vor Formel.

Hvad Icosaedrets Sides Construction angaaer, maae jeg, i Mangel af ledsagende Figur, henvise til Figuren hos Lorentz [3]); i den bliver:

$GC^2 = \tfrac{5}{4} d^2$; $GC = d. \tfrac{1}{2} \sqrt{5}$; videre

---

[1]) El. XIII. 18.

[2]) El. VI., 8. corr. cf. Camerer. obs. 3. vol. 2. p. 203.

[3]) P. 419.

$$GC : HC = AC : KC, \text{ ɔ:}$$

$$d.\ \tfrac{1}{2}\sqrt{5} : \tfrac{1}{2}\,d = \tfrac{1}{2}\,d : KC$$

$$CL = KC = d.\ \tfrac{1}{10}\sqrt{5}$$

$$LB = \tfrac{1}{2}\,d - KC = d.\ \frac{5-\sqrt{5}}{10}; \text{ endeligen}$$

$$d : x = x : LB$$

$$x^2 = d^2.\ \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

hvoraf vor før fundne Formel fremgaaer.

Hexaedrets Side construeres ved at præparere om til Tetraedret, men drage Chorden til Diametens nærmeste Endepunkt; her bliver:

$$d : x = x : \tfrac{1}{3}\,d$$

$$x^2 = \tfrac{1}{3}\,d^2, \text{ som ovenfor, } ^{1)}$$

Ved Constructionen af Dodecaedrets Side, maae eg ligeledes henvise til Figuren hos Lorentz. Siden BN construeres af Hexaedrets Side ved at dele den i yderste og mellemste Forhold; altsaa:

$$FB : BN = BN : (FB - BN).$$

$$d\sqrt{\tfrac{1}{3}} : x = x : (d.\sqrt{\tfrac{1}{3}} - x)$$

$$x = d.\ \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{12}} =$$

[1]) Saavel af Euclids Construction, som af de analytiske Formler, sees let, at Qvadratet paa Kuglens Diameter er lig Summen af Qvadraterne paa Tetraedrets og Hexaedrets Sider; vi have nemlig:

$$x^2 = \tfrac{2}{3}\,d^2 \text{ i Tetraedret,}$$

$$\text{og } x'^2 = \tfrac{1}{3}\,d^2 \text{ i Hexaedret}$$

$$x^2 + x'^2 = d^2$$

$$= d. \frac{1}{2}. \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}}, \text{ som før.}$$

Videre ville ogsaa Euclids Læresætninger [1]) findes udtrykte i de forhen anførte Formler. Denne Geometriens Samler og Ordner angiver nemligen:

Kuglens Diameters Qvadrat $1\frac{1}{2}$ Gang saa stort, som Tetraedrets Sides Qvadrat; Kuglens Diameters Qvadrat 2 Gange saa stort, som Octaedrets Sides Qvadrat, og (for at følge Ordenen hos Euclides, der afhandler disse tre Legemer først) Kuglens Diameters Qvadrat 3 Gange saa stort, som Hexaedrets Sides Qvadrat.

Altsaa er Forholdet mellem Qvadraterne paa disse Legemers Sider, og Qvadratet paa Kuglens Diameter rationalt, eller, for at følge Euclides [2]): disse rette Linier ere commensurable i Potens.

To staae tilbage, Icosaedret og Dodecaedret. Disse ere ogsaa i Potens incommensurable [3]), og benævnes af Euclides, hints Side som den mindre Irrationale [4]), dettes som Apotome [5]); dog turde vel her ikke findes

---

[1]) El. XIII., 13. 14. 15. 16. 17.
[2]) El. X. def. 3.
[3]) El. X. def. 4.
[4]) El. XIII, 16. jfr. X., 77.
[5]) El. XIII., 17. jfr. X., 74.

passende Sted til nøiere Udvikling af disse Ud-
tryk [1]).

§. 5.

For at bestemme Legemets Overflade, be em-
mes først af Formlen for Siden (§. 2.), Overfla-
den af hver Sideflade.

---

[1]) Udviklingen af den tiende Bog af Elementerne hører endnu blandt pia desideria, og vil med al Sandsynlighed for stedse komme til at høre dertil. Vel maatte man ønske en saaledes behandlet Udgave af denne Bog, der er: „ein Meisterstück beharrlichen Tiefsinns" (Gilbert Geom. 1. Pag. 214), i Ordets egentligste Forstand, i det den indeholder en mageløs skarpsindig Udvikling af Læren om de irrationale Størrelser, og det trods de Formufuldkommenheder, de Gamle vare underkastede i denne Materie. Iøvrigt har Mårtens (Ersch og Gruber, IV. p. 474.) givet en god Udsigt over disse, for de Gamle nødvendige, for Os undværlige Udtryks Betydning. Beklage maae man dog, at Simpson ei har behandlet denne Bog, og at Camerer ei har udgivet den, som el. I. — VI., ja end ikke har nævnet den blandt dem, han ønskede at udgive (vol. I. p. XIV.). Denne Bog af Euclides har iøvrigt havt det Uheld, at Petrus Ramus i ingen anden Bog vil have fundet saa stor Utydelighed (efter Citatet hos Gilbert l. c.); men har ikke den gode Mand glemt at see det Gode, fordi han oversaae de Formufuldkommenheder, eller bedre, de Baand, der ved den paalagdes den gamle Euclides? Petrus Ramus kunde udtrykke sig lettere end Euclides; altsaa burde Euclides kunne have udtrykt sig, som bemeldte strænge Dommer vilde. Allerede Keppler dadler ham derfor; og Newton, Leibnitz og la Grange have ved deres eenstemmige Domme ladet Euclides vederfares Ret. (see Volf. Syst. vol. V. Camerer. vol. I. præf.)

En saadan Sideflade bliver en regulair Figur (Triangel, Qvadrat, Femkant), hvis Side er x, og Polygonvinkel φ. I den retvinklede Triangel, der dannes af $\frac{1}{2}$ x, ϱ og ξ, faaes Proportionen:

$$\frac{\frac{1}{2}\,x : \varrho = \sin.\ \text{tot.} : \text{tang.}\ \frac{1}{2}\varphi}{\varrho = \frac{1}{2}\,x.\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}\varphi}$$

$$= \frac{1}{2}\,x.\ \frac{\sin.\ \frac{1}{2}\varphi}{\cos.\ \frac{1}{2}\varphi}\ ^{1)}$$

Hver af de m Triangler i hver Figur bliver =

$$\frac{x\ \varrho}{2} = x^2.\ \frac{1}{4}.\ \frac{\sin.\ \frac{1}{2}\varphi}{\cos.\ \frac{1}{2}\varphi}$$

Hver Figurs Overflade følgeligen =

$$= a = x^2.\ \frac{m}{4}.\frac{\sin.\ \frac{1}{2}\varphi}{\cos.\ \frac{1}{2}\varphi}.$$

Og, da Legemets Overflade dannes af n saadanne Figurer, bliver det =

$$= A = x^2.\ \frac{mn}{4}.\ \frac{\sin.\ \frac{1}{2}\varphi}{\cos.\ \frac{1}{2}\varphi};$$

indsættes nu x^2 ved d^2 (§. 2), faaes:

$$A = d^2.\ \frac{mn}{4}.\frac{\sin.\frac{1}{2}\varphi.\ \sin.\alpha.\ \sin.\beta.}{\cos.\ \frac{1}{2}\varphi.\ \sin.^2\frac{1}{2}\psi.}\ldots\ldots(\mathfrak{B}.)$$

---

[1]) Man indseer letteligen, at i Heraedret bliver:

$$\varrho = \frac{1}{2}\,x,$$

og altsaa rational med Siden, men ikke rational med Diameteren; videre:

$$a = x^2.$$

§. 6.

Da i §. 3. x^2 er bestemt, faaes de særlige Formler for Overfladerne let, i det:

For de af den ligesidede Triangel dannede Legemer:

$$\frac{\text{in. } \frac{1}{2}\varphi}{\text{os. } \frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}; \quad \frac{mn}{4} = 3,\ 6,\ 15.$$

I Hexaedret:

$$\frac{\text{in. } \frac{1}{2}\varphi}{\text{os. } \frac{1}{2}\varphi} = 1; \quad \frac{mn}{4} = 6.$$

I Dodecaedret:

$$\frac{\text{in. } \frac{1}{2}\varphi}{\text{os. } \frac{1}{2}\varphi} = \sqrt{\left[\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right]}; \quad \frac{mn}{4} = 15.$$

Ved Indsættelse erholdes da for:

Tetraedret: $A = d^2 . \frac{2}{3}\sqrt{3}.$

Octaedret: $A = d^2 . \sqrt{3}.$

Icosaedret: $A = d^2 . \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{15}}{2}$

Hexaedret: $A = d^2 . 2.$

Dodecaedret: $A = d^2 . 5 . \sqrt{\left[\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right]}$ [1])

---

[1]) Med rational Nævner $d^2 . \frac{1}{2}\sqrt{(50 - 10\sqrt{5})}$. I Elementernes XIV. 3. angives Udtrykket for Icosaedrets Overflade $= 30 \times \varrho \left[= 60 \frac{x\varrho}{2}\right]$,

§. 7.

Den næste Størrelse, hvilken vi maae henvende vor Opmærksomhed til, er r.

I den retvinklede Triangel, der dannes af $\frac{1}{2}$ x, ϱ og ξ bliver:

og ligeledes for Dodecaedrets $= 30 \times \varrho \left[= 60 \frac{x \varrho}{2} \right]$;

endvidere angives i El. XIV., 4. Forholdet mellem Dodecaedrets og Icosaedrets Overflader, at være liig Forholdet mellem Hexaedrets og Icosaedrets Sider. Overeensstemmelsen med de udviklede Formler indsees letteligen saaledes:

Denne Proportion vil her hedde:

$$d^2 . 5\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)} : d^2 . \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{2} = d . \tfrac{1}{3}\sqrt{3} : d . \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}$$

Forkortet:

$$5\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)} : \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} : \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}$$

eleveret:

$$\frac{125-25\sqrt{5}}{10} : \frac{90-30\sqrt{5}}{4} = \tfrac{1}{3} : \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

ved Multiplication og Forkortning

$$(5-\sqrt{5}) : (9-3\sqrt{5}) = \tfrac{1}{3} : \frac{5-\sqrt{5}}{10};$$

Productet af Yderleddene bliver da:

$$= 3 - \sqrt{5},$$

og af Mellemleddene ligesaa; altsaa er Proportionen rigtig.

Videre kan af disse Formler for Overfladerne blandt andet udledes: at Hexaedrets Overflade er den eneste, der er rational med Diameterens Qvadrat; og at Octaedrets Overflade forholder sig til Tetraedrets som 3 : 2.

$$\xi : \tfrac{1}{2}\, x = \sin.\ \text{tot.} : \cos.\ \tfrac{1}{2}\, \varphi$$

$$\xi = \tfrac{1}{2}\, x.\ \frac{1}{\cos.\ \frac{1}{2}\, \varphi} = x.\ \frac{1}{2 \cos.\ \frac{1}{2}\, \varphi}\ ^{1)}.$$

Videre er *i* den retvinklede Triangel, der dannes af $\frac{1}{2}\, d$, ξ, r:

$$r^2 = \tfrac{1}{4}\, d^2 - \xi^2 =$$

$$= \tfrac{1}{4}\, d^2 - \tfrac{1}{4}.\ x^2.\ \frac{1}{\cos.^2 \frac{1}{2}\, \varphi}.$$

Ved heri at indsætte Værdien for x^2 af §. 2, faaes:

$$r^2 = \tfrac{1}{4}\, d^2 - \tfrac{1}{4}\, d^2.\ \frac{\sin.\ \frac{1}{2}(\varphi + \psi).\ \sin.\ \frac{1}{2}(\psi - \varphi)}{\sin.^2 \frac{1}{2}\, \psi.\ \cos.^2 \frac{1}{2}\, \varphi.}$$

$$= \tfrac{1}{4} d^2 \left(1 - \left[\frac{-\sin.^2 \frac{1}{2}\, \varphi.\ \cos.^2 \frac{1}{2}\, \psi.}{\sin.^2 \frac{1}{2}\, \psi.\ \cos.^2 \frac{1}{2}\, \varphi.} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sin.^2 \frac{1}{2}\, \psi \cos.^2 \frac{1}{2}\, \varphi}{\sin.^2 \frac{1}{2}\, \psi.\ \cos.^2 \frac{1}{2}\, \varphi.}\right]\right)$$

$$= d^2.\ \tfrac{1}{4}.\ \frac{\sin.^2 \frac{1}{2}\, \varphi.\ \cos.^2 \frac{1}{2}\, \psi.}{\sin.^2 \frac{1}{2}\, \psi.\ \cos.^2 \frac{1}{2}\, \varphi.}.$$ Altsaa

$$r = d.\ \tfrac{1}{2}.\ \frac{\sin.\ \frac{1}{2}\, \varphi.\ \cos.\ \frac{1}{2}\, \psi.}{\sin.\ \frac{1}{2}\, \psi.\ \cos.\ \frac{1}{2}\, \varphi.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathfrak{C}.)\ ^{2)}$$

---

[1]) Eller $\xi = x.\ \frac{1}{2}.\ \sec.\ \frac{1}{2}\, \varphi.$

Ogsaa $r = d.\ \frac{1}{2}.\ \frac{\text{tg.}\ \frac{1}{2}\, \varphi}{\text{tg.}\ \frac{1}{2}\, \psi}$; α og β ere her, for lettere Behandlings Skyld udtrykte ved φ og ψ. Ønskede man at beholde dem, kunde man give (C) følgende Form:

§. 8.

For de enkelte Legemer vil da r faae følgende
særlige Værdier;

Tetraedret: $r = d. \frac{1}{2} \frac{\sin. 30^\circ \cos. 60^\circ}{\cos. 30^\circ \sin. 60^\circ}$

$= d. \frac{1}{2}. \frac{1}{3} = d. \frac{1}{6}.$

Octaedret: $r = d. \frac{1}{2}. \frac{1}{\sqrt{3}} = d. \frac{1}{6}. \sqrt{3}.$

Icosaedret; $r = d. \frac{1}{2}. \sqrt{\left(\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}\right)}$ [1]

Hexaedret: $r = d. \frac{1}{6}. \sqrt{3}.$

Dodecaedret: $r = d. \frac{1}{2}. \sqrt{\left(\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}\right)}.$

Heraf kunne nogle ikke uinteressante Bemærknin-
ger udledes: Tetraedrets mindste Radius er rational med
Diameteren; Octaedrets og Hexaedrets ere ligestore,
og deres Qvadrater ere rationale med Diameterens
Qvadrat ($r^2 = d^2. \frac{1}{12}.$); endeligen er Icosaedrets

---

$$r = d. \frac{1}{2}. \frac{\sin. \alpha - \sin. \beta}{\sin. \alpha + \sin. \beta} =$$
$$= d. \frac{1}{2}. \frac{\text{tg.} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\text{tg.} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)},$$

der stemmer overeens med den i Notens Begyndelse
anførte; cfr. §. 1.

[1]) Eller $r = d. \frac{1}{30} \sqrt{(75 + 30\sqrt{5})}.$

og Dodecaedrets ogsaa ligestore, men endogsaa deres Qvadrater incommensurable med Diameterens.

En anden Linie, der ikke er uvigtig, og som i denne §. er funden, er ξ; dens almindelige Formel var: $\xi = x. \frac{1}{2. \cos. \frac{1}{2} \varphi}$; ved i dette Udtryk at indsætte x af §. 2 og Udtrykkene for $\cos. \frac{1}{2} \varphi$, erholdes for:

Tetraedret: $\xi = d. \frac{1}{3} \sqrt{2}.$

Octaedret: $\xi = d. \frac{1}{6} \sqrt{6}.$

Icosaedret: $\xi = d. \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{24 - 8\sqrt{5}}{30 - 6\sqrt{5}}\right]}$

$= d. \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{30}\right)}$

Hexaedret: $\xi = d. \frac{1}{6} \sqrt{6}.$

Dodecaedret: $\xi = d. \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{30}\right)}$

Af de fælles Værdier for ξ indsees Rigtigheden af at Octaedrets og Hexaedrets Sideflader lade sig indskrive i samme mindre Cirkel, ligesom og af at Icosaedrets og Dodecaedrets lade sig indskrive i Een.[1])

[1]) Hypsikles (El. XIV., 2.) anfører denne sidste Sætning saaledes: samme Cirkel fatter Dodecaedrets Femkant og Icosaedrets Trekant, naar de ere indskrevne i samme Kugle. Ligeledes citeres der, at Aristæus og Apollonius have fremsat, at Perpendikulairen fra Kuglens Centrum til Dodecaedrets og Icosaedret Flader er den samme, hvilket sees af Form-

Man seer altsaa, at der i en Kugle kun lader sig tænke tre mindre Cirkler, hvori Sidefladerne til de fem regulaire Legemer ere indskrevne regulaire Figurer; ere disses Radier construerede, lader Nettet til de Legemers Overflade [1]), der kunne indskrives i en given Kugle, sig letteligen construere. En saadan almindelig Construction kan følgende være: Construer som i §. 4 Tetraedrets, Octaedrets og Icosaedrets Sider; construer paa dem ligesidede Trianglerne; disses største Radius er ξ; videre kan Hexaedrets Sideflade beskrives i Octaedrets Cirkel, Dodecaedrets i Icosaedrets. [2]) For Tetraedret findes ξ lettere, ved i en Afstand fra Centret $= \frac{1}{6}$ d at opreise en Perpendikulair, og forlænge den til Halvcirklens Peripherie; denne bliver da $= \xi$ (DF hos Lorentz). Ved Hjelp af ξ lader r sig let construere; naar nemlig fra Centret opreises en Radie lodret, ξ afsættes paa den fra Centret, gjennem ξ's Endepunkt, drages Paralleller med Diameteren, og fra det Punkt, hvor de træffe Peripherien fældes Perpendikulairer

---

lerne i Hen. Ogsaa følger det Ene umiddelbart af det Andet; thi $r^2 + \xi^2 = \frac{1}{4} d^2$.

[1]) Der blandt andet findes i Wolf. syst. I. fig. Geom. tab. IX. og X.

[2]) Man mærke, at AH (i Figuren hos Lorentz, l. c.) er = BM = Icosaedrets Side.

paa Diameteren, saa afskjæres de mindste Radier paa denne [1]).

§. 9.

Efter disse Bestemmelser har det ingen Vanskelighed at finde det almindelige Udtryk for Legemets Indhold. Ethvert Legeme bestaaer nemlig af saamange Pyramider, som det har Sideflader (n); hver Pyramides Grundflade er Legemets Sideflade (a), og dens Høide Legemets mindste Radius (r). Man har da:

$$S = n. \frac{ar}{3}$$

$$= \tfrac{1}{3} Ar.$$

Ved nu at substituere A af §. 5, r af §. 7, faaes:

$$S = \left(\tfrac{1}{3}. \frac{mn}{4}. d^2. \frac{\sin. \tfrac{1}{2} \varphi. \sin. \alpha. \sin. \beta}{\sin.^2 \tfrac{1}{2} \psi. \cos. \tfrac{1}{2} \varphi} \times \right.$$

$$\left. \times \tfrac{1}{2}. d. \frac{\sin. \tfrac{1}{2} \varphi. \cos. \tfrac{1}{2} \psi.}{\sin. \tfrac{1}{2} \psi. \cos. \tfrac{1}{2} \varphi.}\right)$$

Ved Sammentrækning

$$S = \tfrac{1}{24}. mn. d^3. \frac{\sin.^2 \tfrac{1}{2} \varphi. \cos. \tfrac{1}{2} \psi. \sin. \alpha. \sin. \beta.}{\cos.^2 \tfrac{1}{2} \varphi. \sin.^3 \tfrac{1}{2} \psi.} (D)^2)$$

---

[1]) For Tetraedret er Constructionen forhen viist, at være lettere; for Octaedret og Hexaedret kan den gjøres lettere ved at construere et Qvadrat $= \frac{1}{12} d^2 = \frac{1}{3}$ af Kuglens Radies Qvadrat; dettes Side bliver $= r$.

[2]) Her kunde man let give andre Formler, saasom følgende:

Denne Formel indeholder altsaa det almindelige Udtryk for et regulairt Legemes Indhold.

§. 10.

Heraf udledes nu følgende særlige Formler for de enkelte Legemer:

Tetraedret: $S = d^3 . \frac{1}{27} \sqrt{3}$. [1].

Octaedret: $S = d^3 . \frac{1}{6}$.

Icosaedret: $S = d^3 . \frac{1}{12} \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$.

Hexaedret: $S = d^3 . \frac{1}{9} \sqrt{3}$.

Dodecaedret: $S = d^3 . \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{15 + 5\sqrt{5}}{54}\right)} =$

$= d^3 . \frac{1}{6} \sqrt{\left(\frac{15 + 5\sqrt{5}}{6}\right)} =$

$= d^3 . \frac{1}{36} \sqrt{(90 + 30\sqrt{5})} =$

$= d^3 . \frac{1}{36} (5\sqrt{3} + \sqrt{15})$ [2].

$$S = \frac{1}{24} . mn . d^3 . \frac{tg.^2 \frac{1}{2}\varphi . \cos. \frac{1}{2}\psi . \sin. \alpha . \sin. \beta .}{\sin.^3 \frac{1}{2}\psi .} =$$

$$= \frac{tg.^2 \frac{1}{2}\varphi . \sin. \alpha . \sin. \beta .}{\sin.^2 \frac{1}{2}\psi . tg. \frac{1}{2}\psi .}$$

Og vilde man hæve Multiplicationerne ved at indføre Additioner, kunde mangfoldige Formforandringer letteligen fremstilles.

[1]) Formlen reducerer sig til $d^3 . \frac{1}{2} \frac{\cos.^4 60^\circ .}{\sin.^5 60^\circ .}$

[2]) Jfr. §. 3. p. 9. not. 4.

Af disse, af de Almindelige udviklede særegne Udtryk, der aldeles stemme med de særegne hos Wolf, ledes man med Hensyn til Legemernes Indhold til følgende Bemærkninger: Octaedret er det eneste Legem, hvis Indhold er rationalt med Kuglens Diameters Cubus; Tetraedrets Indhold er Trediedelen af Hexaedrets.

§. 11.

Der staaer nu tilbage at bestemme de irrationale Coefficienter i Tal, og give en sammenlignende Tabel over de fundne Resultater, hvori Nævnerne ere gjorte rationale, for, i de fleste Tilfælde, at lette Beregningen; dette vil findes paa de to næste Sider, da Rummet ikke tillader at indføre Tabellerne her. En lignende Oversigt over adskillige af disse Formler og Værdier findes hos Bertrand [1]), hvilke aldeles stemme med de her fundne ved behørige Reductioner og Sammentrækninger.

§. 12.

Ved at gaae ud fra de her fundne Hovedformler kan letteligen den Opgave, som Bertrand [2]) har opløst særskildt for hvert Legeme, i Almindelighed opløses. Den er nemligen det Omvendte af denne, og hedder: naar Legemets Side (x) er given,

[1]) l. c. I. p. 442.
[2]) l. c. I. p. 271. sqq.

da at finde den omskrevne Kugles Diameter (d), den indskrevne Kugles Radius (r), Legemets Overflade (A), og dets Indhold (S).

Begyndes med Siden, faaes efter Formlen (A): [1])

$$x = d. \frac{\sqrt{(\sin. \alpha. \sin. \beta.)}}{\sin. \frac{1}{2} \psi.}$$

$$d = x. \frac{\sin. \frac{1}{2} \psi.}{\sqrt{(\sin. \alpha. \sin. \beta.)}}$$

$$d = x. \sqrt{\left(\frac{\sin.^2 \frac{1}{2} \psi.}{\sin. \alpha. \sin. \beta.}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (E)$$ [2])

For r bliver Formlen, ved at indsætte (E) (E) [3]) følgende:

$$r = x. \frac{1}{2}. \frac{\sin. \frac{1}{2} \varphi. \cos. \frac{1}{2} \psi}{\cos. \frac{1}{2} \varphi. \sqrt{(\sin. \alpha. \sin. \beta.)}}$$ eller:

---

[1]) §. 2.

[2]) Kaldes den omskrevne Kugles Radius R, bliver altsaa:

$$R = x. \frac{1}{2}. \sqrt{\left(\frac{\sin.^2 \frac{1}{2} \psi.}{\sin. \alpha. \sin. \beta.}\right)},$$

der giver de hos Bertrand beregnede Værdier. Man kan udtrykke R blot ved α og β saaledes:

$$R = x. \frac{1}{2}. \sqrt{\left(\frac{\sin.^2 \frac{1}{2} [\alpha. + \beta.]}{\sin. \alpha. \sin. \beta.}\right)}$$

[3]) §. 7.

$$r = x.\tfrac{1}{2}.\sqrt{\left(\frac{\sin.\,{}^2\tfrac{1}{2}\,\varphi.\,\cos.\,{}^2\tfrac{1}{2}\,\psi.}{\cos.\,{}^2\tfrac{1}{2}\,\varphi.\,\sin.\,\alpha.\,\sin.\,\beta.}\right)} \ldots\ldots (\mathfrak{F})$$

For A er fundet: [1])

$$A = x^2.\ \frac{mn}{24}\ \frac{\sin.\,\tfrac{1}{2}\,\varphi}{\cos.\,\tfrac{1}{2}\,\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathfrak{G})$$

Og endeligen for S følgende ved at indsætte ($\mathfrak{E}$) i ($\mathfrak{D}$) [2]):

$$S = x^3.\ \frac{mn}{24}.\ \frac{\sin.\,{}^2\tfrac{1}{2}\,\varphi.\,\cos.\,\tfrac{1}{2}\,\psi.}{\cos.\,{}^2\tfrac{1}{2}\,\varphi.\sqrt{(\sin.\,\alpha.\,\sin.\,\beta)}} \ldots (\mathfrak{H})$$

Med eet Rodtegn:

$$S = x^3.\ \frac{mn}{24}.\ \sqrt{\left(\frac{\sin.\,{}^4\tfrac{1}{2}\,\varphi.\,\cos.\,{}^2\tfrac{1}{2}\,\psi.}{\cos.\,{}^4\tfrac{1}{2}.\,\varphi.\,\sin.\,\alpha.\,\sin.\,\beta.}\right)}\ {}^{3})$$

ξ er allerede forhen [3]) fundet:

$$\xi = x.\ \frac{1}{2.\,\cos.\,\tfrac{1}{2}\,\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathfrak{J})$$

Disse her fundne almindelige Formler indeholde Opløsningen af den givne Opgave.

---

[1]) §. 5.

[2]) §. 9.

[3]) Dette Udtryk kunde ogsaa forandres til

$$S = x^3.\ \frac{mn}{24}.\ \frac{\operatorname{tg.}\,{}^2\tfrac{1}{2}\,\varphi.\,\cos.\,\tfrac{1}{2}\,\psi.}{\sqrt{\sin.\,\alpha.\,\sin.\,\beta.}} =$$

$$= x^3.\ \frac{mn}{24}.\ \operatorname{tg.}\,{}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\,\cos.\,\tfrac{1}{2}\psi.\sqrt{(\operatorname{cosec.}\,\alpha.\,\operatorname{cosec.}\,\beta.)}$$

[4]) §. 7.

§. 13.

De særegne Udtryk for hvert Legeme:

	Tetraedret.	Octaedret.	Icosaedret.	Hexaedret.	Dodecaedret.
d	$x.\frac{1}{2}\sqrt{6}.$	$x.\sqrt{2}.$	$x.\frac{1}{2}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}.$	$x.\sqrt{3}.$	$x.\frac{1}{2}(\sqrt{15}+\sqrt{3}).$
r	$x.\frac{1}{12}\sqrt{6}.$	$x.\frac{1}{6}\sqrt{6}.$	$x.\frac{1}{12}(3\sqrt{3}+\sqrt{15}).$	$x.\frac{1}{2}.$	$x.\frac{1}{20}\sqrt{(250+110\sqrt{5})}.$
ξ	$x.\frac{1}{3}\sqrt{3}.$	$x.\frac{1}{3}\sqrt{3}.$	$x.\frac{1}{3}\sqrt{3}.$	$x.\frac{1}{2}\sqrt{2}.$	$x.\frac{1}{10}\sqrt{(50+10\sqrt{5})}.$
A	$x^2.\sqrt{3}.$	$x^2.2\sqrt{3}.$	$x^2.5\sqrt{3}.$	$x^2.6.$	$x^2.3\sqrt{(25+10\sqrt{5})}.$
S	$x^3.\frac{1}{12}\sqrt{2}.$	$x^3.\frac{1}{3}\sqrt{2}.$	$x^3.\frac{5}{12}(3+\sqrt{5}).$	$x^3.1.$	$x^3.\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5}).$

Af disse, af de Almindelige udviklede særegne Udtryk, der aldeles stemme med de særegne hos Wolf, ledes man med Hensyn til Legemernes Indhold til følgende Bemærkninger: Octaedret er det eneste Legem, hvis Indhold er rationalt med Kuglens Diameters Cubus; Tetraedrets Indhold er Trediedelen af Hexaedrets.

§. 11.

Der staaer nu tilbage at bestemme de irrationale Coefficienter i Tal, og give en sammenlignende Tabel over de fundne Resultater, hvori Nævnerne ere gjorte rationale, for, i de fleste Tilfælde, at lette Beregningen; dette vil findes paa de to næste Sider, da Rummet ikke tillader at indføre Tabellerne her. En lignende Oversigt over adskillige af disse Formler og Værdier findes hos Bertrand [1]), hvilke aldeles stemme med de her fundne ved behørige Reductioner og Sammentrækninger.

§. 12.

Ved at gaae ud fra de her fundne Hovedformler kan letteligen den Opgave, som Bertrand [2]) har opløst særskildt for hvert Legeme, i Almindelighed opløses. Den er nemligen det Omvendte af denne, og hedder: naar Legemets Side (x) er given,

[1]) l. c. I. p. 442.
[2]) l. c. I. p. 271. sqq.

da at finde den omskrevne Kugles Diameter (d), den indskrevne Kugles Radius (r), Legemets Overflade (A), og dets Indhold (S).

Begyndes med Siden, faaes efter Formlen (A): [1])

$$x = d. \frac{\sqrt{(\sin. \alpha. \sin. \beta.)}}{\sin. \frac{1}{2} \psi.}$$

$$d = x. \frac{\sin. \frac{1}{2} \psi.}{\sqrt{(\sin. \alpha. \sin. \beta.)}}$$

$$d = x. \sqrt{\left(\frac{\sin.^2 \frac{1}{2} \psi.}{\sin. \alpha. \sin. \beta.}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (E)$$ [2])

For r bliver Formlen, ved at indsætte (E) (E) [3]) følgende:

$$r = x. \frac{1}{2}. \frac{\sin. \frac{1}{2} \varphi. \cos. \frac{1}{2} \psi}{\cos. \frac{1}{2} \varphi. \sqrt{(\sin. \alpha. \sin. \beta.)}}$$ eller:

---

[1]) §. 2.

[2]) Kaldes den omskrevne Kugles Radius R, bliver altsaa:

$$R = x. \frac{1}{2}. \sqrt{\left(\frac{\sin.^2 \frac{1}{2} \psi.}{\sin. \alpha. \sin. \beta.}\right)},$$

der giver de hos Bertrand beregnede Værdier. Man kan udtrykke R blot ved α og β saaledes:

$$R = x. \frac{1}{2}. \sqrt{\left(\frac{\sin.^2 \frac{1}{2} [\alpha. + \beta.]}{\sin. \alpha. \sin. \beta.}\right)}$$

[3]) §. 7.

$$r = x.\tfrac{1}{2}.\sqrt{\left(\frac{\sin.\,{}^2\tfrac{1}{2}\,\varphi.\,\cos.\,{}^2\tfrac{1}{2}\,\psi.}{\cos.\,{}^2\tfrac{1}{2}\,\varphi.\,\sin.\,\alpha.\,\sin.\,\beta.}\right)} \ldots\ldots(\mathfrak{F})$$

For A er fundet: [1])

$$A = x^2.\ \frac{mn}{24}\ \frac{\sin.\,\tfrac{1}{2}\,\varphi}{\cos.\,\tfrac{1}{2}\,\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathfrak{G})$$

Og endeligen for S følgende ved at indsætte ($\mathfrak{E}$) i ($\mathfrak{D}$) [2]):

$$S = x^3.\ \frac{mn}{24}.\ \frac{\sin.\,{}^2\tfrac{1}{2}\,\varphi.\,\cos.\,\tfrac{1}{2}\,\psi.}{\cos.\,{}^2\tfrac{1}{2}\,\varphi.\sqrt{(\sin.\,\alpha.\,\sin.\,\beta)}} \ldots(\mathfrak{H})$$

Med eet Rodtegn:

$$S = x^3.\ \frac{mn}{24}.\ \sqrt{\left(\frac{\sin.\,{}^4\tfrac{1}{2}\,\varphi.\,\cos.\,{}^2\tfrac{1}{2}\,\psi.}{\cos.\,{}^4\tfrac{1}{2}.\,\varphi.\,\sin.\,\alpha.\,\sin.\,\beta.}\right)}\ {}^{3)}$$

ξ er allerede forhen [3]) fundet:

$$\xi = x.\ \frac{1}{2.\,\cos.\,\tfrac{1}{2}\,\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathfrak{J})$$

Disse her fundne almindelige Formler indeholde Opløsningen af den givne Opgave.

---

[1]) §. 5.

[2]) §. 9.

[3]) Dette Udtryk kunde ogsaa forandres til

$$S = x^3.\ \frac{mn}{24}.\ \frac{\mathrm{tg.}\,{}^2\tfrac{1}{2}\,\varphi.\,\cos.\,\tfrac{1}{2}\,\psi.}{\sqrt{\sin.\,\alpha.\,\sin.\,\beta.}} =$$

$$= x^3.\ \frac{mn}{24}.\ \mathrm{tg.}\,{}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\,\cos.\,\tfrac{1}{2}\psi.\sqrt{(\mathrm{cosec.}\,\alpha.\,\mathrm{cosec.}\,\beta.)}$$

[4]) §. 7.

§. 13.

De særegne Udtryk for hvert Legeme:

	Tetraedret.	Octaedret.	Icosaedret.	Hexaedret.	Dodecaedret.
d	$x.\frac{1}{2}\sqrt{6}.$	$x.\sqrt{2}.$	$x.\frac{1}{2}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}.$	$x.\sqrt{3}.$	$x.\frac{1}{2}(\sqrt{15}+\sqrt{3}).$
r	$x.\frac{1}{12}\sqrt{6}.$	$x.\frac{1}{6}\sqrt{6}.$	$x.\frac{1}{12}(3\sqrt{3}+\sqrt{15}).$	$x.\frac{1}{2}.$	$x.\frac{1}{20}\sqrt{(250+110\sqrt{5})}.$
ξ	$x.\frac{1}{3}\sqrt{3}.$	$x.\frac{1}{3}\sqrt{3}.$	$x.\frac{1}{3}\sqrt{3}.$	$x.\frac{1}{2}\sqrt{2}.$	$x.\frac{1}{10}\sqrt{(50+10\sqrt{5})}.$
A	$x^2.\sqrt{3}.$	$x^2.2\sqrt{3}.$	$x^2.5\sqrt{3}.$	$x^2.6.$	$x^2.3\sqrt{(25+10\sqrt{5})}.$
S	$x^3.\frac{1}{12}\sqrt{2}.$	$x^3.\frac{1}{3}\sqrt{2}.$	$x^3.\frac{5}{12}(3+\sqrt{5}).$	$x^3.1.$	$x^3.\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5}).$

Beregnede Vardier i Tal:

	Tetraedret.	Octaedret.	Icosaedret.	Hexaedret.	Dodecaedret.
d	x. 1,2247449.	x. 1,4142136.	x. 1,9021130.	x. 1,7320508.	x. 2,8025171.
r	x. 0,2041241.	x. 0,4082483.	x. 0,7557613.	x. 0,5000000.	x. 1,1135164.
ξ	x. 0,5773503.	x. 0,5773503.	x. 0,5773503.	x. 0,7071068.	x. 0,5257311.
A	x^2. 1,7320508.	x^2. 3,4641016.	x^2. 8,6602540.	x^2. 6,0000000.	x^2. 20,6457243.
S	x^3. 0,1178511.	x^3. 0,4714045.	x^3. 2,1816950.	x^3. 1,0000000.	x^3. 7,6631190.

Ved at indsætte Værdierne for de trigonometriske Linier [1]) ere ovenstaaende Tabeller beregnede, hvori Siden (x) maae ansees som givet. Ved denne Beregning maae bemærkes, at ved Icosaedret og Dodecaedret forekommer den irrationale Størrelse:

$\sqrt{(24 - 8\sqrt{5})}$, der er $= 2(\sqrt{5} - 1)$ [2]).

En Prøve for at Formlerne for r og ξ er rigtige, er: at $r^2 + \xi^2 = \frac{1}{4} d^2$, efter §. 7. De er iøvrigt indlysende, at ξ maae være samme Størrelse i de Legemer, der dannes af den ligesidede Triangel, naar sammes Side antages som given. Ved A kan mærkes, at Overfladen af ligesidede Tetraedrer, Octaedrer og Icosaedrer forholde sig som 1 : 2 : 5. Ved S, at Octaedrets legemlige Indhold er 4 Gange saa stort som Indholdet af et Tetraeder, der har samme Side som Octaedret.

Videre stemme ovenstaaende Udtryk med de for hvert Legeme for sig, beregnede Udtryk hos Bertrand [3]), fra hvilke de kun afvige i Formen. Saaledes er f. Ex. for Dodecaedret der angivet:

$$r = x \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\left[\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}\right]}, \text{ der er}$$

$$= x \cdot \frac{1}{20} \cdot \sqrt{(250 + 110\sqrt{5})}.$$

[1]) §. 1.
[2]) §. 3.
[3]) l. c. I. p. 272. 276. 283. 287. 292. 442.

Det følger af de hidtil udviklede Formler, at man, ved Hielp af dem, kan opløse den almindelige Opgave: naar af de 5 Størrelser d, r, ξ, A, S, een tilligemed φ og ψ, (hvorved α og β bestemmes) ere givne, da at finde de Øvrige.[1]) Det vilde ikke være vanskeligt, at give saavel almindelige, som særlige Formler; men dette turde vel overskride den Korthed, denne Afhandling synes at burde

---

[1]) Nødvendige Egenskaber ved de mathematiske Lærebøger, der lægges til Grund for Skoleunderviisning, ere unægteligen Orden, Tydelighed og Fuldstændighed; paa mangfoldige Steder opnaaes dette lettest ved at give Oversigter i tabellarisk eller schematisk Form over Resultaterne af flere Sætninger. Men ikke altid finder man disse Egenskaber; saaledes er, for at anføre et Exempel herpaa, i en temmelig almindelig indført Lærebog i Geometrien Afsnittet om Cirkelens Beregning (der kan reduceres til følgende Opgave: naar af de 4 ved Cirkelen forekommende Størrelser, r [Radien], d [Diameteren], p [Peripherien], a [Arealet], een tilligemed π er given, da at finde de Øvrige, og hvis Resultater saare let kunne indbefattes i en Tabel, som enhver Discipel let kan overskue, og beholde i Hukommelsen, hvilket ikke saa kort Erfaring har overbeviist mig om) saa uordentligt og ufuldstændigt behandlet, at en Begynder neppe, endog ved gjentagen Læsning, kan finde Rede deri. At anføre flere Bemærkninger med Hensyn til mathematiske Lærebøger i Almindelighed eller enkelte i Særdeleshed, er her intet passende Sted til. De geometriske ere, forsaavidt deres Forfattere bruge den synthetiske Methode og nøie følge Euclid, i det mindste brugbare; men let kunde man vise Exempler paa at Een eller Anden ved at afvige fra ποιχεια, kunde have ladet indløbe Feil.

have. For imidlertid at vise, hvorledes de forhen fundne Formler kunne anvendes, hidsættes følgende Exempel:

Et Hexaeder er givet ved ξ; hvor stort er da Indholdet S i et Octaeder, hvis Overflade A er liig Hexaedrets Overflade?

Her har man af Hexaedret:

$$A = d^2 . 2 = \xi^2 . 12.$$

I Octaedret faaes:

$$A = d'^2 . \sqrt{3}; \text{ man faaer altsaa:}$$

$$d'^2 . \sqrt{3} = \xi^2 . 12$$

$$d'^2 . = \xi^2 . 12 : \sqrt{3} = \xi^2 . 4\sqrt{3}.$$

Hvoraf letteligen findes:

$$d'^3 . = \xi^3 . 8 \sqrt[4]{27}.$$

Ved nu at indsætte Værdien for S i Octaedret faaes:

$$S = d'^3 . \tfrac{1}{6} = \xi^3 . \tfrac{4}{3} \sqrt[4]{27}.$$
$$= \xi^3 . 3{,}0393435.$$

De gamle Geometrere have beskjæftiget sig meget deels med Opgaver om disse Legemer med ligestore Overflader, eller med ligestort Indhold, deels med Opgaver om deres Indskrivelighed i hinanden, hvorpaa Exempler findes i El. XIV og XV; ved de her givne Formler ville alle de Opgaver, der henhøre til de tvende første Spørgsmaale letteligen kunne opløses.

§. 14.

Der er endnu een Undersøgelse, allerede foretagen af Hypsicles efter Isidorus [1]), som jeg ikke har troet at burde forbigaae, nemlig: hvor stor er Inclinationsvinkelen imellem Sidefladerne i et regulairt Legem. Denne Opgave kan letteligen opløses ved en almindelig Formel.

Inclinationsvinkelen er nemlig liig den plane Vinkel, to mindste Radier i to til hinanden grændsende Sideflader, dragne til den fælles Side, gjøre mod hinanden [2]). Kaldes denne ω, vil den blive halveret af den rette Linie (λ), der fra dens Toppunkt drages til Centret [3]). I den retvinklede Triangel, der dannes af λ, r og ϱ faaes:

$$\varrho : r = \text{sin. tot.} : \text{tang.} \tfrac{1}{2}\omega$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}\omega = \frac{r}{\varrho};$$

Nu er i det Foregaaende [4]) viist, at

---

[1]) El. XV, 7.

[2]) El. XI, def. 6. Disse maae støde sammen i eet Punkt, nemlig i den fælles Sides Halveringspunkt.

[3]) I det Plan, der kan tænkes lagt gjennem Vinklen, dannes to retvinklede Triangler, der have λ fælles og ϱ til Cathete; disse ere congruente; altsaa ω halveret af λ.

[4]) Jevnfør med Hensyn hertil de i §§. 5 og 7 betegnede Triangler og anførte Formler.

$$r = d.\ \tfrac{1}{2}.\ \frac{\sin.\ \tfrac{1}{2}\varphi.\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\psi.}{\sin.\ \tfrac{1}{2}\psi.\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\varphi.}$$

$$\varrho = x.\ \tfrac{1}{2}.\ \frac{\sin.\ \tfrac{1}{2}\varphi}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\varphi};$$ ved Indsætning

$$= d.\ \tfrac{1}{2}.\ \frac{\sin.\ \tfrac{1}{2}\varphi.\sqrt{(\sin.\ \alpha.\ \sin\beta.)}}{\sin.\ \tfrac{1}{2}\psi.\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\varphi.};$$ altsaa

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}.\ \omega. = \frac{r}{\varrho} = \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\psi.}{\sqrt{(\sin.\ \alpha.\ \sin.\ \beta.)}};$$ heraf faaes;

$$\text{tang.}\ \tfrac{21}{2}.\ \omega. = \frac{\cos.\ \tfrac{21}{2}\psi.}{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ \beta.}.$$ Nu er

$$\text{secans.}\ \tfrac{21}{2}.\ \omega. = 1 + \text{tang.}\ \tfrac{21}{2}\ \omega.$$

$$= 1 + \frac{\cos.\ \tfrac{21}{2}\psi.}{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ \beta.}$$

$$= \frac{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ \beta. + \cos.\ \tfrac{21}{2}\psi.}{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ \beta.}$$

$$= \frac{\cos.\tfrac{21}{2}\varphi.\sin.\tfrac{21}{2}\psi + \sin.\tfrac{21}{2}\varphi.\cos.\tfrac{21}{2}\psi + \cos.\tfrac{21}{2}\psi.}{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ \beta.}\ ^{1)}$$

$$= \frac{\cos.\ \tfrac{21}{2}\varphi.\ \sin.\ \tfrac{21}{2}\psi + \cos.\ \tfrac{21}{2}\psi.\ (1 - \sin.\ \tfrac{21}{2}\varphi.)}{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ \beta.}$$

$$= \frac{\cos.\ \tfrac{21}{2}\varphi.\sin.\ \tfrac{21}{2}\psi + \cos.\ \tfrac{21}{2}\psi.\ \cos.\ \tfrac{21}{2}\varphi.}{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ \beta.}$$

$$= \frac{\cos.\ \tfrac{21}{2}\varphi.}{\sin.\ \alpha.\ \sin.\ \beta.};$$ altsaa;

---

[1]) Jfr. §. 2. p. 6.

$$\text{sec. } \omega = \frac{1}{\cos. \omega} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \sin.^2 \omega)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{8}{9})}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}}} = \pm 3.$$

Altsaa sec. $\omega = + 3$, da ω falder i første Qvadrant. Paa samme Maade findes for Octaedret

sec. $\omega = \div 3$, da Vinklen falder i anden Qvadrant.

Udtrykkene: sin. $\omega = \frac{2}{3}$ i Icosaedret, og sin. $\omega = 1$ i Hexaedret findes ovenfor. I Dodecaedret angives tang. $\omega = \div 2$; nu er

$$\text{tang. } \omega = \frac{\sin. \omega}{\cos. \omega} = \pm \sqrt{4} = \pm 2;$$

her tang. $\omega = \div 2$, da ω falder i anden Qvadrant. Altsaa indsees Overeensstemmelsen af de Bertrandske Udtryk med de her givne. [1])

Disse Bertrands Udtryk har jeg saa meget mindre villet undgaae at hidsætte, som de afgive en en let geometrisk Construction for Legemernes Incli-

---

[1]) p. 441 er for sin. $\frac{1}{2}\omega$ i Icosaedret angivet $\sqrt{\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{6}\right)}$; dette er $= \frac{1}{6}\sqrt{(18 + 6\sqrt{5})}$ $= \frac{1}{6}(\sqrt{3} + \sqrt{15})$. jfr. §. 4. p. 9. Kjendetegnet for de stumpe Vinkler, naar Formlerne, der udtrykke ω bruges, er at sin. $\frac{1}{2}\omega$ da er større end $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

nationsvinkler, enten umiddelbart, eller ved Hjelp af deres Supplementer til 180°.

Isidor [1]) har construeret disse Vinkler, og denne Construction er det vel ikke overflødigt, her at medtage. I Tetraedret construeres over x (Siden) med dets Triangels Høide $= x. \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en ligebenet Triangel; Vinklen ved Toppunktet i denne er Inclinationsvinklen i Tetraedret. Der bliver $\sin. \frac{1}{2}\omega = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, ligesom forhen. I Octaedret findes Inclinationsvinklen ved at construere x^2; dettes Diagonal bliver $= x\sqrt{2}$; Høiden i den ligesidede Triangel, der er Sidefladen i Octaedret er (som i alle af den ligesidede Triangel dannede Legemer) $= x. \frac{1}{2}\sqrt{3}$; med denne beskrives over Diagonalen en ligebenet Triangel; Vinklen ved Toppunktet bliver da Inclinationsvinklen for Octaedret; altsaa $\sin. \frac{1}{2}\omega = \sqrt{2} : \sqrt{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$. Mere indviklet er Constructionen af Inclinationsvinklen for Icosaedret. Paa Icosaedrets Side beskrives en regulair Femkant; i denne drages en Diagonal; med Sidefladens Høide beskrives over denne som Grundlinie en ligebenet Triangel; Vinklen ved Toppunktet bliver den søgte Inclinationsvinkel. Kaldes her Diagona-

---

[1]) El. XV, 7. Her, som paa flere Steder, henvises til Lorenz Udgave, den eneste, jeg af de sidste Bøger af Elementerne har havt til Brug.

en δ, faaes i den retvinklede Triangel, der dannes af
, $\frac{1}{2}\delta$, og Perpendikulairen paa Diagonalen følgen-
e Proportion:

$$\sin.\text{tot.} : \sin. 54^\circ = x : \tfrac{1}{2}\delta$$

$$1 : \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) = x : \tfrac{1}{2}\delta; \text{ videre bliver}$$

$$\sin. \tfrac{1}{2}\omega : 1 \quad = \tfrac{1}{2}\delta : x. \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\sin. \tfrac{1}{2}\omega : \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) = x : x\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\sin. \tfrac{1}{2}\omega = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) : \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$
$$= \tfrac{1}{6}(\sqrt{3} + \sqrt{15}),$$

om ovenfor. At Hexaedrets Inclinationsvinkel
r $= 90^\circ$ behøver ingen videre Oplysning, ligesom
ette ogsaa i Elementerne er anseet for intet Beviis
it trænge til [1]). Constructionen af Inclinationsvin-
len for Dodecaedret er derimod underkastet større
Vanskelighed. I Dodecaedrets Sideflade drages en
Diagonal; med Perpendikulairen fra den, paa den
nodstaaende, med den parallelle Side [2]) beskrives en li-
gebenet Triangel; Vinklen ved Toppunktet i denne er
en forlangte Inclinationsvinkel. Ogsaa her stemmer
Constructionen med de forhen opgivne Formler; thi
naar Diagonalen kaldes δ, bliver

---

[1]) Lorenz p. 440.

[2]) Det lader sig let bevise, at, naar n er et heelt Tal, i enhver Polygon, hvis Siders Antal kan betegnes ved $2n + 1$ en Diagonal under een Vinkel er parallel med den Side, der staaer lige over for Vinklen

$\delta = x. \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})$. Kaldes fremdeles Perpendikulairen fra Diagonalen z, bliver

$$z = x. \sin. 72^\circ = x. \tfrac{1}{4} \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$$

naar altsaa en ligebenet Triangel dannes af δ og z bliver

$$z : \tfrac{1}{2} \delta = \sin. \text{tot.} : \sin. \tfrac{1}{2} \omega, \text{ o:}$$

$$x. \tfrac{1}{4} \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} : x. \tfrac{1}{4} (1 + \sqrt{5}) =$$

$$= \sin. \text{tot.} : \sin. \tfrac{1}{2} \omega; \text{ altsaa}$$

$$\sin. \tfrac{1}{2} \omega = \tfrac{1}{10} \sqrt{(50 - 10\sqrt{5})}\ ^{1}).$$

§. 15.

Allerede Benævnelsen Platoniske Legeme henpeger paa Platos Philosophie; det synes altsaa ikk upassende, at vise, hvorledes disse Legemer fremtrø de i Platos og hans Disciples Udvikling af Verden

---

[1]) Man kunde ogsaa, for at opløse denne Opgave tænke sig en Perpendikulair fældet ned paa Diag nalen fra et af Endepunkterne af den, med Diagon len parallelle, Side. Da dannes en retvinklet Tr angel, hvis Hypothenuse er x, ene Cathete $\frac{1}{2}(\delta - x$ og anden Cathete Perpendikulairen z. I denne bliv altsaa

$$z^2 = x^2 - \tfrac{1}{4} (\delta - x)^2$$

$$= x^2 - x^2 . \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}\right)$$

$$= x^2 \left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}\right). \text{ Altsaa bliver}$$

$$z = x. \tfrac{1}{4} \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})},$$

som ovenfor. Om den regulaire Femkant findes io rigt i Elementerne mange ikke uinterressante Sc ninger, saasom: XIII, 8. 9. 10. 11; XIV, 1, 2,

Bygning. Hovedstedet, hvor Platos hidhørende Ideer findes, er Samtalen Timæus; Materien (ὕλη) udfylder Rummet; den fremtræder for os i Rummet;[1]) den maae altsaa vise sig under en Form (περας). Jeg vil nu søge at fremstille Platos[2]) egne Ideer: Formen af ethvert Legeme maae nødvendigviis tillige antage βαθος (den tredie Dimension, Høide); ligeledes er det nødvendigt, at en tænkelig Høide, for at danne et Legeme, forenes med en Grundflade, her en plan Figur; denne kan tænkes sammensat af Triangler i ethvert Tilfælde; nu frembringes enhver Triangel af tvende retvinklede.[3]) Derefter indeler Plato de retvinklede Triangler i ligebenede og uligebenede; disse sidste kunne være af mangeartet Natur (φυσις, σχημα); een af disse maae altsaa være καλλιστον, fuldkomnest; denne antager nu Plato at være den, hvori Catheternes Forhold er $= 1 : \sqrt{3}$

---

[1]) Mærkeligt er Stedet: και κενην χωραν ουδεμιαν εα λειπεσθαι. Man har antaget vacuum Torricellianum for et vacuum; men i Prof. Zeises Chemie fremsættes efter Dalton den vistnok rigtige Idee, at det intet sandt vacuum er. Naturens Oeconomie synes intet sligt at taale.

[2]) Timæus. p. 53. l. c. Ast. 5. p. 188 sq.

[3]) Paa de stumpvinklede Triangler lader dette sig kun anvende, naar Perpendikulairen fældes fra den stumep Vinkels Toppunkt.

(τριπλην κατα δυναμιν[1]); af disse Triangler viser han da, at fire Elementarlegemer (γενη sc. σωματων[2]) kunne frembringes, nemlig tre af det sidste Slags, eet af det første Slags. Nu er det indlysende, at i de tre regulaire Legemer, hvis Sideflader ere ligesidede Triangler, στοιχειον[3]) ɔ: Sidefladens Element er den sidstnævnte Triangel, idet den ligesidede Triangel bestaaer af sex saadanne; ved derimod at sammensætte otte ligebenede retvinklede Triangler dannes et Qvadrat; af dette Hexaedret[4]). Her er kortelig Platos geometriske Udvikling af Elementarlegemerne. Han gaaer nu videre, og udvikler den Form, der er meest passende for hver Art af Materien; saaledes mener han, at Tetraedret er det legemlige Formelement for Ilden, Octaedret for Luften, Icosaedret for Vandet, Hexaedret for Jorden[5]).

---

[1]) p. 54. B. Ast. 5. p. 190. I denne Triangel er den ene Vinkel 60°, den anden 30°; endvidere bliver her Hypotenusen liig det Dobbelte af den ene Cathete. p. 54. D. Ast. p. 192. Δυναμις betyder det paa en Linie tænkte Qvadrat (El. X, 1.) Man maae beklage, at man ofte, ved at læse de gamle Mathematikere, støder paa Udtryk, ved hvis Forklaring man forgiæves søger Understøttelse hos Lexicographerne.

[2]) p. 54. C. Ast. p. 190.

[3]) p. 55. A. Ast. p. 192.

[4]) p. 55. B. C. Ast. p. 192.

[5]) p. 56. 57. Ast. p. 194. 196.

En anden Anskuelse af Naturens Sammensætning, der fortjener megen Opmærksomhed, finder man i samme Samtale [1]). Plato mener, at der gives bestemte Forbindelser mellem de enkelte Elementarlegemer. Man vil altsaa allerede her finde, hvorvel utydeligt, et Spor af tvende Gjenstande, der nyeligen, atter opfattede, i høi Grad sysselsætte Naturgranskerne, nemlig Læren om de bestemte, i den uorganiske Natur, fremtrædende Former, og Læren om de bestemte Forholde, i hvilke Legemerne indgaae Forbindelser. Hvorvel man ikke tør paastaae, at denne Idee har været klar for Plato, maae man dog vel mene, at den er bleven bearbeidet af ham og hans Disciple; Resultaterne af disses geometriske Granskninger, στοιχεια, ville i næste §. i Korthed blive omtalte.

---

[1]) p. 32. Ast. p. 142. Her findes maaskee ogsaa Spor af Ideer om Legemernes Formforandringer. Inddelingen af Legemerne i faste, draabeflydende og luftformige, er, og maae nødvendig være relativ; Beskaffenheder, ikke Egenskaber, maae fremsættes som Særkiender. Videre er det i Physikens senere Dage viist, at Overgangen fra een Form til en anden, foruden ved Forandring i Temperaturen, kan bevirkes ved Forandring i Lufttrykket (Zeises Chemie.). Maae man end nægte Platos Ideer sit ubetingede Bifald, ville de dog stedse, som Minde om ufortrøden og dyb Granskning, i Philosophien og Naturvidenskaben hævde en fortrinlig Plads.

Dog er det indlysende, at Plato ikke var paa det Rene med disse Elementarlegemer. Dialogen Timæus er vistnok ægte Platonisk. Men af hvilke Kilder har Plato øst sine Ideer om disse Materiens bestemte Grundformer? Dette er en Gienstand, man vel ikke bør undlade korteligen at berøre. Maaskee det ældste Kiim til de af Plato udviklede Ideer maae søges hos Ægypterne, i det de antoge at ἀρχή var Materien, ὕλη; at af denne fire Elementer, στοιχεῖα, [1]) udskildtes; om Geometrien allerede hos dem anvendtes paa Elementerne, er uvist [2]). Atomsystemet var i gammel Tid (før de Trojanske Tider) bekiendt i Sidon [3]); om opfundet der, eller hidkommet fra Ægypten, er vel og uvist. Deraf dannedes den Idee, at der vare 4 Elementer, dannede af Atomer. Dette vakte vistnok Anaxagoras's Idee, om at Materien var uendelig, men bestaaende af indbyrdes lignende Dele, particulæ similes inter se, ὁμοιομέρειαι [4]), hvorved paapeges bestemtformede Atomers bestemte Sammensætning. At Pythogoras

---

[1]) Quinctilian. 3, 3, 13 definerer dette Ord ved ex quo quid fit.

[2]) Diog. Laert. prooem. §. 10.

[3]) Strabo XVI, p. 757.

[4]) Cic. Qu. acad. 2. 37. Lucret. I, 830; Lucrez synes i sin Gienbrivelse ikke at have forstaaet Anaxagoras ret. cf. Bruckerus. hist. phil. I. p. 500 sq.

geometrisk har undersøgt Atomernes Form, og indseet, at dette Atomsystem maatte grunde sig paa bestemte Forholde, er vist. Den store Vægt, Pythagoræerne lagde paa Tallene, maae nemlig vistnok snarere forstaaes om Tal som Exponenter i Forholde, end som Mængder af Eenheder. [1]) Den senere Pythagoræer Empedocles beholder de 4 Elementer, men indfører tvende virkende Kræfter, φιλια og νεικος, hvori ultsaa svage Spor af det dynamiske System findes [2]). Især synes det saaledes, som om det var Pythagoras's Lære, der i denne Henseende er bleven nøiere giennemgransket, og til forskiellige Tider udviklet og bestemt af Plato og hans Disciple.

Men ved disse forskiellige Bearbeidelser synes det, som om hans Ideer nøiere og nøiere ere blevne udviklede. En af disse Hovedudviklinger i Timæus er ovenfor korteligen fremsat. [3]) Men paa et andet

---

[1]) Ex numeris et mathematicorum initiis proficisi volunt omnia. Cic. Quæst. Acad. 2, 37. Mundum ejus (Pythagoræ) ratione musices esse compositum, udtrykker Quinctilian sig I, X, 12. Ligesom samme I, X, 15 yttrer at Harmonielæren (musica) er vigtig til at forstaae Plato. Plat. de rep. 3.

[2]) Cic. de nat. Deor. 1, 24. Quæst. Acad. 2, 38.

[3]) Skade, at denne Dialog efter Alles, endog Ciceros, Dom er saa mørk og uforstaaelig; rerum obscuritas facit, ut non intelligatur oratio, qualis est in Timæo Platonis (de Fin. 2, 5.). Af Ciceros Oversættelse haves kun nogle Fragmenter.

Sted i Dialogen Epinomis [1]), antager han 5 Elementarlegemer. Iblandt de 5 regulaire Legemer er nemligen hist udeladt Dodecaedret, hvilket her, mueligen fordi det kommer Kuglen saa nær, tildeles Æthe-ren som Grundform. Nu er rigtignok denne Dialog anseet for uægte; Suidas yttrer, at een af Platos Disciple har redigeret Bøgerne om Lovene, og føiet Epinomis til; dennes Navn angives af Diogenes Laertius Philipp; man maae altsaa med Rimelighed slutte, at enten har Plato ved videre Bearbeidelse udvidet de, i Timæus indeholdte, Ideer, eller at Een af hans Disciple maaskee har videre udført dem. [2]) En anden, maaskee senere, Idee af Plato anføres af Aristoteles, hvorefter han kun har antaget tre Elementer; *Το γαρ μεσον μιγμα ποιει*; han maae altsaa der antage, at eet, og vist da enten Luft eller Vand, er et af de Øvrige sammensat Legeme; ved Sammensætningen maae her tænkes paa mechanisk Blanding, neppe paa chemisk. [3]) At udvikle sildigere Anskuelser af disse Legemers Fremtræden i Naturen, og især dvæle ved Fremstillingen af deres Forekommen som Grundkrystaller i den uorganiske Natur, vilde

---

[1]) 981. B. Ed. Ast. vol. 8. p. 24.

[2]) Fabr. Bibl. gr. 2. p. 27.

[3]) Arist. de gen. et corr. 2, 2. Tennemann Geschichte der Philos. 2. p. 405.

være en saare interressant, men ikke hidhørende Undersøgelse.

§. 16.

Undersøgelserne af disse Legemer som Elementer for Materiens Form skylde vi et af Alderdommens herligste Efterladenskaber, Samlingen og Ordningen af στοιχεια; det var nemligen nødvendigt geometrisk at undersøge disse Legemer og deres Egenskaber, for at opfatte dem i deres Fremtræden som Formelementer.

At Mathematikens første Elementer ere meddeelte Grækerne fra Ægypten, er vist; at Thales og Pythagoras hver for sig have udvidet dem, og meddeelt deres Disciple dem, er ligesaa vist; dog turde vel den Sidste i sin Skole meest have udviklet disse Geometriens Spirer, og opfordret sine Disciple til, ved Selvtænkning og Granskning, at gaae videre; dette synes unægteligt; thi af hans Skole ere, blandt mange Andre, Timæus, Archytas, Eudoxus udgangne. Ogsaa i Cyrene synes Mathematiken at have fundet heldige Dyrkere, saasom Theodorus.

Da Plato, efter Socrates's Død og Opholdet i Megara, tiltraadde sin lange Reise i Udlandet til Italien, Cyrene og Ægypten, undervistes han af Archytas og Timæus (Samtidige med Theætet), og lærte de Fremskridt, Geometrien havde giort under Pythagoras; han udvidede sine Kundskaber i Cyrene, og gik endeligen over

Egypten, Geometriens Fædreland, tilbage til Athen hvor han stiftede en Skole.

Nu indsaaes snart Nødvendigheden af at ordn disse enkelte, af Enkelte opfundne, og fra forskjellig Steder hentede, Sætninger, til et Heelt. Disse στοι χεια synes da Eudoxus, Discipel af Archytas og Plato Ven af Plato, at have samlet og ordnet; muelig er det, at han har overtaget dette Arbeide fælles me Amicles og Menæchmos, eller at disse senere hav udvidet og rettet dem. Theudius og Cycicenus næv nes som de, der enten have udvidet, eller maaskee pa nye udgivet denne Samling af στοιχεια. Som om trentligen samtidige Bearbeidere nævnes Hermotinu og Philippus Metæus. Saamange forskiellige Ud gaver synes altsaa i Academiet at have existeret, d Euclides, ὁ στοιχειωτης, fremstod. Af uvist Fæ deland, Platonisk Philosoph, aabnede han paa Pto lomæi Lagi Tid en mathematisk Skole i Alexandrien til hvis Tarv han synes at have bearbeidet det forhaan den værende Stof, ordnet det, udfyldt Hullerne, maa skee ogsaa udeladt det Overflødige, og bragt Alt i e systematisk, stræng, afrundet Form. Men vi hav dem ikke i Euclids Form; hans στοιχεια bleve sener lagte til Grund for Foredrag og Selvstudier i Alex andriens Museum, og ere sikkerligen undergaaed mange Forandringer til det Bedre, ved Udvidelser o

usiere Bestemmelser; men vistnok ogsaa mange til det Værre, i det det Simplere og Kortere maaskee turde være blevet forandret til mere Indviklet, men mere Vidtløftigt. Et Hovedbeviis herpaa afgive lib. XIV og XV, hvilke af indvortes Grunde ikke kunne have Euclid til Forfatter. Til Bestyrkelse paa den Maade, hvorpaa jeg mener, at Elementerne efterhaanden ere fremkomne, kan anføres XV. 7, hvor Forfatteren, efterat have anført Isidors Opløsning af en Opgave, tilføier Beviset. Den Bearbeidelse, vi have, maae tilskrives Mathematikeren Theon, der levede paa Theodos den Stores Tider; dette bekræftes ved Udtrykket ἐκ του Θεωνος συγουσιων i ed. Basil., og Randnoten Θεων δε συνταξας i een af Savilles Codices. Noget synes han at have forandret, dog ikke Meget, og Euclid er ogsaa bleven restitueret, især ved Hielp af Proclus's Commentar; men det Udtryk, Robert Simson paa Titelbladet af sin Udgave: sublatis iis, quibus olim libri hi a Theone aliisve vitiati sunt, bruger, turde dog vel være for strængt. Paa et andet Sted har jeg anført Mænd, hvis Domme hædre Euclid; her en modsat: Pic de la Mirande bryder Staven over Elementerne med disse Ord: nihil magis nocivum Theologo, quam frequens et adsidua in Mathematicis Euclidis exercitatio (Fabr. Bibl. gr. 2.

p. 375.), hvilken, saa rask fremsatte, Dom neppe bør værdiges en Gjendrivelse.

Denne korte Udsigt over Elementernes Historie er udkastet efter Proclus (Stedet er aftrykt hos Fabr. 2. p. 385.), Fabricius (vol. 2.), Brucker (vol. 1.), Camerer (præf.) og Lorenz, hos hvilke Forfattere Beviisstederne findes. Neppe troer jeg, at kunne ende den mere passende, end med dette, efter Fabricius ordret aftrykte, Epigram:

Σχηματα πεντε Πλατωνος, ὁ Πυθαγορας ὁ σοφος ἑυρε,
Πυθαγορας σωφος ἑυρε, Πλατων δ' ἀριδηλ' ἐδιδαξεν·
Ἐυκλειδης δ' ἐπι τοισι κλεος περικαλλες ἑτευξεν.

Rettelse.

Pag. 42. Lin. 2: σοματων, læs: σωματων.