1837

Om de bestemte Ligninger.

Af

O. B. Kielsen,

Lector ved Sorøe-Akademie.

33

Første Deel.

Indbydelses-Skrift

til

Examen artium og den offentlige Skole-Examen ved Sorøe-Akademie

den 15de Julii 1837 og følgende Dage.

Kjöbenhavn.

Trykt hos Andreas Seidelin,

Hof- og Universitets-Bogtrykker.

I. Om de bestemte Bogstav-Ligninger i Almindelighed.

§. 1.

Dersom m er et heelt positivt Tal, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots\ldots \chi, \psi$ og ω derimod hvilkesomhelst rene Tal, da er $x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \gamma x^{m-3} + \delta x^{m-4} + \varepsilon x^{m-5} + \ldots\ldots + \chi x^2 + \psi x + \omega$ Formen for hvilkensomhelst heel algebraisk Function af den Foranderlige x, hvilken Function vi, for Korthed Skyld, ville sætte $= \mathbf{X}$. Bliver $\mathbf{X} = 0$, da forvandles Functionen til en bestemt Ligning af mte Grad.

Antages x at være af 1 Dimension, er ogsaa α af 1 Dimension, β derimod af 2 Dimensioner, γ af 3, δ af 4, o. s. v.

§. 2.

Er $a^m + \alpha a^{m-1} + \beta a^{m-2} + \gamma a^{m-3} \ldots\ldots + \chi a^2 + \psi a + \omega = 0$, da gaaer $x - a$ op i Functionen $\mathbf{X}$.

Foretages nemlig Divisionen, findes Qvotienten at være $x^{m-1} + (a + \alpha)\, x^{m-2} + (a^2 + \alpha a + \beta)\, x^{m-3} + (a^3 + \alpha a^2 + \beta a + \gamma)\, x^{m-4} \ldots\ldots + (a^{m-2} + \alpha a^{m-3} + \beta a^{m-4} + \gamma a^{m-5} \ldots\ldots + \chi)\, x + a^{m-1} + \alpha a^{m-2} + \beta a^{m-3} + \gamma a^{m-4} \ldots\ldots + \chi a + \psi$ og Resten bliver $a^m + \alpha a^{m-1} + \beta a^{m-2} + \gamma a^{m-3} \ldots\ldots + \chi a^2 + \psi a + \omega$, som efter Antagelsen er $= 0$, hvoraf følger at Divisionen gaaer op. Qvotienten ville vi betegne paa denne Maade $x^{m-1} + \alpha' x^{m-2} + \beta' x^{m-3} + \gamma' x^{m-4} \ldots\ldots + \chi' x + \psi'$ og sætte $= \mathbf{X'}$.

Heraf sees at $\alpha' = a + \alpha$; $\beta' = a^2 + \alpha a + \beta = a\alpha' + \beta$; $\gamma' = a^3 + \alpha a^2 + \beta a + \gamma = a\beta' + \gamma$; o. s. v. Ligeledes bliver $\psi' = -\frac{\omega}{a}$ og derfor $\omega = -a\psi'$.

§. 3.

Functionen $\mathbf{X}$ kan ansees som et Product af m enkelte Factorer af denne Form $x - a$; $x - b$; $x - c$; $x - d$; o. s. v.

Af foregaaende Paragraph følger at dersom $a^m + \alpha a^{m-1} + \beta a^{m-2} + \gamma a^{m-3} \ldots\ldots + \chi a^2 + \psi a + \omega$ er $= o$, da gaaer $x - a$ op i $\mathbf{X}$ og giver $\mathbf{X}'$ til Qvotient, hvoraf sees at $\mathbf{X} = (x - a)\,\mathbf{X}'$. Er dernæst $b^{m-1} + \alpha' b^{m-2} + \beta' b^{m-3} + \gamma' b^{m-4} \ldots\ldots + \chi' b + \psi' = o$, gaaer $x - b$ op i $\mathbf{X}'$, hvilket bevises paa samme Maade. Sættes nu den udbragte Qvotient $= \mathbf{X}''$, bliver $\mathbf{X}' = (x - b)\,\mathbf{X}''$, altsaa $\mathbf{X} = (x - a)(x - b)\,\mathbf{X}''$. Ved at fortsætte disse Slutninger, findes $\mathbf{X} = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \ldots\ldots$ Det er: Functionen $\mathbf{X}$ kan ansees som et Product af m enkelte Factorer.

Heraf følger at ogsaa Ligningen $\mathbf{X} = o$ kan betragtes sammensat af m enkelte Factorer.

Er $\mathbf{X} = o$, bliver tillige $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \ldots\ldots = o$, hvoraf sees at x netop har m Værdier eller, som de ogsaa kaldes, Rødder. At bestemme disse Rødder kaldes at opløse Ligningen.

I Ligningen $x^m + \omega = o$, har x ogsaa m Værdier; men er $x^m + \omega = o$, ere tillige $x^m = -\omega$ og $x = \sqrt[m]{-\omega}$, hvoraf følger at en Rod-Størrelse har saamange Værdier, som dens Rod-Exponent indeholder een.

Ere a, b, c, d, ... Rødderne til Ligningen $\mathbf{X} = o$, da er ogsaa $a^m + \alpha a^{m-1} + \beta a^{m-2} + \gamma a^{m-3} \ldots\ldots = o$; $b^m + \alpha b^{m-1} + \beta b^{m-2} + \gamma b^{m-3} \ldots\ldots = o$; o. s. v. Disse Ligninger ville vi betegne med $\mathbf{A}$; $\mathbf{B}$; o. s. v. og betjene os af dem eller det første Udtryk, efter Omstændighederne. Tillige er $\mathbf{A} = (a - a)(a - b)(a - c)(a - d) \ldots$; $\mathbf{B} = (b - a)(b - b)(b - c)(b - d) \ldots\ldots$; o. s. v.

§. 4.

Divideres Ligningen $\mathbf{B} = o$ med $b - a$, bliver Qvotienten denne: $b^{m-1} + (a + \alpha)\,b^{m-2} + (a^2 + \alpha a + \beta)\,b^{m-3} + (a^3 + \alpha a^2 + \beta a + \gamma)\,b^{m-4} \ldots\ldots = o$, som gjelder for alle Hoved-Ligningers Rødder, undtagen for a. Derfor er ogsaa $c^{m-1} + (a + \alpha)\,c^{m-2} + (a^2\ \alpha a + \beta)\,c^{m-3} + (a^3 + \alpha a^2 + \beta a + \gamma)\,c^{m-4} \ldots\ldots = o$.

Divideres denne Ligning med $c - b$, fremkommer Ligningen $c^{m-2} + (a + b + \alpha)\, c^{m-3} + (a^2 + ab + b^2 + \alpha\,(a + b) + \beta)\, c^{m-4} + (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + \alpha\,(a^2 + ab + b^2) + \beta\,(a + b) + \gamma)\, c^{m-5} \ldots\ldots = o$, som gjelder for alle Rødderne undtagen for a og b. Derfor er ogsaa $d^{m-2} + (a + b + \alpha)\, d^{m-3} + (a^2 + ab + b^2 + \alpha\,(a + b) + \beta)\, d^{m-4} + (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + \alpha\,(a^2 + ab + b^2) + \beta\,(a + b) + \gamma)\, d^{m-5} \ldots\ldots = o$.

Divideres denne Ligning med $d - c$, fremkommer Ligningen $d^{m-3} + (a + b + c + \alpha)\, d^{m-4} + (a^2 + ab + b^2 + ac + bc + c^2 + \alpha\,(a + b + c) + \beta)\, d^{m-5} + (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + a^2c + abc + b^2c + ac^2 + bc^2 + c^3 + \alpha\,(a^2 + ab + b^2 + ac + bc + c^2) + \beta\,(a + b + c) + \gamma)\, d^{m-6} \ldots\ldots = o$, som gjelder for alle Rødderne undtagen for a, b og c. Og saaledes fremdeles.

Kan man derfor bestemme een eller flere af en Lignings Rødder, da kan man ved Division udbringe en anden Ligning, der er een eller flere Grader lavere end den første, og som indeholder dennes øvrige Rødder.

Tillige kan man, forudsat at den ved Divisionen udbragte Ligning algebraisk lader sig opløse, for dennes Rødder udfinde algebraiske Udtryk, der, foruden Hoved-Ligningens Coefficienter, indeholde den eller de manglende Rødder. Heraf kan man betjene sig til af Formen for een eller flere af Ligningens Rødder at bestemme Formen for de øvrige.

§. 5.

For Korthedsʼ Skyld ville vi i det Følgende betegne Ledenes Sum i enhver fuldstændig Combination af Tallene a, b, c, d e, ... med det første velordnede Led, udtrykt i de samme store Latinske Bogstaver. Efter denne Antagelse er derfor $A^n = a^n + b^n + c^n + d^n + e^n + \ldots\ldots$; $A^n B^p = a^n b^p + a^p b^n + a^n c^p + a^p c^n + b^n c^p + b^p c^n + a^n d^p + \ldots\ldots$; $A^n B^p C^q = a^n b^p c^q + a^n b^q c^p + a^p b^n c^q + a^p b^q c^n + a^q b^n c^p + a^q b^p c^n + a^n b^p d^q + \ldots\ldots$; og saa fremdeles. Var Tal-Rækken denne: b, c, d, e, ..., da blev $B^n = b^n + c^n + d^n + e^n \ldots\ldots$; $B^n C^p = b^n c^p + b^p c^n + b^n d^p + b^p d^n \; c^n d^p + c^p d^n + \ldots\ldots$; o. s. v. Altsaa er

$$A = a + B = a + b + C = a + b + c + D = \ldots\ldots$$

$$AB = aB + BC = ab + (a + b)\, C + CD = ab + ac + bc + (a + b + c)\, D + DE = \ldots\ldots$$

$$ABC = aBC + BCD = abC + (a + b)\, CD + CDE = abc + (ab + ac + bc)\, D + (a + b + c)\, DE + DEF = \ldots\ldots$$

$$ABCD = aBCD + BCDE = abCD + (a + b)\, CDE + CDEF = abcD + (ab + ac + bc)\, DE + (a + b + c)\, DEF + DEFG = \ldots\ldots$$

$$ABCDE = aBCDE + BCDEF = abCDE + (a+b)\,CDEF + CDEFG = abcDE + (ab+ac+bc)\,DEF + (a+b+c)\,DEFG + DEFGH = \ldots\ldots$$

o. s. v.

§. 6.

Dersom til Functionen X de enkelte Factorer ere $x-a$; $x-b$; $x-c$; $x-d$; ......, da er $\alpha = -A$; $\beta = AB$; $\gamma = -ABC$; $\delta = ABCD$; o. s. v.

Divideres den opgivne Function med $x-a$, bliver Qvotienten, efter det Foregaaende, denne: $x^{m-1} + \alpha' x^{m-2} + \beta' x^{m-3} + \gamma' x^{m-4} + \delta' x^{m-5} + \ldots\ldots + \chi' x + \psi'$, der er saa stor som Productet af de øvrige Factorer. Vi ville her først bevise at dersom Sætningen gjelder for denne sidste Function, den da ogsaa maa gjelde for den oprindelige. Er altsaa $\alpha' = -B$, eller, efter §. 2, $a + \alpha = -B$, findes heraf $\alpha = -a - B$ det er, efter foregaaende Paragraph, $\alpha = -A$. Er $\beta' = BC$ eller $a\alpha' + \beta = BC$, bliver $\beta = -a\alpha' + BC = aB + BC = AB$. Er $\gamma' = -BCD$ eller $a\beta' + \gamma = -BCD$, bliver $\gamma = -a\beta' - BCD = -aBC - BCD = -ABC$. Er $\delta' = BCDE$ eller $a\gamma' + \delta = BCDE$, bliver $\delta = -a\gamma' + BCDE = aBCD + BCDE = ABCD$; o. s. v. Er endeligen $\psi' = \pm bcde\ldots\ldots$ (hvor $+$ gjelder naar m er ulige og $-$ naar m er lige) da bliver $-a\psi' = \mp abcde\ldots\ldots$ det er, efter §. 2, $\omega = \mp abcde\ldots\ldots$ Det er saaledes beviist at Sætningen gjelder for X naar den gjelder for X'. Divideres dernæst Functionen X' med $x-b$ og Qvotienten sættes $= x^{m-2} + \alpha'' x^{m-3} + \beta'' x^{m-4} + \gamma'' x^{m-5} + \ldots\ldots = X''$, da bevises det paa samme Maade at dersom Sætningen gjelder for denne Function, maae den ogsaa gjelde for X', følgeligen tillige for X. Tænkes nu denne Division fortsat indtil Qvotienten bliver en Function af en bestemt lavere Grad, f. Ex. den 4de, da kan man ved simpel Multiplication let overbevise sig om at Sætningen gjelder for den; men gjelder den for en Function af 4de Grad, maae den, i Følge Beviset, ogsaa gjelde for en Function af 5te Grad, altsaa tillige for een af 6te, 7de, 8de, ... Grad; det er: i Almindelighed for en Function af mte Grad.

Heraf følger at dersom a, b, c, d, ... ere Rødder til Ligningen $x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \gamma x^{m-3} + \delta x^{m-4} \ldots\ldots + \chi x^2 + \psi x + \omega = 0$, da er $\alpha = -A$; $B = AB$; $\gamma = -ABC$; $\delta = ABCD$; o. s. v.

Da det sidste Led af en Ligning er Productet af alle Rødderne, maae een af disse være Nul, naar det sidste Led er det. I dette Tilfælde vil det næstsidste Led blive Productet af Ligningens øvrige Rødder, og derfor maae tvende af Rødderne være Nul, naar de tvende sidste Led ere det. Og saaledes fremdeles. Det sees let at dette ogsaa gjelder omvendt.

Af Combinations-Læren udledes at A bestaaer af m Led; AB af $\frac{m(m-1)}{2}$; ABC af $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3.}$; ABCD af $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.\ 3.\ 4.}$ Led; o. s. v.

§. 7.

Da de sammensatte Combinationer $A^n B^p$; $A^n B^p C^q$; o. s. v. som oftest bestaae af flere Led end de enkelte A^n; A^p; A^q; o. s. v., kan det undertiden lette Beregningerne at kunne henføre hine til disse, hvilket kan skee ved Hjelp af Combinations-Regningen. Efter denne er nemlig, for det Første, $A^n . A^p = A^{n+p} + A^n B^p$; altsaa

1) $A^n B^p = A^n . A^p - A^{n+p}$

som gjelder naar n og p ere forskjellige, i hvilket Tilfælde Combinationen bestaaer af $(m-1)$ Led, forudsat at m er Altallet af a, b, c, d, ... Er derimod $n = p$, bestaaer den kun af $\frac{m(m-1)}{2}$ Led og derfor bliver

2) $A^n B^n = \frac{1}{2} (A^n)^2 - \frac{1}{2} A^{2n}$.

Dernæst er $A^n . A^p B^q = A^{n+p} B^q + A^{n+q} B^p + A^n B^p C^q$, hvoraf $A^n B^p C^q = A^n . A^p B^q - A^{n+p} B^q - A^{n+q} B^p$. Nu er, efter Ovenstaaende, $A^p B^q = A^p . A^q - A^{p+q}$; $A^{n+p} B^q = A^{n+p} . A^q - A^{n+p+q}$ og $A^{n+q} B^p = A^{n+q} . A^p - A^{n+p+q}$, som indsat giver

3) $A^n B^p C^q = A^n . A^p . A^q - A^n . A^{p+q} - A^p . A^{n+q} - A^q . A^{n+p} + 2A^{n+p+q}$

som gjelder naar n, p og q ere forskjellige, i hvilket Tilfælde Combinationen bestaaer af $m(m-1)(m-2)$ Led. Ere derimod tvende af Exponenterne ligestore, indeholder den $\frac{m(m-1)(m-2)}{2}$ Led, og ere alle Exponenterne ligestore, indeholder den $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3}$

Heraf følger at

4) $A^n B^n C^p = \frac{1}{2} ((A^n)^2 . A^p - 2A^n . A^{n+p} - A^{2n} . A^p + 2A^{2n+p})$

5) $A^n B^n C^n = \frac{1}{6} ((A^n)^3 - 3A^n . A^{2n} + 2A^{3n})$

Videre er $A^n . A^p B^q C^r = A^{n+p} B^q C^r + A^{n+q} B^p C^r + A^{n+r} B^p C^q + A^n B^p C^q D^r$, hvoraf $A^n B^p C^q D^r = A^n . A^p B^q C^r - A^{n+p} B^q C^r - A^{n+q} B^p C^r - A^{n+r} B^p C^q$ og anvendes herpaa Formelen 3, bliver

6) $A^n B^p C^q D^r = A^n . A^p . A^q . A^r . - A^n . A^p . A^{q+r} - A^n . A^q . A^{p+r} - A^n . A^r . A^{p+q} - A^p . A^q . A^{n+r} - A^p . A^r . A^{n+q} . - A^q . A^r . A^{n+p} + A^{n+p} . A^{q+r} + A^{n+q} . A^{p+r} + A^{n+r} . A^{p+q} + 2A^n . A^{p+q+r} + 2A^p . A^{n+q+r} + 2A^q . A^{n+p+r} + 2A^r . A^{n+p+q} - 6A^{n+p+q+r}$

som gjelder naar Exponenterne ere forskjellige, i hvilket Tilfælde Combinationen bestaaer af $m(m-1)(m-2)(m-3)$ Led. Derimod bestaaer den af $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2}$ Led naar tvende Exponenter ere ligestore; af $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.\ 2}$ Led naar 2 og 2 af dem ere ligestore; af $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.\ 3}$ Led naar de 3 Exnonenter ere ligestore, og endeligen af $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.\ 3.\ 4}$ Led; naar de alle ere ligestore. Heraf følger at

7) $A^n B^n C^p D^q = \frac{1}{2}((A^n)^2 . A^p . A^q - 2A^n . A^p . A^{n+q} - 2A^n . A^q . A^{n+p} - (A^n)^2 . A^{p+q} - A^{2n} . A^p . A^q + 2A^{n+p} . A^{n+q} + A^{2n} . A^{p+q} + 4A^n . A^{n+p+q} + 2A^p . A^{2n+q} + 2A^q . A^{2n+p} - 6A^{2n+p+q})$.

8) $A^n B^n C^p D^p = \frac{1}{4}((A^n)^2 . (A^p)^2 - 4A^n . A^p . A^{n+p} - (A^n)^2 A^{2p} - (A^p)^2 A^{2n} + 2(A^{n+p})^2 + A^{2n} . A^{2p} + 4A^n . A^{n+2p} + 4A^p . A^{2n+p} - 6A^{2n+2p})$.

9) $A^n B^n C^n D^p = \frac{1}{6}((A^n)^3 A^p - 3A^n . A^{2n} . A^p - 3(A^n)^2 . A^{n+p} + 3A^{2n} . A^{n+p} + 6A^n . A^{2n+p} + 2A^{3n} . A^p - 6A^{3n+p})$.

10) $A^n B^n C^n D^n = \frac{1}{24}((A^n)^4 - 6(A^n)^2 . A^{2n} + 8A^n . A^{3n} + 3(A^{2n})^2 - 6A^{4n})$.

Hvorledes disse Bestemmelser kunne gjøres for Combinationer, i hvis Led fandtes 5 eller flere Bogstaver, sees heraf let.

§. 8.

Da det ogsaa undertiden kan være nødvendigt at forvandle Producterne af de enkelte Combinationer til de sammensatte, anføres her nogle af de vigtigste hidhen hørende Formler, som letteligen udledes af det Foregaaende:

1) $A^n . A^p = A^{n+p} + A^n B^p$.

2) $(A^n)^2 = A^{2n} + 2A^n B^n$.

3) $A^n . A^p . A^q = A^{n+p+q} + A^{n+p} B^q + A^{n+q} B^p + A^{p+q} B^n + A^n B^p C^q$.

4) $(A^n)^2 . A^p = A^{2n+p} + 2A^{n+p} B^n + A^{2n} B^p + 2A^n B^n C^p$.

5) $(A^n)^3 = A^{3n} + 3A^{2n} B^n + 6A^n B^n C^n$.

6) $A^n . A^p . A^q . A^r = A^{n+p+q+r} + A^{n+p+q} B^r + A^{n+p+r} B^q + A^{n+q+r} B^p + A^{p+q+r} B^n + A^{n+p} B^{q+r} + A^{n+q} B^{p+r} + A^{n+r} B^{p+q} + A^{n+p} B^q C^r + A^{n+q} B^p C^r + A^{n+r} B^p C^q + A^{p+q} B^n C^r + A^{p+r} B^n C^q + A^{q+r} B^n C^p + A^n B^p C^q D^r$.

7) $(A^n)^2 \,.\, A^p \,.\, A^q = A^{2n+p+q} + 2A^{n+p+q} B^n + A^{2n+p} B^q + A^{2n+q} B^p + 2A^{n+p} B^{n+q} + A^{2n} B^{p+q} + 2A^{n+p} B^n C^q + 2A^{n+q} B^n C^p + A^{2n} B^p C^q + 2A^n B^n C^{p+q} + 2A^n B^n C^p D^q.$

8) $(A^n)^2 \,.\, (A^p)^2 = A^{2n+2p} + 2A^{2n+p} B^p + 2A^{n+2p} B^n + 4A^{n+p} B^{n+p} + A^{2n} B^{2p} + 4A^{n+p} B^n C^p + 2A^{2n} B^p C^p + 2A^{2p} B^n C^n + 4A^n B^n C^p D^p.$

9) $(A^n)^3 \,.\, A^p = A^{3n+p} + 3A^{2n+p} B^n + 3A^{n+p} B^{2n} + A^{3n} B^p + 6A^{n+p} B^n C^n + 3A^{2n} B^n C^p + 6A^n B^n C^n D^p.$

10) $(A^n)^4 = A^{4n} + 4A^{3n} B^n + 6A^{2n} B^{2n} + 12A^{2n} B^n C^n + 24A^n B^n C^n D^n.$

11) $(A^n)^5 = A^{5n} + 5A^{4n} B^n + 10A^{3n} B^{2n} + 20A^{3n} B^n C^n + 30A^{2n} B^{2n} C^n + 60A^{2n} B^n C^n D^n + 120A^n B^n C^n D^n E^n.$

12) $(A^n)^6 = A^{6n} + 6A^{5n} B^n + 15A^{4n} B^{2n} + 20A^{3n} B^{2n} + 30A^{4n} B^n C^n + 60A^{3n} B^{2n} C^n + 90A^{2n} B^{2n} C^{2n} + 120A^{3n} B^n C^n D^n + 180A^{2n} B^{2n} C^n D^n + 360A^{2n} B^n C^n D^n E^n + 720A^n B^n C^n D^n E^n F^n.$

v. s. v.

§. 9.

Til at bestemme de sammensatte Combinationer, som fremkomme ved Multiplicationen af sammensatte og enkelte, kunne nedenstaaende Formler tjene:

1) $A^n B^p \,.\, A^q = A^{n+q} B^p + A^{p+q} B^n + A^n B^p C^q.$

2) $A^n B^p \,.\, A^n = A^{2n} B^p + A^{n+p} B^n + 2A^n B^n C^p.$

3) $A^n B^n \,.\, A^p = A^{n+p} B^n + A^n B^n C^p.$

4) $A^n B^n \,.\, A^n = A^{2n} B^n + 3A^n B^n C^n.$

5) $A^n B^p C^q \,.\, A^r = A^{n+r} B^p C^q + A^{p+r} B^n C^q + A^{q+r} B^n C^p + A^n B^p C^q D^r.$

6) $A^n B^p C^q \,.\, A^n = A^{2n} B^p C^q + A^{n+p} B^n C^q + A^{n+q} B^n C^p + 2A^n B^n C^p D^q.$

7) $A^n B^n C^p \,.\, A^q = A^{n+q} B^n C^p + A^{p+q} B^n C^n + A^n B^n C^p D^q.$

8) $A^n B^n C^p \,.\, A^n = A^{2n} B^n C^p + A^{n+p} B^n C^n + 3A^n B^n C^n D^p.$

9) $A^n B^n C^p \,.\, A^p = A^{n+p} B^n C^p + A^{2p} B^n C^n + 2A^n B^n C^p D^p.$

10) $A^n B^n C^n \,.\, A^p = A^{n+p} B^n C^n + A^n B^n C^n D^p.$

11) $A^n B^n C^n \,.\, A^n = A^{2n} B^n C^n + 4A^n B^n C^n D^n.$

12) $A^n B^p C^q D^r \,.\, A^s = A^{n+s} B^p C^q D^r + A^{p+s} B^n C^q D^r + A^{q+s} B^n C^p D^r + A^{r+s} B^n C^p D^q + A^n B^p C^q D^r E^s.$

13) $A^n B^p C^q D^r \,.\, A^n = A^{2n} B^p C^q D^r + A^{n+p} B^n C^q D^r + A^{n+q} B^n C^p D^r + A^{n+r} B^n C^p D^q + 2A^n B^n C^p D^q E^r.$

14) $A^n B^n C^p D^q \,.\, A^r = A^{n+r} B^n C^p D^q + A^{p+r} B^n C^n D^q + A^{q+r} B^n C^n D^p + A^n B^n C^p D^q E^r.$

15) $A^n B^n C^p D^q \,.\, A^n = A^{2n} B^n C^p D^q + A^{n+p} B^n C^n D^q + A^{n+q} B^n C^n D^p + 3A^n B^n C^n D^p E^q.$

16) $A^n B^n C^p D^q \,.\, A^p = A^{n+p} B^n C^p D^q + A^{2p} B^n C^n D^q + A^{p+q} B^n C^n D^p + 2A^n B^n C^p D^p E^q.$

17) $A^n B^n C^p D^p \,.\, A^q = A^{n+q} B^n C^p D^p + A^{p+q} B^n C^n D^p + A^n B^n C^p D^p E^q.$

18) $A^n B^n C^p D^p \,.\, A^n = A^{2n} B^n C^p D^p + A^{n+p} B^n C^n D^p + 3A^n B^n C^n D^p E^p.$

19) $A^n B^n C^n D^p \,.\, A^q = A^{n+q} B^n C^n D^p + A^{p+q} B^n C^n D^n + A^n B^n C^n D^p E^q.$

20) $A^n B^n C^n D^p \,.\, A^n = A^{2n} B^n C^n D^p + A^{n+p} B^n C^n D^n + 4A^n B^n C^n D^n E^p.$

21) $A^n B^n C^n D^p \,.\, A^p = A^{n+p} B^n C^n D^p + A^{2p} B^n C^n D^n + 2A^n B^n C^n D^p E^p.$

22) $A^n B^n C^n D^n \,.\, A^p = A^{n+p} B^n C^n D^n + A^n B^n C^n D^n E^p.$

23) $A^n B^n C^n D^n \,.\, A^n = A^{2n} B^n C^n D^n + 5A^n B^n C^n D^n E^n.$

v. s. v.

§. 10.

Ere begge Factorerne sammensatte Combinationer, da findes i Almindelighed Productet ved, efter §. 7, at opløse den ene, helst den simpleste, i dens enkelte Combinationer, og dernæst med disse, efter foregaaende Paragraph, at multiplicere den anden Factor. Paa denne Maade ere følgende Producter bestemte:

1) $A^n B^p \,.\, A^q B^r = A^{n+q} B^{p+r} + A^{n+r} B^{p+q} + A^{n+q} B^p C^r + A^{n+r} B^p C^q + A^{p+q} B^n C^r + A^{p+r} B^n C^q + A^n B^p C^q D^r.$

2) $A^n B^p \,.\, A^n B^q = A^{2n} B^{p+q} + A^{n+p} B^{n+q} + A^{2n} B^p C^q + A^{n+q} B^n C^q + A^{n+p} B^n C^q + 2A^{p+q} B^n C^n + 2A^n B^n C^p D^q.$

3) $(A^n B^p)^2 = A^{2n} B^{2p} + 2A^{n+p} B^{n+p} + 2A^{2n} B^p C^p + 2A^{n+p} B^n C^p + 2A^{2p} B^n C^n + 4A^n B^n C^p D^q.$

4) $A^n B^n \,.\, A^p B^q = A^{n+p} B^{n+q} + A^{n+p} B^n C^q + A^{n+q} B^n C^p + A^n B^n C^p D^q.$

5) $A^n B^n \,.\, A^n B^p = A^{2n} B^{n+p} + A^{2n} B^n C^p + 2A^{n+p} B^n C^n + 3A^n B^n C^n D^p.$

6) $A^n B^n \,.\, A^p B^p = A^{n+p} B^{n+p} + A^{n+p} B^n C^n + A^n B^n C^p D^p.$

7) $(A^n B^n)^2 = A^{2n} B^{2n} + 2A^{2n} B^n C^n + 6A^n B^n C^n D^n.$

v. s. v.

Ved Formlerne i dette og de tvende foregaaende Paragrapher maae der vel lægges Mærke til Følgende:

a) De oprindelige uforandrede Exponenter bør ikke antages at være ligestore, med mindre de ere identiske; thi da vilde Combinationen henhøre til en anden Formel. Antoges f. Ex. i 4de Formel $q = n$ i Combinationen $A^{n+p} B^{n} C^{q}$, da henhørte den til den 5te Formel.

b) Er en forandret Exponent liig een oprindelig, maae Combinationen multipliceres med **2**; er den liig med tvende oprindelige, maae den multipliceres med **3**; o. s. v. Er f. Ex. $2n = p + q$ i Combinationen $A^{2n} B^{p+q}$, forvandles den til $2A^{2n} B^{2n}$; er $2n = p$ i Combinationen $2A^{2n} B^{p} C^{p}$, forvandles den til $6A^{2n} B^{2n} C^{2n}$; o. s. v.

c) Ere tvende forandrede Exponenter ligestore, uden at være identiske, multipliceres Combinationen med **2**; ere tvende saadanne ligestore med een oprindelig, multipliceres med **2. 3** eller med **6**; ere de ligestore med tvende oprindelige, multipliceres med $\frac{2.\,3.\,4}{2}$ eller med **12**; o. s. v.

Hvorledes disse Regler nu kunne udvides til flere lignende Tilfælde, vil uden Vanskelighed bestemmes ved Hjelp af Combinations-Regningen.

§. 11.

Dersom de enkelte Factorer til Functionen $\mathbf{X}$ ere $x - a$; $x - b$; $x - c$; $x - d$; ......, da er $A + \alpha = o$; $A^2 + \alpha A + 2\beta = o$; $A^3 + \alpha A^2 + \beta A + 3\gamma = o$; $A^4 + \alpha A^3 + \beta A^2 + \gamma A + 4\delta = o$; o. s. v.

1) $A + \alpha = o$. Dette udledes umiddelbart af §. 6, da nemlig $\alpha = - A$.

2) $A^2 + \alpha A + 2\beta = o$; thi, efter det Foregaaende, er $\alpha A = -(A)^2 = - A^2 - 2AB = - A^2 - 2\beta$, altsaa $A^2 + \alpha A + 2\beta = A^2 - A^2 - 2\beta + 2\beta = o$.

3) $A^3 + \alpha A^2 + \beta A + 3\gamma = o$; thi $\alpha A^2 = - A \,.\, A^2 = - A^3 - A^2 B$ og $\beta A = AB \,.\, A = A^2 B + 3ABC = A^2 B - 3\gamma$; altsaa $A^3 + \alpha A^2 + \beta A + 3\gamma = A^3 - A^3 - A^2 B + A^2 B - 3\gamma + 3\gamma = o$.

4) $A^4 + \alpha A^3 + \beta A^2 + \gamma A + 4\delta = o$; thi $\alpha A^3 = - A \,.\, A^3 = - A^4 - A^3 B$; $\beta A^2 = AB \,.\, A^2 = A^3 B + A^2 BC$ og $\gamma A = - ABC \,.\, A = - A^2 BC - 4ABCD = - A^2 BC - 4\delta$; altsaa $A^4 + \alpha A^3 + \beta A^2 + \gamma A + 4\delta = A^4 - A^4 - A^3 B + A^3 B + A^2 BC - A^2 BC - 4\delta + 4\delta = o$.

o. s. v.

Det Samme gjelder for Ligningen $a^m + \alpha a^{m-1} + \beta a^{m-2} + \gamma a^{m-3} + \delta a^{m-4} \ldots + \chi a^2 + \psi a + \omega = o$, hvis Rødder ere a; b; c; d; ......

§. 12.

Dersom Functionen eller Ligningen ikke overskrider den 5te Grad, udledes af det foregaaende Paragraph følgende Formler:

1) $A = -\alpha$. 2) $A^2 = \alpha^2 - 2\beta$. 3) $A^3 = -\alpha^3 + 3\alpha\beta - 3\gamma$.

4) $A^4 = \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 2\beta^2 + 4\alpha\gamma - \delta$.

5) $A^5 = -\alpha^5 + 5\alpha^3\beta - 5\alpha\beta^2 - 5\alpha^2\gamma + 5\beta\gamma + 5\alpha\delta - 5\varepsilon$.

6) $A^6 = \alpha^6 - 6\alpha^4\beta + 9\alpha^2\beta^2 - 2\beta^3 + 6\alpha^3\gamma - 12\alpha\beta\gamma + 3\gamma^2 - 6\alpha^2\delta + 6\beta\delta + 6\alpha\varepsilon$.

7) $A^7 = -\alpha^7 + 7\alpha^5\beta - 14\alpha^3\beta^2 + 7\alpha\beta^3 - 7\alpha^4\gamma + 21\alpha^2\beta\gamma - 7\beta^2\gamma - 7\alpha\gamma^2 + 7\alpha^3\delta - 14\alpha\beta\delta + 7\gamma\delta - 7\alpha^2\varepsilon + 7\beta\varepsilon$.

8) $A^8 = \alpha^8 - 8\alpha^6\beta + 20\alpha^4\beta^2 - 16\alpha^2\beta^3 + 2\beta^4 + 8\alpha^5\gamma - 32\alpha^3\beta\gamma + 24\alpha\beta^2\gamma + 12\alpha^2\gamma^2 - 8\beta\gamma^2 - 8\alpha^4\delta + 24\alpha^2\beta\delta - 8\beta^2\delta - 16\alpha\gamma\delta + 4\delta^2 + 8\alpha^3\varepsilon - 16\alpha\beta\varepsilon + 8\gamma\varepsilon$.

9) $A^9 = -\alpha^9 + 9\alpha^7\beta - 27\alpha^5\beta^2 + 30\alpha^3\beta^3 - 9\alpha\beta^4 - 9\alpha^6\gamma + 45\alpha^4\beta\gamma - 54\alpha^2\beta^2\gamma + 9\beta^3\gamma - 18\alpha^3\gamma^2 + 27\alpha\beta\gamma^2 - 3\gamma^3 + 9\alpha^5\delta - 36\alpha^3\beta\delta + 27\alpha\beta^2\delta + 27\alpha^2\gamma\delta - 18\beta\gamma\delta - 9\alpha\delta^2 - 9\alpha^4\varepsilon + 27\alpha^2\beta\varepsilon - 9\beta^2\varepsilon - 18\alpha\gamma\varepsilon + 9\delta\varepsilon$.

10) $A^{10} = \alpha^{10} - 10\alpha^8\beta + 35\alpha^6\beta^2 - 50\alpha^4\beta^3 + 25\alpha^2\beta^4 - 2\beta^5 + 10\alpha^7\gamma - 60\alpha^5\beta\gamma + 100\alpha^3\beta^2\gamma - 40\alpha\beta^3\gamma + 25\alpha^4\gamma^2 - 60\alpha^2\beta\gamma^2 + 15\beta^2\gamma^2 + 10\alpha\gamma^3 - 10\alpha^6\delta + 50\alpha^4\beta\delta - 60\alpha^2\beta^2\delta + 10\beta^3\delta - 40\alpha^3\gamma\delta + 60\alpha\beta\gamma\delta - 10\gamma^2\delta + 15\alpha^2\delta^2 - 10\beta\delta^2 + 10\alpha^5\varepsilon - 40\alpha^3\beta\varepsilon + 30\alpha\beta^2\varepsilon - 20\beta\gamma\varepsilon - 20\alpha\delta\varepsilon + 5\varepsilon^2$.

o. s. v.

§. 13.

Af det Foregaaende sees at naar Functionens eller Ligningens Coefficienter ere givne, Værdierne af A, A^2, A^3, A^4, ... da deraf kunne bestemmes. Ere omvendt disse sidste Størrelser givne, kunne deraf Coefficienterne udledes. Af foregaaende Paragraph findes nemlig:—

1) $\alpha = -A$. 2) $\beta = \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}(A)^2 - \frac{1}{2}A^2$.

3) $\gamma = -\frac{1}{3}\alpha^3 + \alpha\beta - \frac{1}{3}A^3 = -\frac{1}{6}(A)^3 + \frac{1}{2}A \,.\, A^2 - \frac{1}{3}A^3$.

4) $\delta = \frac{1}{4}\alpha^4 - \alpha^2\beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \alpha\gamma - \frac{1}{4}A^4 = \frac{1}{24}(A)^4 - \frac{1}{4}(A)^2 \,.\, A^2 + \frac{1}{8}(A^2)^2 + \frac{1}{3}A \,.\, A^3 - \frac{1}{4}A^4$.

5) $\varepsilon = -\frac{1}{5}\alpha^5 + \alpha^3\beta - \alpha\beta^2 - \alpha^2\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta - \frac{1}{5}A^5 = -\frac{1}{120}(A)^5 + \frac{1}{12}(A)^3 \,.\, A^2 - \frac{1}{6}(A)^2 \,.\, A^3 - \frac{1}{8}A \,.\, (A^2)^2 + \frac{1}{4}A \,.\, A^4 + \frac{1}{6}A^2 \,.\, A^3 - \frac{1}{5}A^5$.

o. s. v.

Heraf kan man betjene sig til af en given Ligning at finde en nye, hvis Rødder ere f. Ex. de n^{te} Potentser af den Givnes. Af denne bestemmes nemlig først, efter foregaaende Paragraph, Værdierne af A^n, A^{2n}, A^{3n}, ... A^{mn} og af disse kunne da igjen, efter det nylig anførte, Coefficienterne til den nye Ligning udfindes.

§. 14.

Divideres den almindelige Ligning $x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \gamma x^{m-3} \ldots\ldots\ldots + \tau x^5 + \upsilon x^4 + \varphi x^3 + \chi x^2 + \psi x + \omega = 0$ med ωx^m og Ledene sættes i omvendt Orden, fremkommer Ligningen $x^{-m} + \frac{\psi}{\omega} x^{-m+1} + \frac{\chi}{\omega} x^{-m+2} + \frac{\varphi}{\omega} x^{-m+3} + \frac{\upsilon}{\omega} x^{-m+4} + \frac{\tau}{\omega} x^{-m+5} \ldots\ldots\ldots = 0$, som, naar vi sætte $x^{-1} = {}'x$, forvandles til denne:

$$'x^m + \frac{\psi}{\omega}\,'x^{m-1} + \frac{\chi}{\omega}\,'x^{m-2} + \frac{\varphi}{\omega}\,'x^{m-3} + \frac{\upsilon}{\omega}\,'x^{m-4} + \frac{\tau}{\omega}\,'x^{m-5} \ldots\ldots\ldots = 0.$$

Heraf kunne vi nu, ved Hjelp af §. 12, bestemme Værdierne af $'X$, $'X^2$, $'X^3$, ... det er af X^{-1}, X^{-2}, X^{-3}, ... eller, naar den første Lignings Rødder ere a, b, c, d, e, ... af A^{-1}, A^{-2}, A^{-3}, ... Vi finde derved:

1) $A^{-1} = -\frac{\psi}{\omega}$; 2) $A^{-2} = \frac{\psi^2}{\omega^2} - \frac{2\chi}{\omega}$; 3) $A^{-3} = -\frac{\psi^3}{\omega^3} + \frac{3\psi\chi}{\omega^2} - \frac{3\varphi}{\omega}$;

4) $A^{-4} = \frac{\psi^4}{\omega^4} - \frac{4\psi^2\chi}{\omega^3} + \frac{2\chi^2}{\omega^2} + \frac{4\psi\varphi}{\omega^2} - \frac{4\upsilon}{\omega}$;

5) $A_{-5} = -\frac{\psi^5}{\omega^5} + \frac{5\psi^3\chi}{\omega^4} - \frac{5\psi\chi^2}{\omega^3} - \frac{5\psi^2\varphi}{\omega^3} + \frac{5\chi\varphi}{\omega^2} + \frac{5\psi\upsilon}{\omega^2} - \frac{5\tau}{\omega}$;

o. s. v.

Vi kunne saaledes i Almindelighed bestemme Værdien af A^n, hvad enten n er positiv eller negativ, naar det blot er et heelt Tal. Hvad Værdien af A^0 angaaer, da er $A^0 = a^0 + b^0 + c^0 + d^0 \ldots\ldots = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots = m$. Naar derfor Exponenten til en enkelt Combination i §. 7, §. 8, §. 9 og §. 10 er $= 0$, maae i dens Sted sættes m; saaledes er $A^{n+p} = m$, naar $n + p = 0$. Er det samme Tilfældet ved en sammensat Combination, bliver denne derved mindre sammensat, og den nye Combination maae tillige multipliceres med Qvotienten af Ledenes Antal i begge. Saaledes, dersom i Combinationen $A^{n+q} B^{p+r}$, $n + q$ er $= 0$, forvandles den til $(m - 1) A^{p+r}$, naar Røddernes Antal er $= m$; thi Ledenes Antal i $A^{n+q} B^{p+r}$ er $= m (m - 1)$ og i A^{p+r} er det $= m$, altsaa bliver i det opgivne Tilfælde Combinationen $A^{n+q} B^{p+r}$ forvandlet til $\frac{m(m-1)}{m} A^{p+r}$ det er til $(m-1) A^{p+r}$.

§. 15.

Divideres Ligningen $A = o$ med $a - b$, bliver Qvotienten følgende: $a^{m-1} + (b + \alpha) a^{m-2} + (b^2 + \alpha b + \beta) a^{m-3} + (b^3 + \alpha b^2 + \beta b + \gamma) a^{m-4} + (b^4 + \alpha b^3 + \beta b^2 + \gamma b + \delta) a^{m-5} \ldots\ldots = 0$, som, naar vi sætte $b = a$, efter behørig Reduction, forvandles til denne Ligning: $m a^{m-1} + (m-1) \alpha a^{m-2} + (m-2) \beta a^{m-3} + (m-3) \gamma a^{m-4} + (m-4) \delta a^{m-5} + \ldots\ldots = 0$, hvilken vi ville sætte $= {}'A$. Betjene vi os af et Differential-Udtryk, bliver ${}'A = dA : da$.

Da $\alpha = -a - B$; $\beta = aB + BC$; $\gamma = -aBC - BCD$; $\delta = aBCD + BCDE$; o. s. v., findes ogsaa ${}'A = a^{m-1} - Ba^{m-2} + BCa^{m-3} - BCDa^{m-4} + BCDEa^{m-5} \ldots\ldots$ altsaa $= (a-b)(a-c)(a-d)(a-e) \ldots\ldots$

Paa samme Maade kunne Ligningerne $B, C, D, E, \ldots\ldots$ behandles. I Almindelighed bliver derfor

$${}'A = ma^{m-1} + (m-1)\alpha a^{m-2} + (m-2)\beta a^{m-3} \ldots 2\chi a + \psi = (a-b)(a-c)(a-d(a-e) \ldots$$
$${}'B = mb^{m-1} + (m-1)\alpha b^{m-2} + (m-2)\beta b^{m-3} \ldots 2\chi b + \psi = (b-a)(b-c)(b-d)(b-e) \ldots$$
$${}'C = mc^{m-1} + (m-1)\alpha c^{m-2} + (m-2)\beta c^{m-3} \ldots 2\chi c + \psi = (c-a)(c-b)(c-d)(c-e) \ldots$$

o. s. v.

Da Antallet af disse Størrelser er m, høre de til en Ligning af m^{te} Grad, hvilken vi ville betegne paa denne Maade:

$${}'A^m + {}'\alpha\, {}'A^{m-1} + {}'\beta\, {}'A^{m-2} + {}'\gamma\, {}'A^{m-3} \ldots\ldots + {}'\chi\, {}'A^2 + {}'\varphi\, {}'A + {}'\omega = o$$

Ved dernæst at tage Summen af ${}'A, {}'B, {}'C, \ldots\ldots$, af deres Qvadrater, Cuber, Biqvadrater, o. s. v., kunne vi, efter §. 13, bestemme ${}'\alpha, {}'\beta, {}'\gamma, \ldots\ldots$ udtrykte rationalt i $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots$ I Øvrigt er ${}'\alpha$ en Function af $(m-1)$ Dimensioner, ${}'\beta$ af $2(m-1)$, ${}'\gamma$ af $3(m-1)$, o. s. v. indtil ${}'\omega$ som er af $m(m-1)$ Dimensioner.

Da ${}'\omega = \pm (a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 \ldots\ldots (b-c)^2 (b-d)^2 \ldots\ldots (c-d)^2 \ldots$, hvor $+$ gjelder naar $\frac{m(m-1)}{2}$ er et lige Tal og $-$ naar det er lige, sees det let at ${}'\omega$ nødvendigen maae blive $= o$ naar Ligningen har ligestore Rødder, og at omvendt Ligningen maae have i det mindste tvende ligestore Rødder naar ${}'\omega$ er $= o$. Heraf følger at Functionen ${}'\omega$ maae findes i de algebraiske Udtryk for Ligningens Rødder i en saadan Forbindelse med de øvrige Dele af Udtrykkene at tvende Rødder blive ligestore naar ${}'\omega$ sættes $= o$.

Dersom Ligningen $\mathbf{A} = o$ har tvende ligestore Rødder, da finder tillige Ligningen $'\mathbf{A} = o$ Sted og disse Ligninger have derfor i det mindste een Rod tilfælles. Vi kunne følgeligen af dem ved Addition og Subtraction udfinde en enkelt Ligning for a og saaledes bestemme Værdien af de ligestore Rødder i Hoved-Ligningen, udtrykt rationalt i Dennes Coefficienter. De øvrige Rødder indeholdes dernæst i en Ligning af $(m-2)^{de}$ Grad, som, hvis disse Rødder ere c, d, e, ..., bliver $c^{m-2} + (2a + \alpha)\ c^{m-3} + (3a^2 + 2\alpha a + \beta)\ c^{m-4} + (4a^3 + 3\alpha a^2 + 2\beta a + \gamma)\ c^{m-5} \ldots\ldots = o$, der er funden ved at dividere Ligningen $\mathbf{C} = o$ med $c^2 - 2ac + a^2$.

Af det Foregaaende sees at Ligningen $x^m + \omega = o$ ikke kan have ligestore Rødder, med mindre ω er Nul. Heraf følger igjen at alle Værdierne af $\sqrt[m]{-\omega}$ ere forskjellige.

§. 16.

Divideres Ligningen $\mathbf{A} = o$ med $(a-b)(a-c)$, det er med $a^2 - (b+c)\,a + bc$, bliver Qvotienten denne: $a^{m-2} + (b + c + \alpha)\ a^{m-3} + (b^2 + bc + c^2 + \alpha\,(b + c) + \beta)\ a^{m-4} + (b^3 + b^2c + bc^2 + c^3 + \alpha\,(b^2 + bc + c^2) + \beta\,(b + c) + \gamma)\ a^{m-5} \ldots\ldots = o$, som, naar vi sætte $b = c = a$, forvandles til $\frac{m\ (m-1)}{2}\ a^{m-2} + \frac{(m-1)\ (m-2)}{2}\ \alpha a^{m-3} + \frac{(m-2)\ (m-3)}{2}\ \beta a^{m-4} + \frac{(m-3)\ (m-4)}{2}\ \gamma a^{m-5} + \frac{(m-4)\ (m-5)}{2}\ \delta a^{m-6} \ldots \ldots = o$, en Ligning vi ville betegne med $''\mathbf{A} = o$. Indsættes heri de i foregaaende Paragraph angivne Værdier for $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots$, da bliver, efter behørig Reduction, $''\mathbf{A} = (m-1)\ a^{m-2} - (m-2)\ \mathrm{B}a^{m-3} + (m-3)\ \mathrm{BC}a^{m-4} - (m-4)\ \mathrm{BCD}a^{m-5} + (m-5)\ \mathrm{BCDE}a^{m-6} \ldots\ldots$ altsaa $''\mathbf{A} = d'\mathbf{A} : da = d\ ((a-b)\ (a-c)\ (a-d)\ (a-e) \ldots\ldots) : da = {}'\mathbf{A}\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \frac{1}{a-d} + \frac{1}{a-e} \ldots\ldots\right)$; følgeligen $''\mathbf{A} = {}'\mathbf{A}\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \frac{1}{a-d} + \frac{1}{a-e} \ldots\ldots\right)$. Paa samme Maade kunne Ligningerne $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \ldots\ldots$ behandles. I Almindelighed bliver derfor

$$''\mathbf{A} = \frac{m\,(m-1)}{2}\,a^{m-2} + \frac{(m-1)\,(m-2)}{2}\,\alpha a^{m-3} + \frac{(m-2)\,(m-3)}{2}\,\beta a^{m-4} \ldots\ldots + 3\varphi\alpha + \chi$$

$$= {}'\mathbf{A}\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \frac{1}{a-d} + \frac{1}{a-e} + \ldots\ldots\right)$$

$$''B = \frac{m(m-1)}{2} b^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} \alpha b^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2} \beta b^{m-4} \ldots\ldots + 3\varphi\beta + \chi$$
$$= 'B \left(\frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-d} + \frac{1}{b-e} + \ldots\ldots\right)$$

$$''C = \frac{m(m-1)}{2} c^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} \alpha c^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2} \beta c^{m-4} \ldots\ldots + 3\varphi c + \chi$$
$$= 'C \left(\frac{1}{c-a} + \frac{1}{c-b} + \frac{1}{c-d} + \frac{1}{c-e} + \ldots\ldots\right)$$

o. s. v.

For disse Størrelser kunne vi nu danne en Ligning, som vi ville betegne saaledes:

$$''A^m + ''\alpha\, ''A^{m-1} + ''\beta\, ''A^{m-2} + ''\gamma\, ''A^{m-3} \ldots\ldots + ''\chi\, ''A^2 + ''\psi\, ''A + ''\omega = o$$

og hvis Coefficienter, efter det Foregaaende, rationalt lade sig udtrykke i Hoved-Ligningens Coefficienter. At $''\alpha$ er en Function af $(m-2)$ Dimensioner; $''\beta$ af $2(m-2)$; $''\gamma$ af $3(m-2)$; o. s. v. indtil $''\omega$ som er af $m(m-2)$ Dimensioner, sees let.

Da $A = o$, $'A = o$ og $''A = o$ naar den første har trende ligestore Rødder, kunne af disse flere enkelte Ligninger for a bestemmes, eftersom de nemlig udledes af 1ste og 3die, af 2den og 3die eller af dem alle trende. For Hoved-Ligningens øvrige Rødder, som vi ville betegne med d, e, f, ..., bliver Ligningen denne: $d^{m-3} + (3a + \alpha) d^{m-4} + (6a^2 + 3\alpha a + \beta) d^{m-5} + (10a^3 + 6\alpha a^2 + 3\beta a + \gamma) d^{m-6} + (15a^4 + 10\alpha a^3 + 6\beta a^2 + 3\gamma a + \delta) d^{m-7} \ldots\ldots = o$, hvilken Ligning er funden ved at dividere $D = o$ med $d^3 - 3ad^2 + 3a^2d - a^3$.

Dersom en Ligning kun bestaaer af 3 Led, kan den ikke have trende ligestore Rødder.

§. 17.

Divideres Ligningen $A = o$ med $(a-b)(a-c)(a-d)$ det er med $a^3 - (b+c+d)a^2 + (bc+bd+cd)a - bcd$, bliver Qvotienten denne: $a^{m-3} + (b+c+d+\alpha) a^{m-4} + (b^2+c^2+d^2+bc+bd+cd+\alpha(b+c+d)+\beta) a^{m-5} + (b^3+c^3+d^3+b^2c+bc^2+b^2d+bd^2+c^2d+cd^2+bcd+\alpha(b^2+c^2+d^2+bc+bd+cd)+\beta(b+c+d)+\gamma) a^{m-6} \ldots\ldots = o$, som naar vi sætte $b = c = d = a$, forvandles til

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\,3} a^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.\,3} \alpha a^{m-4} + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2.\,3} \beta a^{m-5}$$

$+\frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{2.\ 3}\gamma a^{m-6}\ldots\ldots = o$, en Ligning vi ville betegne med $'''\mathbf{A} = o$. Indsættes heri de forhen angivne Værdier af $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$, bliver, efter behørig Reduction,

$$'''\mathbf{A} = \frac{(m-1)(m-2)}{2}a^{m-3} - \frac{(m-2)(m-3)}{2}Ba^{m-4} + \frac{(m-3)(m-4)}{2}BCa^{m-5}$$

$$-\frac{(m-4)(m-5)}{2}BCDa^{m-6} + \frac{(m-5)(m-6)}{2}BCDEa^{m-7}\ldots\ldots = o,$$ hvoraf sees at

$'''\mathbf{A} = d''\mathbf{A} : 2da$. Men $d''\mathbf{A} : 2da = d\left[{}'\mathbf{A}\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-d}+\frac{1}{a-e}\ldots\ldots\right)\right] : 2da$

$$= \left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-d}+\frac{1}{a-e}\ldots\ldots\right).\ d'\mathbf{A} : 2da + {}'\mathbf{A}d\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-c}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a-d}+\frac{1}{a-e}\ldots\ldots\right) : 2da = \tfrac{1}{2}\,{}'\mathbf{A}\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-d}+\frac{1}{a-e}\ldots\ldots\right)^2$$

$$-\tfrac{1}{2}\,{}'\mathbf{A}\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(a-c)^2}+\frac{1}{(a-d)^2}+\frac{1}{(a-e)^2}\ldots\ldots\right) = {}'\mathbf{A}\left(\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{a-c}\right.$$

$$+\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{a-d}+\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{a-e}\ldots\ldots+\frac{1}{a-c}\cdot\frac{1}{a-d}+\frac{1}{a-c}\cdot\frac{1}{a-e}\ldots\ldots$$

$\left.+\frac{1}{a-d}\cdot\frac{1}{a-e}\ldots\ldots\right) = {}'''\mathbf{A}$. Paa samme Maade kunne Ligningerne $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \ldots\ldots$ behandles. I Almindelighed bliver derfor:

$$'''\mathbf{A} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3}a^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.\ 3}\alpha a^{m-4} + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2.\ 3}\beta a^{m-5}$$
$$+\frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{2.\ 3}\gamma a^{m-6}\ldots + 4va + \varphi = {}'\mathbf{A}\left(\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{a-d}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{a-e}\ldots+\frac{1}{a-c}\cdot\frac{1}{a-d}+\frac{1}{a-c}\cdot\frac{1}{a-e}\ldots+\frac{1}{a-d}\cdot\frac{1}{e-e}\ldots\ldots\right)$$

$$'''\mathbf{B} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3}b^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.\ 3}\alpha b^{m-4} + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2.\ 3}\beta b^{m-5}$$
$$+\frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{2.\ 3}\gamma b^{m-6}\ldots + 4vb + \varphi = {}'\mathbf{B}\left(\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{b-c}+\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{b-d}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{b-e}\ldots+\frac{1}{b-c}\cdot\frac{1}{b-d}+\frac{1}{b-c}\cdot\frac{1}{b-e}\ldots+\frac{1}{b-d}\cdot\frac{1}{b-e}\ldots\ldots\right)$$

$$'''C = \frac{m(m-1)(m-2)}{2.\ 3} c^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.\ 3} \alpha c^{m-4} + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2.\ 3} \beta c^{m-5}$$
$$+ \frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{2.\ 3} \gamma c^{m-6} \ldots + 4\nu c + \varphi = 'C\left(\frac{1}{c-a}\cdot\frac{1}{c-b} + \frac{1}{c-a}\cdot\frac{1}{c-d}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{c-a}\cdot\frac{1}{c-e}\ldots + \frac{1}{c-b}\cdot\frac{1}{c-d} + \frac{1}{c-b}\cdot\frac{1}{c-e}\ldots + \frac{1}{c-d}\cdot\frac{1}{c-e}\ldots\right)$$
o. s. v.

Ogsaa for disse Størrelser kunne vi danne en Ligning, som vi ville betegne paa denne Maade:

$$'''A^m + '''\alpha\, '''A^{m-1} + '''\beta\, '''A^{m-2} + '''\gamma\, '''A^{m-3} \ldots + '''\chi\, '''A^2 + '''\psi\, '''A + '''\omega = o$$

og hvis Coefficienter ligeledes rationalt lade sig udtrykke i Hoved-Ligningens Coefficienter. I Øvrigt er $'''\alpha$ en Function af $(m-3)$ Dimensioner, $'''\beta$ af $2(m-3)$, $'''\gamma$ af $3(m-3)$ o. s. v. indtil $'''\omega$, som er af $m(m-3)$ Dimensioner.

Da $A = o$, $'A = o$, $''A = o$ og $'''A = o$ naar den Første har fire ligestore Rødder, kunne af disse flere enkelte Ligninger for a bestemmes, eftersom de nemlig udledes af tvende af de givne Ligninger, eller af trende, eller af dem alle fire. Dersom Hoved-Ligningens øvrige Rødder ere e, f, g, ..., bliver Ligningen for dem denne: $e^{m-4} + (4a + \alpha)e^{m-5} + (10a^2 + 4\alpha a + \beta)e^{m-6} + (20a^3 + 10\alpha a^2 + 4\beta a + \gamma)e^{m-7} + (35a^4 + 20\alpha a^3 + 10\beta a^2 + 4\gamma a + \delta)e^{m-8} \ldots\ldots = o$, som er funden ved at dividere $E = o$ med $e^4 - 4ae^3 + 6a^2e^2 - 4a^3e + a^4$.

Bestaaer en Ligning kun af 4 Led, kan den ikke have 4 ligestore Rødder.

Hvorledes nu Bestemmelserne skee for flere end 4 ligestore Rødder, vil let sees af det Foregaaende, ligesom ogsaa Formlerne for de dertil henhørende Størrelser letteligen ved Analogie kunne udfindes.

At Bogstav-Brøkerne bortfalde i Udtrykkene for $''A$, $''B$, $''C$, ... saavelsom for $'''A$, $'''B$, $'''C$, ... o. s. v. følger af Formerne for $'A$, $'B$, $'C$, ...

§. 18.

For af Ligningen $A = o$ at danne en nye, hvori det 2det Led mangler, sættes $a + n = a$, $b + n = b$, $c + n = c$, $d + n = d$, ... Tages nu Summen af disse Ligninger, hvis Antal er m, da findes $A + mn = A$, det er $-\alpha + mn = A$, men da det 2det Led i den nye Ligning skal mangle, bliver $A = o$, altsaa er $-\alpha + mn = o$, hvoraf udledes at $\mathfrak{n} = \frac{1}{m}\,a$. Vi have saaledes $a + \frac{1}{m}\,\alpha = \dot{a}$ og følgelig $a = \dot{a} - \frac{1}{m}\,\alpha$. Indsættes denne Værdie af a i $\mathbf{A} = o$, faae vi denne Ligning: $\dot{a}^m - \left(\frac{m-1}{2m}\,\alpha^2 - \beta\right)\dot{a}^{m-2} + \left(\frac{(m-1)(m-2)}{3m^2}\,\alpha^3 - \frac{m-2}{m}\,\alpha\beta + \gamma\right)\dot{a}^{m-3} - \left(\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.\,4m^3}\,\alpha^4 - \frac{(m-2)(m-3)}{2m^2}\,\alpha^2\beta + \frac{m-3}{m}\,\alpha\gamma - \delta\right)\dot{a}^{m-4} \ldots\ldots = o$, eller, for Korthheds Skyld, $\dot{a}^m + \dot{\beta}\,\dot{\alpha}^{m-2} + \dot{\gamma}\,\dot{\alpha}^{m-3} + \dot{\delta}\,a^{m-4} \ldots\ldots = o$. Det samme Resultat kunde være udbragt ved at bestemme Værdierne af $\dot{A}^2, \dot{A}^3, \dot{A}^4, \ldots\ldots$, hvoraf igjen, efter §. 13, $\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\delta}, \ldots\ldots$ kunde findes. Da vi saaledes stedse ere i Stand til at bortskaffe det 2det Led i en Ligning, kunne vi uden videre sætte $\alpha = o$, og heraf ville vi i det Følgende i Almindelighed betjene os, da Udtrykkene for Rødderne derved mangfoldig forkortes.

Anvendes det Foregaaende paa den qvadratiske Ligning $a^2 + \alpha a + \beta = o$, bliver $a = \dot{a} - \frac{1}{2}\alpha$, altsaa $\dot{a}^2 - \frac{1}{4}\alpha^2 = \beta = o$, $\dot{a}^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 - \beta$, $\dot{a} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta}$ og derfor $\dot{b} = \mp\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^3 - \beta}$, eller, naar vi blot beholde de øverste Tegn, $\dot{a} = \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta}$ og $\dot{b} = -\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta}$. Følgeligen er $a = -\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta}$ og $b = -\frac{1}{2}\alpha - \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta}$.

§. 19.

Af den qvadratiske Lignings Opløsning kunne vi betjene os for af Ligningen $\mathbf{A} = o$ at danne en nye, hvori baade det 2det og 3die Led mangle. Vi sætte nemlig $a^2 + \mathfrak{n}a + \mathfrak{o} = \ddot{a}$, $b^2 + \mathfrak{n}b + \mathfrak{o} = \ddot{b}$, $c^2 + \mathfrak{n}c + \mathfrak{o} = \ddot{c}$, $d^2 + \mathfrak{n}d + \mathfrak{o} = \ddot{d}, \ldots\ldots$, hvor $\ddot{a}, \ddot{b}, \ddot{c}, \ddot{d}, \ldots\ldots$ ere Rødderne til den forlangte Ligning, hvoraf følger at $\ddot{A} = o$ og $\ddot{A}^2 = o$. Tages nu Summen af disse Ligninger, faae vi $A^2 + \mathfrak{n}A + m\mathfrak{o} = \ddot{A} = o$, hvoraf $\mathfrak{o} = -\frac{1}{m}(A^2 + \mathfrak{n}A)$. Tages dernæst Qvadraternes Sum, findes $A^4 + 2\mathfrak{n}A^3 + \mathfrak{n}^2A^2 + 2\mathfrak{o}A^2 + 2\mathfrak{n}\mathfrak{o}A + m\mathfrak{o}^2 = \ddot{A}^2 = o$, eller, naar $2\mathfrak{o}A^2 + 2\mathfrak{n}\mathfrak{o}A + 2m\mathfrak{o}^2 = o$ fradrages, $A^4 + 2\mathfrak{n}A^3 + \mathfrak{n}^2A^2 - m\mathfrak{o}^2 = o$. Indsættes heri Værdien af $\mathfrak{o}$, findes, efter behørig Reduction, denne qvadratiske Ligning: $\mathfrak{n}^2 + \frac{2(mA^3 - A\,.\,A^2)}{mA^2 - (A)^2}\,\mathfrak{n} = \frac{-mA^4 + (A^2)^2}{mA^2 - (A)^2}$, som, opløst efter foregaaende Paragraph, giver os

$$\mathfrak{n} = \frac{-mA^3 + A\,.\,A^2 \pm \sqrt{m^2((A^3)^2 - A^2\,.\,A^4) + m((A^2)^3 - 2A\,.\,A^2\,.\,A^3 + (A)^2A^4}}{mA^2 - (A)^2}$$

hvoraf igjen findes

$$v = \frac{-(A^2)^2 + A \cdot A^3 \mp \frac{1}{m} A \sqrt{m^2((A^3)^2 - A^2 \cdot A^4) + m((A^2)^3 - 2A \cdot A^2 \cdot A^3 + (A)^2 A^4)}}{mA^2 - (A)^2.}$$

Antages $\alpha = o$, altsaa tillige $A = o$, bliver

$$n = \frac{-mA^3 \pm \sqrt{m^2((A^3)^2 - A^2 \cdot A^4) + m(A^2)^3}}{mA^2} \text{ og } v = \frac{-(A^2)^2}{mA^2} = -\frac{1}{m}A^2$$

eller, udtrykte i Ligningens Coefficienter,

$$n = \frac{3\gamma \pm \sqrt{(4 - \frac{8}{m})\beta^3 + 9\gamma^2 - 8\beta\delta}}{-2\beta} \text{ og } v = \frac{2}{m}\beta.$$

Vi kunne saaledes af enhver Ligning bortskaffe det 2det og 3die Led, hvorfor vi ogsaa undertiden, for Korthedes Skyld, ville sætte $\alpha = o$ og $\beta = o$.

Af dette Paragraph kunde vi betjene os til at opløse enhver cubisk Ligning ved Hjelp af en qvadratisk. Dog udsættes denne Opløsning til det Følgende.

§. 20.

Dersom den givne Ligning er reen og altsaa har denne Form: $a^m + \omega = o$, bliver $a = \sqrt[m]{-\omega}$ og Ligningens Opløsning beroer da paa Bestemmelsen af alle de m Værdier, som Rod-Størrelsen $\sqrt[m]{-\omega}$ kan have. Nu kan $-\omega$ enten være et muligt eller et umuligt Tal, og, hvis det er et muligt Tal, kan det igjen enten være positivt eller negativt. Sættes altsaa, for det Første, $-\omega = \pm n$, bliver $a = \sqrt[m]{\pm n} = \sqrt[m]{n} \cdot \sqrt[m]{\pm 1}$, det er: vi behøve blot at bestemme een af Værdierne for $\sqrt[m]{n}$ (hvilket kan skee paa den sædvanlige Maade) og efterhaanden multiplicere denne med de forskjellige Værdier af $\sqrt[m]{\pm 1}$. Alt beroer derfor paa at udfinde disse Værdier og hertil betjene vi os af Trigonometrien. I denne Videnskab bevises nemlig at dersom φ er en Bue eller Vinkel, hvortil Radien antages $= 1$, er $\sqrt[m]{\cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1}} = \cos\frac{1}{m}\varphi + \sin\frac{1}{m}\varphi\sqrt{-1}$, eller, da $\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1}$ $= \cos(\varphi + q \cdot 360^0) \pm \sin(\varphi + q \cdot 360^0)\sqrt{-1}$, naar q er et heelt Tal, $\sqrt[m]{\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1}} = \cos\frac{1}{m}(\varphi + q \cdot 360^0) \pm \sin\frac{1}{m}(\varphi + q \cdot 360^0)\sqrt{-1}.$

For at anvende dette paa $\sqrt[m]{1}$, sættes $\varphi = 360^0$. Derved faae vi $\sqrt[m]{1} = \cos \frac{1+q}{m} . 360^0 + \sin \frac{1+q}{m} . 360^0 \sqrt{-1}$, hvor for q efterhaanden sættes o; 1; 2; 3; ..... indtil m — 1. De forskjellige Værdier af $\sqrt[m]{1}$ blive altsaa $\cos \frac{1}{m} . 360^0 + \sin . \frac{1}{m} 360^0 \sqrt{-1}$; $\cos \frac{2}{m} . 360^0 + \sin \frac{2}{m} . 360^0 \sqrt{-1}$; $\cos \frac{3}{m} . 360^0 + \sin \frac{3}{m} . 360^0 \sqrt{-1}$; o. s. v. Sættes nu $\cos \frac{1}{m} . 360^0 + \sin \frac{1}{m} . 360^0 \sqrt{-1} = a$, bliver de øvrige Værdier af $\sqrt[m]{1}$ disse: a^2; a^3; a^4; ......; a^m, hvilken sidste Værdie stedse er $= 1$.

Da $a = \sqrt[m]{1}$, bliver $a^m = 1$ og $a^m - 1 = 0$. Men i denne Ligning ere Coefficienterne til alle Mellem-Ledene liig Nul, og derfor er, efter det Foregaaende, $a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots\ldots + a^m = o$ og i Almindelighed $a^s + a^{2s} + a^{3s} + a^{4s} + \ldots\ldots + a^{ms} = o$, forudsat at s er et heelt Tal, som hverken er $= o$, eller $= m$, eller et Multiplum af m.

I det Følgende ville vi betjene os af Bogstavet a, *naar* m *er ubestemt, af* b naar $m = 3$, af c naar $m = 4$ og af d naar $m = 5$. Videre behøve vi her ikke at gaae. Vi faae da:

$$b = \cos 120^0 + \sin 120^0 \sqrt{-1} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2};\ b^2 = \cos 240^0 + \sin 120^0 \sqrt{-1}$$
$$= \frac{-1-\sqrt{-3}}{2};\ b^3 = 1.$$

$$c = \cos 90^0 + \sin 90^0 \sqrt{-1} = \sqrt{-1};\ c^2 = \cos 180^0 + \sin 180^0 \sqrt{-1} = -1;$$
$$c^3 = \cos 270^0 + \sin 270^0 \sqrt{-1} = -\sqrt{-1};\ c^4 = 1.$$

$$d = \cos 72^0 + \sin 72^0 \sqrt{-1} = \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4};\ d^2 = \cos 144^0$$
$$+ \sin 144^0 \sqrt{-1} = \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4};\ d^3 = \cos 216^0$$
$$+ \sin 216^0 \sqrt{-1} = \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4};\ d^4 = \cos 288^0$$
$$+ \sin 288^0 \sqrt{-1} = \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4};\ d^5 = 1.$$

Da $\sqrt{-10-2\sqrt{5}} = \sqrt{-5-2\sqrt{5}} + \sqrt{-5+\sqrt{5}}$ og $\sqrt{-10+2\sqrt{5}} = \sqrt{-5-2\sqrt{5}} - \sqrt{-5+2\sqrt{5}}$, kunne d, d^2, d^3 og d^4 ogsaa fremstilles under disse Former:

$$\mathfrak{d} = \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{-5-2\sqrt{5}}+\sqrt{-5+2\sqrt{5}}}{4};\ \mathfrak{d}^2 = \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{-5-2\sqrt{5}}-\sqrt{-5+2\sqrt{5}}}{4};$$

$$\mathfrak{d}^3 = \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{-5-2\sqrt{5}}+\sqrt{-5+2\sqrt{5}}}{4};\ \mathfrak{d}^4 = \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{-5-2\sqrt{5}}-\sqrt{-5+2\sqrt{5}}}{4}.$$

For at bestemme Værdierne af $\sqrt[m]{-1}$, sættes $\varphi = 180^0$ og vi faae da $\sqrt[m]{-1} = \cos\frac{1+2q}{m}\,180^0 + \sin\frac{1+2q}{m}\,.\,180^0\sqrt{-1}$. De søgte Værdier blive altsaa disse: $\cos\frac{1}{m}\,.\,180^0 + \sin\frac{1}{m}\,.\,180^0\sqrt{-1}$; $\cos\frac{3}{m}\,.\,180^0 + \sin\frac{3}{m}\,.\,180^0\sqrt{-1}$; $\cos\frac{5}{m}\,180^0 + \sin\frac{5}{m}\,.\,180^0\sqrt{-1}$; o. s. v. Sættes derfor $\cos\frac{1}{m}\,180^0 + \sin\frac{1}{m}\,180^0\sqrt{-1} = {}'a$, blive de øvrige Værdier af $\sqrt[m]{-1}$ følgende: $'a^3$; $'a^5$; $'a^7$; . . . . . . $'a^{2m-1}$, af hvilke, dersom m er ulige Tal, den midterste Rod bliver $\cos 180^0 + \sin 180^0\sqrt{-1} = -1$.

Betegnes disse Værdier med $'b$, $'c$ og $'\mathfrak{d}$, naar m er 3; 4 og 5, bliver

$'b = \cos 60^0 + \sin 60^0\sqrt{-1} = -b^2$; $'b^3 = -1$; $'b^5 = \cos 300^0 + \sin 300^0\sqrt{-1} = -b$.

$'c = \cos 45^0 + \sin 45^0\sqrt{-1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{-\tfrac{1}{2}}$; $'c^3 = \cos 135^0 + \sin 135^0\sqrt{-1} = -\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{-\tfrac{1}{2}}$; $'c^5 = \cos 225^0 + \sin 225^0\sqrt{-1} = -\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{-\tfrac{1}{2}}$; $'c^7 = \cos 315^0 + \sin 315^0\sqrt{-1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{-\tfrac{1}{2}}$.

$'\mathfrak{d} = \cos 36^0 + \sin 36^0\sqrt{-1} = -\mathfrak{d}^3$; $'\mathfrak{d}^3 = \cos 108^0 + \sin 108^0\sqrt{-1} = -\mathfrak{d}^4$; $'\mathfrak{d}^5 = -1$; $'\mathfrak{d}^7 = \cos 252^0 + \sin 252^0\sqrt{-1} = -\mathfrak{d}$; $'\mathfrak{d}^9 = \cos 324^0 + \sin 324^0\sqrt{-1} = -\mathfrak{d}^2$.

Er endeligen $-\omega$ et umuligt Tal og $= n \pm p\sqrt{-1}$, maae vi sætte $n = r\cos\varphi$ og $p = r\sin\varphi$, saaledes nemlig at i Stedet for Radien i den første trigonometriske Formel er $= 1$, den i dette Tilfælde er $= r$. Derved bliver $r = \frac{n}{\cos\varphi}$ og $r = \frac{p}{\sin\varphi}$, altsaa $\frac{n}{\cos\varphi} = \frac{p}{\sin\varphi}$; $n\sin\varphi = p\cos\varphi$; $n^2\sin^2\varphi = p^2\cos^2\varphi = p^2(1-\sin^2\varphi)$; som giver os: $\sin^2\varphi = \frac{p^2}{n^2+p^2}$; $\sin\varphi = \frac{p}{\sqrt{n^2+p^2}}$; $\cos\varphi = \frac{n}{\sqrt{n^2+p^2}}$; $r = \sqrt{n^2+p^2}$; $n = \sqrt{n^2+p^2}\,.\,\cos\varphi$ og $p = \sqrt{n^2+p^2}\sin\varphi$. Følgeligen bliver $\sqrt[m]{n \pm p\sqrt{-1}}$ $\sqrt[m]{\sqrt{n^2+p^2}(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1}} = \sqrt[2m]{n^2+p^2}\left(\cos\frac{1}{m}(\varphi + q\,.\,360^0) \pm \sin\frac{1}{m}(\varphi + q\,.\,360^0)\sqrt{-1}\right)$, hvor for q efterhaanden maae sættes 0; 1; 2, 3; . . . . . indtil $m-1$.

$+ (a^4 + \alpha a^3 + \beta a^2 + \gamma a + \delta)\, a^{m-5} \ldots\ldots = o$ det er $ma^{m-1} + (m-1)\,\alpha a^{m-2} + (m-2)\,\beta a^{m-3} + (m-3)\,\gamma a^{m-4} \ldots\ldots = o$ eller $'A = o$. Altsaa er, efter §. 15, a liig een af de øvrige Rødder, og Hoved-Ligningen har saaledes, naar $'a = o$, i det mindste tvende Rødder ligestore. Ere disse a og b, forvandles de tvende første Hjelpe-Ligninger til den nylig fundne, hvorimod de øvrige kunne fremstilles under denne Form: $c^{m-1} + (a + \alpha)\, c^{m-2} + (a^2 + \alpha a + \beta)\, c^{m-3} + (a^3 + \alpha a^2 + \beta a + \gamma)\, c^{m-4} \ldots\ldots = o$, som, da den multipliceret med $c - a$, efter §. 2, giver os Hoved-Ligningen $C = o$, indeholder een af dennes ligestore Rødder tilligemed dens øvrige Rødder. At Hjelpe-Ligningerne for de ligestore Rødder, kun under den først angivne Form, ere identiske med de andre, sees let.

Har endeligen Hoved-Ligningen tvende ligestore Rødder, bliver $'a = o$; thi er f. Ex. $a = b$, bliver $a^{m-1} + na^{m-2} + oa^{m-3} + pa^{m-4} \ldots\ldots = {'a}$ og $'a^{m-1} + na^{m-2} + oa^{m-3} + pa^{m-4} \ldots\ldots = a\,'a$, altsaa $'a = o$. Heraf følger at $'a$ maae være en saadan Function af Hoved-Ligningens Rødder at den forsvinder, naar tvende eller flere af disse ere ligestore.

Den Tschirnhausenske Methode kan ogsaa anvendes til af en Ligning at danne en nye, hvori eet eller nogle af Mellem-Ledene fattes. Skal den nye Ligning mangle eet Led, f. Ex. det n^{te}, da blive Hjelpe-Ligningerne af 1^{ste} Grad og Coefficienten bestemmes ved en Ligning af $(n-1)^{de}$ Grad. Skulle tvende Led fattes, f. Ex. det n^{te} og det p^{de}, blive Hjelpe-Ligningerne af 2^{den} Grad og Coefficienterne bestemmes da ved Ligninger af $(n-1)(p-1)^{de}$ Grad, o. s. v. Methoden er allerede i §. 18 anvendt til at bortskaffe det 2^{det} Led og i §. 19 til at bortskaffe det 3^{die} Led af en Ligning.

§. 23.

En anden Opløsnings-Methode bestaaer deri at man for Ligningen $A = o$ sætter den ene Rod $a = -\frac{1}{m}\alpha + {'A}$, saaledes at $'A = {'a} + {'b} + {'c} + {'d} + \ldots\ldots$ i et Antal $= m-1$. Efter Indsætningen opløses dernæst de forskjellige Potenser af $'A$, efter §. 8, i deres enkelte og sammensatte Combinationer og man undersøger derpaa om man deraf kan danne $(m-1)$ Ligninger, af hvilke Værdierne for $'A^n$, $'A^n\,'B^n$, $'A^n\,'B^n\,'C^n$, o. s. v. (n er ubestemt), udtrykte i den givne Lignings Coefficienter kunne udfindes. Lader dette sig udføre, faaer man en Ligning af $(m-1)^{de}$ Grad, hvis Rødder ere $'a^n$, $'b^n$, $'c^n$, ... og kan denne Ligning opløses, kan man ogsaa finde Værdien af a. Kunde den ikke opløses, maatte man behandle den paa samme Maade som Hoved-Ligningen, hvorved man fik en Hjelpe-Ligning af $(m-2)^{de}$ Grad og saaledes vedblev man, indtil man kom til en Ligning, der kunde opløses.

Naar dernæst, enten ved een Hjelpe-Ligning eller ved flere, den ene Rod a er bestemt, udledes, efter §. 4, en Ligning for de øvrige Rødder, hvilken Ligning bliver af $(m-1)^{de}$ Grad og af den bestemmer man, ganske paa samme Maade, een af Rødderne, f. Ex. b, og vedbliver saaledes indtil alle Rødderne ere fundne.

Formen for den ene Rod a var altsaa $-\frac{1}{m}\alpha + {}'A$ og de øvrige Rødder indeholdes, efter §. 4, i Ligningen $b^{m-1} + (a+\alpha)\, b^{m-2} + (a^2 + \alpha a + \beta)\, b^{m-3} + \ldots\ldots = o$. Sættes nu, i Analogie med det Foregaaende, $b = -\frac{a+\alpha}{m-1} + {}''A$, hvor ${}''A = {}''a + {}''b + {}''c + {}''d + \ldots\ldots$, i et Antal $= m-2$, da bliver, naar Værdien af a indsættes, $b = -\frac{1}{m}\alpha - \frac{1}{m-1}\,{}'A + {}''A$ og de øvrige Rødder indeholdes, atter efter §. 4, i Ligningen $c^{m-2} + (a+b+\alpha)\, c^{m-3} + (a^2 + ab + b^2 + \alpha(a+b) + \beta)\, c^{m-4} \ldots\ldots = o$. Sættes her $c = -\frac{a+b+\alpha}{m-2} + {}'''A$, hvor ${}'''A = {}'''a + b''' + {}'''c + {}'''d + \ldots\ldots$, i et Antal $= m-3$, da bliver, naar Værdierne af a og b indsættes, $c = -\frac{1}{m}\alpha - \frac{1}{m-1}\,{}'A - \frac{1}{m-2}\,{}''A + {}'''A$. Hvorledes nu Formen for de øvrige Rødder bliver, sees heraf let. Betjene vi os derfor af de angivne Betegninger, og for de følgende Rødder af lignende, kunne Hoved-Ligningens Rødder fremstilles paa denne Maade:

$$a = -\frac{1}{m}\alpha + {}'A$$

$$b = -\frac{1}{m}\alpha - \frac{1}{m-1}\,{}'A + {}''A$$

$$c = -\frac{1}{m}\alpha - \frac{1}{m-1}\,{}'A - \frac{1}{m-2}\,{}''A + {}'''A$$

$$d = -\frac{1}{m}\alpha - \frac{1}{m-1}\,{}'A - \frac{1}{m-2}\,{}''A - \frac{1}{m-3}\,{}'''A + {}''''A$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$æ = -\frac{1}{m}\alpha - \frac{1}{m-1}\,{}'A - \frac{1}{m-2}\,{}''A - \frac{1}{m-3}\,{}'''A - \frac{1}{m-4}\,{}''''A \ldots\ldots + {}^{m-1}a,$$

$$ö = -\frac{1}{m}\alpha - \frac{1}{m-1}\,{}'A - \frac{1}{m-2}\,{}''A - \frac{1}{m-3}\,{}'''A - \frac{1}{m-4}\,{}''''A \ldots\ldots - {}^{m-1}a.$$

Heraf kan igjen udledes

$$'A = \frac{1}{m}\ \alpha + a \qquad\qquad = \frac{1}{m}\ ((m-1)\ a - B)$$

$$''A = \frac{1}{m-1}\ (\alpha + a) + b \qquad\qquad = \frac{1}{m-1}\ ((m-2)\ b - C)$$

$$'''A = \frac{1}{m-2}\ (\alpha + a + b) + c \qquad\qquad = \frac{1}{m-2}\ ((m-3)\ c - D)$$

$$''''A = \frac{1}{m-3}\ (\alpha + a + b + c) + d \quad = \frac{1}{m-3}\ ((m-4)\ d - E)$$

. .

. .

$$^{m-1}a = \tfrac{1}{2}\ (æ - ö).$$

Hvad der for Resten kan være at sige om denne Opløsnings-Mothode saavelsom om den Tschirnhausenske, vil finde et passende Sted der hvor vi anvende dem paa de specielle Ligninger. Det Samme er Tilfældet med adskillige andre Opløsnings-Methoder, som ved deres umiddelbare Anvendelse paa Ligninger af en bestemt Grad, baade lettere forklares og lettere forstaaes.

II. Om de bestemte Bogstav-Ligninger af 2^{den} Grad.

§. 24.

For den almindelige Ligning af 2^{den} Grad $a^2 + \alpha a + \beta = o$, hvis Rødder ere a og b, bliver, efter §. 15,

$$'A = 2a + \alpha = a - b \quad \text{og} \quad 'B = 2b - \alpha = b - a$$

altsaa

$$'A + 'B = 2A + 2\alpha = o \quad \text{og} \quad 'A^2 + 'B^2 = 4A^2 + 4\alpha A + 2\alpha^2 = 2\alpha^2 - 8\beta$$

hvoraf udledes at

$$'\alpha = o \quad \text{og} \quad '\beta = -\alpha^2 + 4\beta.$$

Følgeligen bliver

$$'A^2 - \alpha^2 + 4\beta = o.$$

Betingelsen for begge Rødders Ligestorhed bliver derfor at $'\beta$ er $= o$, hvoraf igjen følger at denne Function maae findes i de almindelige Udtryk for Ligningens Rødder paa en saadan Maade, at naar den sættes $= o$, Rødderne da blive ligestore. Da dernæst $'\beta = -(a-b)^2$, bliver omvendt $'\beta = o$ naar Rødderne ere ligestore. At dette virkeligen forholder sig saaledes, sees af den i §. 18 angivne Opløsning for den qvadratiske Ligning. Vi fandt nemlig der $a = -\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta}$ og $b = -\frac{1}{2}\alpha - \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta}$, altsaa tillige $a = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{-'\beta}$ og $b = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{-'\beta}$, som, for $'\beta = o$, giver os $a = b = -\frac{1}{2}\alpha$, der ere Rødder til Ligningen $a^2 + \alpha a + \beta = o$, og omvendt for $a = b$ giver $'\beta = o$.

§. 25.

Dersom vi, efter §. 23, sætte $a = -\frac{1}{2}\alpha + 'a$ og $b = -\frac{1}{2}\alpha - 'a$, kunne vi paa en dobbelt Maade betjene os heraf til at bestemme Rødderne. Tages nemlig, for det Første, Summen af deres Qvadrater, findes $A^2 = \frac{1}{2}\alpha^2 + 2'a^2$, hvoraf udledes at $'a^2 = \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 - \beta$ og $'a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta}$, som, hvis vi blot lade det øverste Tegn gjelde, gives os $a = -\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta}$ og $b = -\frac{1}{2}\alpha - \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta}$ som tilforn.

Ved dernæst at drage Rødderne fra hverandre, findes $a - b = 2'a$, altsaa $a = \frac{1}{2}(a-b)$. Da nu tillige $\alpha = -(a+b)$, bliver

$$a = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b) \quad \text{og} \quad b = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)$$

som, ved de dobbelte Tegn, tyder hen paa at $a-b$ kan betragtes som en Qvadrat-Rod. Vi sætte derfor $a - = \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$ det er, da $a^2 + b^2 = \alpha^2 - 2\beta$ og $ab = \beta$, $a - b = \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}$ og vi faae derved

$$a = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} = -\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta} \quad \text{og}$$

$$b = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta} = -\frac{1}{2}\alpha - \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta}$$

ligeledes som tilforn.

§. 26.

Af den qvadratiske Lignings Opløsning kunne vi betjene os for at bestemme Værdierne af $\sqrt[3]{1}$. Sættes nemlig $b = \sqrt[3]{1}$, fremkommer heraf denne Ligning $b^3 - 1 = o$. Da nu een af Rødderne til $\sqrt[3]{1}$ er $= 1$, maae $b - 1$ gaae op i $b^3 - 1$ og foretages Divisionen, findes Qvotienten at være $b^2 + b + 1 = o$, der indeholder de tvende andre

Rødder, hvilke, efter foregaaende Paragraph, findes at være $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ og $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Sættes den første $= b$, bliver den anden $= b^2$ og Værdierne af $\sqrt[3]{1}$ blive følgeligen disse:

$$b = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}; \quad b^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \text{ og } b^3 = 1$$

saaledes som de, paa en anden Maade, ere fundne i §. 20.

III. Om de bestemte Bogstav-Ligninger af 3^{die} Grad.

§. 27.

Dersom vi af den almindelige Ligning af 3^{die} Grad $a^3 + \alpha a^2 + \beta a + \gamma = o$, hvis Rødder ere a, b og c, ville bortskaffe det 2^{det} Led, sættes, efter §. 18, $a = \dot{a} - \frac{1}{3}\alpha$. Derved fremkommer Ligningen $\dot{a}^3 - (\frac{1}{3}\alpha^2 - \beta)\,\dot{a}^2 + \frac{2}{27}\alpha^3 - \frac{1}{3}\alpha\beta + \gamma = o$, eller, naar vi sætte $-\frac{1}{3}\alpha^2 + \beta = \dot{\beta}$ og $\frac{2}{27}\alpha^3 - \frac{1}{3}\alpha\beta + \gamma = \dot{\gamma}$, $\dot{a}^3 + \dot{\beta}\dot{a} + \dot{\gamma} = o$, hvis Rødder ere $\dot{a}$, $\dot{b}$ og $\dot{c}$. Imidlertid kunne vi, for Lethedś Skyld, betjene os af denne simplere Betegning $a^3 + \beta a + \gamma = o$, naar vi blot erindre at om α ikke forsvinder, maae $-\frac{1}{3}\alpha^2 + \beta$ sættes for β og $\frac{2}{27}\alpha^3 - \frac{1}{3}\alpha\beta + \gamma$ for γ.

For Ligningen $a^3 + \beta a + \gamma = o$ bliver dernæst, efter §. 15,

$$'A = 3a^2 + \beta = (a-b)(a-c); \; 'B = 3b^2 + \beta = (b-a)(b-c); \; 'C = 3c^2 + \beta = (c-a)(c-b);$$

altsaa

$$'A + 'B + 'C = 3A^2 + 3\beta = -3\beta$$

$$'A^2 + 'B^2 + 'C^2 = 9A^4 + 6\beta A^2 + 3\beta^2 = 9\beta^2$$

$$'A^3 + 'B^3 + 'C^3 = 27A^6 + 27\beta A^4 + 9\beta^2 A^2 + 3\beta^3 = 15\beta^3 + 81\gamma^2$$

hvilket giver os

$$'\alpha = 3\beta; \; '\beta = o \text{ og } '\gamma = -4\beta^3 - 27\gamma^2$$

hvoraf igjen dannes Ligningen

$$'A^3 + 3\beta\, 'A^2 - 4\beta^3 - 27\gamma^2 = o.$$

Betingelsen for tvende Rødders Ligestorhed bliver derfor den at $'\gamma = o$, hvoraf atter følger at denne Function maae findes i de almindelige Udtryk for Ligningens Rødder paa en saadan Maade at naar den sættes $= o$, tvende Rødder da blive ligestore. Da dernæst $'\gamma = (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$, bliver omvendt $'\gamma = o$ naar Ligningen har ligestore Rødder.

§. 28.

Ere i Ligningen $a^3 + \beta a + \gamma = o$ tvende Rødder, f. Ex. b og c ligestore, da er baade $b^3 + \beta b + \gamma = o$ og $3b^2 + \beta = o$ eller $b^2 + \frac{1}{3}\beta = o$. Multipliceres denne sidste Ligning med b og Productet drages fra den første, findes $\frac{2}{3}\beta b + \gamma = o$, altsaa $b = c = -\frac{3\gamma}{2\beta}$. Da nu $a + b + c = o$, bliver $a = -b - c = -2b = \frac{3\gamma}{\beta}$. Heraf dannes igjen Ligningen $a^3 - \frac{27\gamma^2}{4\beta^2}a - \frac{27\gamma^3}{4\beta^3} = o$, som stedse har tvende ligestore Rødder, hvilke Tal vi end sætte for β og γ.

Men i det opgivne Tilfælde er tillige $-4\beta^3 - 27\gamma^2 = o$, som giver os $\beta = -3\sqrt[3]{\frac{1}{4}\gamma^2}$ og $\gamma = \pm\frac{2}{3}\beta\sqrt{-\frac{1}{3}\beta}$. Ligningen for tvende ligestore Rødder bliver derfor ogsaa

$$\text{enten } a^3 + \beta a \pm \tfrac{2}{3}\beta\sqrt{-\tfrac{1}{3}\beta} = o \text{ eller } a^3 - 3\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}\gamma^2}\,.\,a + \gamma = o$$

hvor man ligeledes for β og γ kan sætte hvilkesomhelst Tal.

Skulle i Ligningen $a^3 + \beta a + \gamma = o$ alle Rødder være ligestore, bliver baade $'\alpha = o$ og $'\gamma = o$, det er $3\beta = o$ og $-4\beta^3 - 27\gamma^2 = o$, følgeligen $\beta = o$ og $\gamma = o$. Til Ligningen $a^3 + \beta a + \gamma = o$ bliver altsaa i det opgivne Tilfælde $a = b = c = o$. Var Ligningen derimod denne: $a^3 + \alpha a^2 + \beta a + \gamma = o$, maatte vi i Ovenstaaende sætte $-\frac{1}{3}\alpha^2 + \beta$ for β og $\frac{2}{27}\alpha^3 - \frac{1}{3}\alpha\beta + \gamma$ for γ. Derved fik vi $-\frac{1}{3}\alpha^2 + \beta = o$ og $\frac{2}{27}\alpha^3 - \frac{1}{3}\alpha\beta + \gamma = o$, som giver os $\beta = \frac{1}{3}\alpha^2$ og $\gamma = \frac{1}{27}\alpha^3$. Ligningen blev da denne: $a^3 + \alpha a^2 + \frac{1}{3}\alpha^2 a + \frac{1}{27}\alpha^3 = o$ og a blev $= b = c = -\frac{1}{3}\alpha$.

§. 29.

Til Ligningen $a^3 + \beta a + \gamma = o$ være, efter §. 23, den ene Rod $a = 'a + 'b = 'A$, som indsat giver os $('A)^3 + \beta 'A + \gamma = o$, det er, efter §. 8, $'A^3 + 3'a'b'A + \beta'A + \gamma = o$. Sættes nu $'A^3 + \gamma = o$ og $3'a'b'A + '\beta'A$, findes deraf $'A^3 = -\gamma$ og $'a'b = -\frac{1}{3}\beta$, hvoraf følger at $'a^3$ og $'b^3$ ere Rødder til Ligningen $'a^6 + \gamma\,'a^3 - \frac{1}{27}\beta^3 = o$. Altsaa bliver $'a^3 = -\frac{1}{2}\gamma + \sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}$ og $'b^3 = -\frac{1}{2}\gamma - \sqrt{\frac{1}{22}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}$; følgeligen den ene Rod $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\gamma + \sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\gamma - \sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}}$.

De andre Rødder indeholdes, efter §. 4, i Ligningen $b^2 + ab + a^2 + \beta = o$, som, da $a = {}'a + {}'b$ og $\beta = -3{}'a{}'b$, forvandles til $b^2 + ({}'a + {}'b)\,b + {}'a^2 - {}'a{}'b + {}'b^2 = o$, hvoraf

$$b = -\tfrac{1}{2}({}'a + {}'b) + \sqrt{-\tfrac{3}{4}{}'a^2 + \tfrac{3}{2}{}'a{}'b - \tfrac{3}{4}{}'b^2} = -\tfrac{1}{2}({}'a + {}'b) + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\,({}'a - {}'b)$$
$$= \mathfrak{b}\,{}'a + \mathfrak{b}^2\,{}'b$$

$$c = -\tfrac{1}{2}({}'a + {}'b) - \sqrt{-\tfrac{3}{4}{}'a^2 + \tfrac{3}{2}{}'a{}'b - \tfrac{3}{4}{}'b^2} = -\tfrac{1}{2}({}'a + {}'b) - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\,({}'a - {}'b)$$
$$= \mathfrak{b}^2\,a + \mathfrak{b}\,{}'b$$

det er, naar vi betjene os af de nylig fundne Værdier for ${}'a$ og ${}'b$,

$$b = \mathfrak{b}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$
$$c = \mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \mathfrak{b}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$

For den fuldstændige Ligning $a^3 + \alpha a^2 + \beta a + \gamma = o$ kunne Rødderne korteligen angives saaledes:

$$a = -\tfrac{1}{3}\alpha + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$
$$b = -\tfrac{1}{3}\alpha + \mathfrak{b}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$
$$c = -\tfrac{1}{3}\alpha + \mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \mathfrak{b}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$

naar det blot erindres at, efter §. **27**, maae $-\tfrac{1}{3}\alpha^2 + \beta$ sættes for β og $\tfrac{2}{27}\alpha^3 - \tfrac{1}{3}\alpha\beta + \gamma$ for γ.

Da $\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2 = -\tfrac{1}{108}{}'\gamma$, bliver ${}'a^3 = -\tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{6}\sqrt{-\tfrac{1}{3}{}'\gamma}$ og ${}'b^3 = -\tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{6}\sqrt{-\tfrac{1}{3}{}'\gamma}$. Er derfor ${}'\gamma = o$, bliver ${}'a^3 = {}'b^3$, ${}'a = {}'b$, $a = 2{}'a$ og $b = c = -{}'a$. Er omvendt $b = c$, bliver $\mathfrak{b}\,{}'a + \mathfrak{b}^2\,{}'b = \mathfrak{b}^2\,{}'a + \mathfrak{b}\,{}'b$, altsaa ${}'a = {}'b$ og ${}'a^3 = {}'b^3$, det er $\tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{6}\sqrt{-\tfrac{1}{3}{}'\gamma} = -\tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{6}\sqrt{-\tfrac{1}{3}{}'\gamma}$, hvoraf følger at ${}'\gamma$ bliver $= o$. Alt dette stemmer overeens med hvad der er anført i Slutningen af §. **27**.

Af ${}'a{}'b = -\tfrac{1}{3}\beta$, findes ${}'b = -\dfrac{\beta}{3{}'a}$ og Ligningens Rødder kunne derfor ogsaa gives denne Form:

$$a = {}'a - \frac{\beta}{3{}'a};\quad b = \mathfrak{b}\,{}'a - \frac{\beta}{3\,\mathfrak{b}\,{}'a};\quad c = \mathfrak{b}^2\,{}'a - \frac{\beta}{3\,\mathfrak{b}^2\,{}'a};$$

som har den Fordeel at man af de 6 Rødder i Hjelpe-Ligningen kan vælge hvilken man vil.

De andre Rødder indeholdes, efter §. 4, i Ligningen $b^2 + ab + a^2 + \beta = 0$, som, da $a = {}'a + {}'b$ og $\beta = -3\,{}'a\,{}'b$, forvandles til $b^2 + ({}'a + {}'b)\,b + {}'a^2 - {}'a\,{}'b + {}'b^2 = 0$, hvoraf

$$b = -\tfrac{1}{2}({}'a + {}'b) + \sqrt{-\tfrac{3}{4}{}'a^2 + \tfrac{3}{2}{}'a\,{}'b - \tfrac{3}{4}{}'b^2} = -\tfrac{1}{2}({}'a + {}'b) + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\,({}'a - {}'b)$$
$$= \mathfrak{b}\,{}'a + \mathfrak{b}^2\,{}'b$$

$$c = -\tfrac{1}{2}({}'a + {}'b) - \sqrt{-\tfrac{3}{4}{}'a^2 + \tfrac{3}{2}{}'a\,{}'b - \tfrac{3}{4}{}'b^2} = -\tfrac{1}{2}({}'a + {}'b) - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\,({}'a - {}'b)$$
$$= \mathfrak{b}^2\,a + \mathfrak{b}\,{}'b$$

det er, naar vi betjene os af de nylig fundne Værdier for $'a$ og $'b$,

$$b = \mathfrak{b}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$
$$c = \mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \mathfrak{b}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$

For den fuldstændige Ligning $a^3 + \alpha a^2 + \beta a + \gamma = 0$ kunne Rødderne korteligen angives saaledes:

$$a = -\tfrac{1}{3}\alpha + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$
$$b = -\tfrac{1}{3}\alpha + \mathfrak{b}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}},$$
$$c = -\tfrac{1}{3}\alpha + \mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \mathfrak{b}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$

naar det blot erindres at, efter §. 27, maae $-\tfrac{1}{3}\alpha^2 + \beta$ sættes for β og $\tfrac{2}{27}\alpha^3 - \tfrac{1}{3}\alpha\beta + \gamma$ for γ.

Da $\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2 = -\tfrac{1}{108}{}'\gamma$, bliver ${}'a^3 = -\tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{6}\sqrt{-\tfrac{1}{3}{}'\gamma}$ og ${}'b^3 = -\tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{6}\sqrt{-\tfrac{1}{3}{}'\gamma}$. Er derfor ${}'\gamma = 0$, bliver ${}'a^3 = {}'b^3$, ${}'a = {}'b$, $a = 2\,{}'a$ og $b = c = -{}'a$. Er omvendt $b = c$, bliver $\mathfrak{b}\,{}'a + \mathfrak{b}^2\,{}'b = \mathfrak{b}^2\,{}'a + \mathfrak{b}\,{}'b$, altsaa ${}'a = {}'b$ og ${}'a^3 = {}'b^3$, det er $\tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{6}\sqrt{-\tfrac{1}{3}{}'\gamma} = -\tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{6}\sqrt{-\tfrac{1}{3}{}'\gamma}$, hvoraf følger at ${}'\gamma$ bliver $= 0$. Alt dette stemmer overeens med hvad der er anført i Slutningen af §. 27.

Af ${}'a\,{}'b = -\tfrac{1}{3}\beta$, findes ${}'b = -\dfrac{\beta}{3\,{}'a}$ og Ligningens Rødder kunne derfor ogsaa gives denne Form:

$$a = {}'a - \frac{\beta}{3\,{}'a};\quad b = \mathfrak{b}\,{}'a - \frac{\beta}{3\,\mathfrak{b}\,{}'a};\quad c = \mathfrak{b}^2\,{}'a - \frac{\beta}{3\,\mathfrak{b}^2\,{}'a};$$

som har den Fordeel at man af de 6 Rødder i Hjelpe-Ligningen kan vælge hvilken man vil.

De andre Rødder indeholdes, efter §. 4, i Ligningen $b^2 + ab + a^2 + \beta = o$, som, da $a = {}'a + {}'b$ og $\beta = -3{}'a{}'b$, forvandles til $b^2 + ({}'a + {}'b)\,b + {}'a^2 - {}'a{}'b + {}'b^2 = o$, hvoraf

$$b = -\tfrac{1}{2}({}'a + {}'b) + \sqrt{-\tfrac{3}{4}{}'a^2 + \tfrac{3}{2}{}'a{}'b - \tfrac{3}{4}{}'b^2} = -\tfrac{1}{2}({}'a + {}'b) + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\,({}'a - {}'b)$$
$$= \mathfrak{b}\,{}'a + \mathfrak{b}^2\,{}'b$$

$$c = -\tfrac{1}{2}({}'a + {}'b) - \sqrt{-\tfrac{3}{4}{}'a^2 + \tfrac{3}{2}{}'a{}'b - \tfrac{3}{4}{}'b^2} = -\tfrac{1}{2}({}'a + {}'b) - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\,({}'a - {}'b)$$
$$= \mathfrak{b}^2\,a + \mathfrak{b}\,{}'b$$

det er, naar vi betjene os af de nylig fundne Værdier for $'a$ og $'b$,

$$b = \mathfrak{b}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$

$$c = \mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \mathfrak{b}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$

For den fuldstændige Ligning $a^3 + \alpha a^2 + \beta a + \gamma = o$ kunne Rødderne korteligen angives saaledes:

$$a = -\tfrac{1}{3}\alpha + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$

$$b = -\tfrac{1}{3}\alpha + \mathfrak{b}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}},$$

$$c = -\tfrac{1}{3}\alpha + \mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \mathfrak{b}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$

naar det blot erindres at, efter §. 27, maae $-\tfrac{1}{3}\alpha^2 + \beta$ sættes for β og $\tfrac{2}{27}\alpha^3 - \tfrac{1}{3}\alpha\beta + \gamma$ for γ.

Da $\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2 = -\tfrac{1}{108}{}'\gamma$, bliver ${}'a^3 = -\tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{6}\sqrt{-\tfrac{1}{3}{}'\gamma}$ og ${}'b^3 = -\tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{6}\sqrt{-\tfrac{1}{3}{}'\gamma}$. Er derfor ${}'\gamma = o$, bliver ${}'a^3 = {}'b^3$, ${}'a = {}'b$, $a = 2{}'a$ og $b = c = -{}'a$. Er omvendt $b = c$, bliver $\mathfrak{b}\,{}'a + \mathfrak{b}^2\,{}'b = \mathfrak{b}^2\,{}'a + \mathfrak{b}\,{}'b$, altsaa ${}'a = {}'b$ og ${}'a^3 = {}'b^3$, det er $\tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{6}\sqrt{-\tfrac{1}{3}{}'\gamma} = -\tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{6}\sqrt{-\tfrac{1}{3}{}'\gamma}$, hvoraf følger at $'\gamma$ bliver $= o$. Alt dette stemmer overeens med hvad der er anført i Slutningen af §. 27.

Af ${}'a{}'b = -\tfrac{1}{3}\beta$, findes ${}'b = -\dfrac{\beta}{3{}'a}$ og Ligningens Rødder kunne derfor ogsaa gives denne Form:

$$a = {}'a - \frac{\beta}{3{}'a};\quad b = \mathfrak{b}\,{}'a - \frac{\beta}{3\mathfrak{b}\,{}'a};\quad c = \mathfrak{b}^2\,{}'a - \frac{\beta}{3\mathfrak{b}^2\,{}'a};$$

som har den Fordeel at man af de 6 Rødder i Hjelpe-Ligningen kan vælge hvilken man vil.

Den samme Form for Rødderne kunde være udbragt paa denne Maade: dersom Hjelpe-Ligningen er $'a^6 + '\alpha 'a^3 + '\beta = o$, findes deraf $'b^3 = - 'a^3 - '\alpha = \frac{'\beta}{'a^3}$, altsaa $'b = \frac{\sqrt[3]{'\beta}}{'a}$ og $a = 'a + \frac{\sqrt[3]{'\beta}}{'a}$, som indsat giver os: $'a^3 + 3'a \frac{\sqrt[3]{'\beta}}{'a} + \frac{3\sqrt[3]{'\beta}}{'a} + \frac{'\beta}{'a^3} + \beta 'a + \frac{\beta\sqrt[3]{'\beta}}{'a} + \gamma = o$. Multipliceres her med $'a^3$ og Ledene ordnes efter Potenserne af $'a$, fremkommer $'a^6 + (3\sqrt{'\beta} + \beta)\, 'a^4 + \gamma 'a^3 + (3\sqrt{'\beta^2} + \beta\sqrt{'\beta})\, 'a^2 + '\beta = o$ og sammenlignes denne med den antagne Ligning $'a^6 + '\alpha 'a^3 + '\beta = o$, findes deraf $3\sqrt[3]{'\beta} + \beta = o$; $3\sqrt[3]{'\beta^3} + \beta\sqrt[3]{'\beta} = o$ og $'\alpha = \gamma$. Af de tvende første udledes $'\beta = - \frac{1}{27}\beta^3$ og Hjelpe-Ligningen bliver da som tilforn $'a^6 + \gamma 'a^3 - \frac{1}{27}\beta^3 = o$. Tillige bliver $a = 'a - \frac{\beta}{3'a}$.

§. 30.

Ved Hjelp af den cubiske Lignings Opløsning kunne vi nu bestemme Værdierne af $\sqrt[4]{1}$. Sættes nemlig $c = \sqrt[4]{1}$, udledes heraf Ligningen $c^4 - 1 = o$, og da een af Værdierne til $\sqrt[4]{1}$ er $= 1$, skal $c - 1$ gaae op i $c^4 - 1 = o$. Qvotienten $c^3 + c^2 + c + 1 = o$ indeholder da de øvrige Værdier af $\sqrt[4]{1}$, og anvendes det foregaaende Paragraph paa denne Ligning, findes dens Rødder at være $- \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-10 - 6\sqrt{3}}$; $- \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mathfrak{b}\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-10 - 6\sqrt{3}}$ og $- \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\mathfrak{b}\sqrt[3]{-10 - 6\sqrt{3}}$. Men $\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} = - 1 + \sqrt{3}$ og $\sqrt[3]{-10 - 6\sqrt{3}} = - 1 - \sqrt{3}$. Rødderne til $c^3 + c^2 + c + 1 = o$ blive derfor ogsaa disse: $- 1$; $\sqrt{-1}$ og $- \sqrt{-1}$. Beholde vi begge Udtrykkene og tillige ordne dem efter §. 20, findes Værdierne af $\sqrt[4]{1}$ at være:

$$c = - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{b}\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-10 - 6\sqrt{3}} = \sqrt{-1}$$

$$c^2 = - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{-10 - 6\sqrt{3}} = - 1$$

$$c^3 = - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{b}\sqrt[3]{-10 - 6\sqrt{3}} = - \sqrt{-1}$$

$$c^4 = 1$$

§. 31.

I §. 29 saae vi at naar den cubiske Ligning havde tvende ligestore Rødder, vare tillige Hjelpe-Ligningens Rødder ligestore. Vi ville nu søge at opløse den første ved at gaae ud fra denne Overeensstemmelse i Røddernes Ligestorhed. Vi antage altsaa at Ligningen $a^3 + \beta a + \gamma = o$ har tvende ligestore Rødder, f. Ex. b og c, hvoraf følger at $'\gamma = o$ og at $a = \frac{3\gamma}{\beta}$. Skulle dernæst i Hjelpe-Ligningen $'a^6 + '\alpha 'a^3 + '\beta = o$ Rødderne være ligestore, bliver, efter §. 4, $'\alpha^2 - 4'\beta = o$ og denne Function maae derfor staae i en saadan Forbindelse med $'\gamma$ at de forsvinde paa een Gang. Da de nu ere af ligemange Dimensioner, kunne vi sætte $'\alpha^2 - 4'\beta = m'\gamma = - m\,(4\beta^3 + 27\gamma^2)$. Videre er $'a^3 = 'b^3 = -\frac{1}{2}'\alpha$, altsaa $a = 2'a = 2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}'\alpha} = \sqrt[3]{-4'\alpha}$, men tillige er $a = \frac{3\gamma}{\beta}$ og derfor $\sqrt[3]{-4'\alpha} = \frac{3\gamma}{\beta}$, hvoraf $'\alpha = -\frac{27\gamma^3}{4\beta^3}$ det er, da $4\beta^3 = -27\gamma^2$, $'\alpha = \gamma$. Ved Indsættelsen af denne Værdie for $'\alpha$, findes $\gamma^2 - 4'\beta = -m\,(4\beta^3 + 27\gamma^2)$, som giver os $'\beta = m\beta^3 + \frac{1}{4}(1 + 27m)\gamma^2$ og vi have saaledes

$$'a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\gamma + \sqrt{-m\beta^3 - \frac{27}{4}m\gamma^2}} \text{ og } 'b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\gamma - \sqrt{-m\beta^3 - \frac{27}{4}m\gamma^2}}.$$

For at bestemme Værdien af m, antages $\beta = o$. Derved bliver $a = 'a + 'b = -\sqrt[3]{\gamma}$, altsaa $'a^3 + 3'a'b('a + 'b) + 'b^3 = -\gamma$ det er $-\gamma - 3\sqrt[3]{(\frac{1}{4} + \frac{27}{4}m)\gamma^2}\,\sqrt[3]{\gamma} = -\gamma$, som giver os $\frac{1}{4} + \frac{27}{4}m = o$ og $m = -\frac{1}{27}$. Følgeligen er $'\beta = -\frac{1}{27}\beta^3$ og da $'\alpha$ fandtes $= \gamma$, bliver Opløsningen den samme som i §. 29.

§. 32.

Efter Slutningen af §. 23 være Rødderne til den cubiske Ligning $a^3 + \beta a + \gamma = o$ disse: $a = 'a + 'b = 'A$; $b = -\frac{1}{2}'A + ''a$ og $c = -\frac{1}{2}'A - ''a$. Tages her Summen af Røddernes Qvadrater, faae vi $A^2 = \frac{3}{2}('A)^2 + 2''a^2$, hvoraf $('A)^2 + \frac{4}{3}''a^2 = -\frac{4}{3}\beta$. Men $('A)^2 + \frac{4}{3}''a^2 = ('A + \frac{2}{3}''a\sqrt{-3})('A - \frac{2}{3}''a\sqrt{-3}) = (a + \frac{1}{3}(b-c)\sqrt{-3})(a - \frac{1}{3}(b-c)\sqrt{-3})$, altsaa $(a + \frac{1}{3}(b-c)\sqrt{-3})(a - \frac{1}{3}(b-c)\sqrt{-3}) = -\frac{4}{3}\beta$ eller, naar vi sætte $a + \frac{1}{3}(b-c)\sqrt{-3} = 'c$ og $a - \frac{1}{3}(b-c)\sqrt{-3} = 'd$, $'c'd = -\frac{4}{3}\beta$. Tillige bliver $'c^3 + 'd^3 = 2a^3 - 2a(b-c)^2$. Da nu, efter §. 4, $b^2 + ab + a^2 + \beta = o$, findes heraf $b^2 + c^2 = -a^2 - 2\beta$ og $bc = a^2 + \beta$, som indsat i Ovenstaaende giver $'c^3 + 'd^3 = 8a^3 + 8\beta a = -8\gamma$. Følgeligen er $'c^3$ og $'d^3$ Rødder til Ligningen $'c^6 + 8\gamma'c^3 - \frac{64}{27}\beta^3 = o$ og derfor $'c^3 = -4\gamma + \sqrt{\frac{64}{27}\beta^3 + 16\gamma^2}$ og

$'d^3 = -4\gamma - \sqrt{\tfrac{64}{27}\beta^3 + 16\gamma^2}$. Af Værdierne for $'c$ og $'d$ findes dernæst $a = 'A = \tfrac{1}{2}('c + 'd)$ og $''a = \tfrac{1}{2}(b-c) = -\tfrac{1}{4}('c - 'd)\sqrt{-3}$, som, indsat i de antagne Udtryk for Rødderne, give

$$a = \tfrac{1}{2}'c + \tfrac{1}{2}'d = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$

$$b = \tfrac{1}{2}\mathfrak{b}^2\,'c + \tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\,'d = \mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \mathfrak{b}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$

$$c = \tfrac{1}{2}\mathfrak{b}\,'c + \tfrac{1}{2}\mathfrak{b}^2\,'d = \mathfrak{b}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \mathfrak{b}^2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$

som, naar b og c ombyttes, stemme overeens med det forhen Fundne. I Øvrigt svare $\tfrac{1}{2}'c$ og $\tfrac{1}{2}'d$ til $'a$ og $'b$ i det Foregaaende.

§. 33.

Dersom vi med Euler sætte $a = 'a + 'b$, $b = \mathfrak{b}\,'a + \mathfrak{b}^2\,'b$ og $c = \mathfrak{b}^2\,'a + \mathfrak{b}\,'b$, da kunne vi paa forskjellige Maader benytte denne Antagelse til den cubiske Lignings Opløsning. Dog ville vi her kun anføre nogle enkelte af dem.

For det Første udlede vi af de antagne Værdier for Rødderne at $'a = \tfrac{1}{3}(a + \mathfrak{b}^2 b + \mathfrak{b} c)$ og $'b = \tfrac{1}{3}(a + \mathfrak{b} b + \mathfrak{b}^2 c)$, hvoraf følger at $'a'b = \tfrac{1}{9}(A^2 - AB) = -\tfrac{1}{3}\beta$ og $'a^3 + 'b^3 = \tfrac{1}{27}(2A^3 - 3A^2B + 12abc) = \tfrac{1}{27}(5A^3 - 3A \,.\, A^2 + 12abc) = -\gamma$. Forresten Alt som i det Foregaaende.

Af Værdierne for $'a$ og $'b$ fandtes $'a'b = -\tfrac{1}{3}\beta$ og da tillige $'a + 'b = a$, blive $'a$ og $'b$ Rødder til Ligningen $'a^2 - a'a - \tfrac{1}{3}\beta = 0$, som under denne Form ikke kan bruges, undtagen at deraf udledes at $a = 'a - \dfrac{\beta}{3'a}$ ligesom i §. 29. Multipliceres derimod den udbragte Ligning med $('a^2 - \mathfrak{b}a'a - \tfrac{1}{3}\mathfrak{b}^2\beta)('a^2 - \mathfrak{b}^2 a'a - \tfrac{1}{3}\mathfrak{b}\beta)$, fremkommer en Ligning for $'a^3$ og $'b^3$ nemlig $'a^6 - (a^3 + \beta a)\,'a^3 - \tfrac{1}{27}\beta^3 = 0$, det er, da $a^3 + \beta a = -\gamma$, $'a^6 + \gamma'a^3 - \tfrac{1}{27}\beta^3 = 0$, altsaa ligesom forhen.

Sætte vi dernæst $'a = \sqrt[3]{''a + ''b}$, $'b = \sqrt[3]{''a - ''b}$, $''b = \sqrt{'''a}$ og vi tillige antage $''a = 0$, bliver $'a = \sqrt[3]{''b}$ og $'b = -\sqrt[3]{''b}$, altsaa $a = 0$, $b = \sqrt{-3}\sqrt[3]{''b}$ og $c = -\sqrt{-3}\sqrt[3]{''b}$, hvoraf følger at $\gamma = 0$ og $''a$ maae derfor være en saadan Function af γ at de forsvinde paa een Gang. Da de nu ere af ligemange Dimensioner, kunne vi sætte $''a = m\gamma$.

Antages videre $'''a = 0$, altsaa tillige $''b = 0$, bliver $'a = 'b = \sqrt[3]{''a} = \sqrt[3]{m\gamma}$, $a = 2'a = 2\sqrt[3]{m\gamma}$ og $b = c = -'a = -\sqrt[3]{m\gamma}$. Da Ligningen saaledes, i det opgivne Tilfælde, har tvende ligestore Rødder, bliver $'\gamma = 0$, og derfor maae $''a$ være en saadan Function af $'\gamma$ at de forsvinde paa een Gang. Da ogsaa disse ere af ligemange Dimensioner, kunne vi sætte $'''a = n'\gamma$. Vi have nu $'a = \sqrt[3]{m\gamma + \sqrt{n'\gamma}}$ og $'b = \sqrt[3]{m\gamma - \sqrt{n'\gamma}}$.

For endeligen at bestemme m og n, sættes $\beta = o$. Derved bliver $a = 'a + 'b = -\sqrt[3]{\gamma}$; $b = b'a + b^2{}'b = -b\sqrt[3]{\gamma}$ og $c = b^2{}'a + b'b = -b^2\sqrt[3]{\gamma}$, hvoraf følger at $'a = -\sqrt[3]{\gamma}$ og $'b = o$. Men er $\beta = o$, bliver $'\gamma = -27\gamma^2$ og vi faae da $\sqrt[3]{m\gamma + \sqrt{-27n\gamma^2}} = -\sqrt[3]{\gamma}$ og $\sqrt[3]{m\gamma - \sqrt{-27n\gamma^2}} = o$, som giver os $m = -\frac{1}{2}$ og $n = -\frac{1}{108}$. Altsaa bliver $'a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\gamma + \sqrt{-\frac{1}{108}'\gamma}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\gamma + \sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}}$ og $'b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\gamma - \sqrt{-\frac{1}{108}'\gamma}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\gamma - \sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}}$ som i det Foregaaende.

§. 34.

I Analogie med hvad der i §. 25 er anført om Rødderne i den qvadratiske Ligning, kunne ogsaa Rødderne for den cubiske Ligning $a^3 + \alpha a^2 + \beta a + \gamma = o$ udtrykkes som Functioner af Rødderne selv. Er nemlig $a = -\frac{1}{3}\alpha + 'a + 'b$; $b = -\frac{1}{3}\alpha + b'a + b^2{}'b$ og $c = -\frac{1}{3}\alpha + b^2{}'a + b'b$, bliver, efter foregaaende Paragraph, $'a = \frac{1}{3}(a + b^2 b + bc)$ og $'b = \frac{1}{3}(a + bb + b^2 c)$, altsaa tillige $'a = \frac{1}{6}(2a - b - c - (b - c)\sqrt{-3})$ og $'b = \frac{1}{6}(2a - b - c + (b - c)\sqrt{-3})$. Da dernæst $\alpha = -(a + b + c)$, faae vi følgende Udtryk for Rødderne:

$$a = \tfrac{1}{3}(a + b + c) + \tfrac{1}{6}(2a - b - c - (b - c)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{6}(2a - b - c + (b - c)\sqrt{-3})$$
$$b = \tfrac{1}{3}(a + b + c) + \tfrac{1}{6}(-a + 2b - c + (a - c)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{6}(-a + 2b - c - (a - c)\sqrt{-3})$$
$$c = \tfrac{1}{3}(a + b + c) + \tfrac{1}{6}(-a - b + 2c - (a - b)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{6}(-a - b + 2c + (a - b)\sqrt{-3})$$

Dersom vi, i Udtrykket for a, først havde ombyttet a med b og dernæst a med c, vare følgende Udtryk for b og c fremkomne:

$$b = \tfrac{1}{3}(a + b + c) + \tfrac{1}{6}(-a + 2b - c - (a - c)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{6}(-a + 2b - c + (a - c)\sqrt{-3})$$
$$c = \tfrac{1}{3}(a + b + c) + \tfrac{1}{6}(-a - b + 2c + (a - b)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{6}(-a - b + 2c - (a - b)\sqrt{-3})$$

det er

$$b = -\tfrac{1}{3}\alpha + b^2{}'b + b'a \quad \text{og} \quad c = -\tfrac{1}{3}\alpha + b'b + b^2{}'a$$

altsaa, paa Leddenes Orden nær, de samme som ovenfor.

§. 35.

For at anvende den Tschirnhausenske Opløsnings-Methode paa Ligningen $a^3 + \beta a + \gamma = o$, sættes

$$a^2 + na + o = {'a};\ b^2 + nb + o = b\,{'a};\ c^2 + nc + o = b^2\,{'a};$$

eller, for at lette Bestemmelsen,

$$a^2 + na = {'a} - o;\ b^2 + nb = b\,{'a} - o;\ c^2 + nc = b^2\,{'a} - o.$$

Ved at tage Summen af disse Ligninger, findes $A^2 + nA = -3o$, hvoraf $o = \frac{2}{3}\beta$.

Af samme Ligningers Qvadraters Sum $A^4 + 2nA^3 + n^2A^2 = 3o^2$ udledes dernæst at $n^2 + \frac{3\gamma}{\beta}n = \frac{1}{3}\beta$, altsaa $n = \frac{-3\gamma \pm \sqrt{\frac{4}{3}\beta^3 + 9\gamma^2}}{2\beta} = \frac{-3\gamma \pm 6\sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}}{2\beta}$.

Tages endeligen Summen af disse Ligningers Cuber, findes $A^6 + 3nA^5 + 3n^2A^4 + n^3A^3 = 3\,{'a}^3 - 3o^3$, atsaa ${'a}^3 = \frac{1}{3}(A^6 + 3nA^5 + 3n^2A^4 + n^3A^3 + 3o^3)$. Indsættes heri Værdierne af n og o, samt af A^6, A^5, A^4 og A^3, bliver, efter nogle Reductioner,

$${'a}^3 = \frac{\pm 216\,(\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2)^{\frac{3}{2}}\,(-\frac{1}{2}\gamma \pm \sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2})}{\beta^3} \text{ altsaa}$$

$${'a} = \frac{6\sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}\ \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\gamma \pm \sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}}}{\beta}.$$

I Ligningen $a^2 + na + o = {'a}$ ere saaledes n, o og ${'a}$ bestemte og Værdien af a kan derfor findes. Da heraf imidlertid udbringes en Formel, hvorefter a vanskeligere lader sig beregne, ville vi søge at henføre den til den i §. 29 fundne. Sættes nemlig $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}\gamma \pm \sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}} = {''a}$ og $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}\gamma \mp \sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}} = {''b}$, findes deraf ${''a}{''b} = -\frac{1}{3}\beta$, altsaa $\beta = -3{''a}{''b}$. Tillige bliver $\pm\sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2} = \frac{1}{2}({''}^3 - {''b}^3)$. Heraf udledes igjen at ${'a} = \frac{3({''a}^3 - {''b}^3){''a}}{-3{''a}{''b}} = \frac{-{''a}^3 + {''b}^3}{{''b}}$ og $n = \frac{6{''a}^3}{-6{''a}{''b}} = -\frac{{''a}^2}{{''b}}$. Ligningen for a bliver da $a^2 - \frac{{''a}^2}{{''b}}a = \frac{-{''a}^3 + 2{''a}{''b}^2 + {''b}^3}{{''b}}$, som giver $a = \frac{{''a}^2 \pm \sqrt{{''a}^4 - 4{''a}^3{''b} + 8{''a}{''b}^3 + 4{''b}^4}}{2{''b}} = \frac{{''a}^2 \pm ({''a}^2 - 2{''a}{''b} - 2{''b}^2)}{2{''b}}$. Lade vi her det nederste Tegn gjelde, findes $a = {''a} + {''b}$ ligesom i §. 29. Hvorledes man heraf kan bestemme Værdierne af b og c, er allerede viist i samme Paragraph.

§. 36.

For det Følgendes Skyld ville vi søge at bestemme Værdierne af n, o og ${'a}$ udtrykte i Ligningens Rødder. Af de antagne Ligninger

$$a^2 + \mathfrak{n}a + \mathfrak{o} = {}'a;\; b^2 + \mathfrak{n}b + \mathfrak{o} = \mathfrak{b}'a;\; c^2 + \mathfrak{n}c + \mathfrak{o} = \mathfrak{b}^2{}'a;$$

drages den 2den og 3die fra den 1ste og Forskjellene divideres med $a - b$ og med $a - c$. Derved faae vi

$$a + b + \mathfrak{n} = \frac{(1 - \mathfrak{b})'a}{a - b} \text{ og } a + c + \mathfrak{n} = \frac{(1 - \mathfrak{b}^2)'a}{a - c}.$$

Drages dernæst den sidste af disse fra den første og det Udkomne ordnes efter Værdierne af $\sqrt[3]{1}$ det er efter 1, $\mathfrak{b}$ og $\mathfrak{b}^2$, bliver

$$b - c = \frac{(b - c) - \mathfrak{b}(a - c) + \mathfrak{b}^2(a - b)}{(a - b)(a - c)}\,'a$$

hvoraf

$$'a = \frac{(a - b)(a - c)(b - c)}{(b - c) - \mathfrak{b}(a - c) + \mathfrak{b}^2(a - b)}.$$

Indsættes denne Værdie for $'a$ i Ligningen $a + b + \mathfrak{n} = \frac{(1 - \mathfrak{b})'a}{a - b}$ eller, hvilket er det Samme, $i - c + \mathfrak{n} = \frac{(1 - \mathfrak{b})'a}{a - b}$, findes deraf

$$\mathfrak{n} = \frac{a(b - c) - \mathfrak{b}b(a - c) + \mathfrak{b}^2(a - b)}{(b - c) - \mathfrak{b}(a - c) + \mathfrak{b}^2(a - b)}.$$

Indsættes dernæst Værdierne af $'a$ og $\mathfrak{n}$ i Ligningen $a^2 + \mathfrak{n}a + \mathfrak{o} = {}'a$, findes, efter behørig Reduction,

$$\mathfrak{o} = \frac{bc(b - c) - \mathfrak{b}ac(a - c) + \mathfrak{b}^2ab(a - b)}{(b - c) - \mathfrak{b}(a - c) + \mathfrak{b}^2(a - b)}.$$

Nu er $bc = a^2 + \beta$, $ac = b^2 + \beta$ og $ab = c^2 + \beta$, hvilke Værdier indsatte give os

$$\mathfrak{o} = \frac{(a^2 + \beta)(b - c) - \mathfrak{b}(b^2 + \beta)(a - c) + \mathfrak{b}^2(c^2 + \beta)(a - b)}{(b - c) - \mathfrak{b}(a - c) + \mathfrak{b}^2(a - b)}$$

$$= \frac{a^2(b - c) - \mathfrak{b}b^2(a - c) + \mathfrak{b}^2c^2(a - b)}{(b - c) - \mathfrak{b}(a - c) + \mathfrak{b}^2(a - b)} + \beta.$$

Da $(a - b)(a - c)(b - c) = a^2b - a^2c - ab^2 + b^2c + ac^2 - bc^2$ $= a^2(b - c) - b^2(a - c) + c^2(a - b)$, kunne vi ogsaa sætte

$$'a = \frac{a^2(b - c) - b^2(a - c) + c^2(a - b)}{(b - c) - \mathfrak{b}(a - c) + \mathfrak{b}^2(a - b)}.$$

Dersom vi, for Korthveds Skyld sætte $b - c = d$; $-(a - c) = e$ og $a - b = f$, bliver

$$\mathfrak{n} = \frac{a\,d + \mathfrak{b}\,b\,e + \mathfrak{b}^2\,c\,f}{d + \mathfrak{b}\,e + \mathfrak{b}^2\,f};\ \mathfrak{o} = \frac{a^2\,d + \mathfrak{b}\,b^2\,e + \mathfrak{b}^2\,c^2\,f}{d + \mathfrak{b}\,e + \mathfrak{b}^2\,f} + \beta;$$

$${}'a = \frac{-\,d\,e\,f}{d + \mathfrak{b}\,e + \mathfrak{b}^2\,f} = \frac{a^2\,d + b^2\,e + c^2\,f}{d + \mathfrak{b}\,e + \mathfrak{b}^2\,f}.$$

Tillige være $\frac{a^2\,d + \mathfrak{b}\,b^2\,e + \mathfrak{b}^2\,c^2\,f}{d + \mathfrak{b}\,e + \mathfrak{b}^2\,f} = {}'\mathfrak{o}$ og da $\mathfrak{n}$ egentligen er $= \frac{a\,d + \mathfrak{b}\,b\,e + \mathfrak{b}^2\,c\,f}{d + \mathfrak{b}\,c + \mathfrak{b}^2\,f} + \alpha$, ville vi ogsaa for $\mathfrak{n}$ sætte ${}'\mathfrak{n}$. Vi faae saaledes

$$a^2 + \beta + {}'\mathfrak{n}\,a + {}'\mathfrak{o} = {}'a$$
$$b^2 + \beta + {}'\mathfrak{n}\,b + {}'\mathfrak{o} = {}'b = \mathfrak{b}\,{}'a$$
$$c^2 + \beta + {}'\mathfrak{n}\,c + {}'\mathfrak{o} = {}'c = \mathfrak{b}^2\,{}'a.$$

Af de fundne Former for ${}'\mathfrak{n}$, ${}'\mathfrak{o}$ og ${}'a$ sees at de hver have een Værdie endnu, som fremkommer ved at ombytte $\mathfrak{b}$ og $\mathfrak{b}^2$. Betegnes disse nye Værdier med $''\mathfrak{n}$, $''\mathfrak{o}$ og $''a$, bliver

$$''\mathfrak{n} = \frac{a\,d + \mathfrak{b}^2\,b\,e + \mathfrak{b}\,c\,f}{d + \mathfrak{b}^2\,e + \mathfrak{b}\,f};\quad ''\mathfrak{o} = \frac{a^2\,d + \mathfrak{b}^2\,b^2\,e + \mathfrak{b}\,c^2\,f}{d + \mathfrak{b}^2\,e + \mathfrak{b}\,f};$$

$$''a = \frac{-\,d\,e\,f}{d + \mathfrak{b}^2\,e + \mathfrak{b}\,f} = \frac{a^2\,d + b^2\,e + c^2\,f}{d + \mathfrak{b}^2\,e + \mathfrak{b}\,f}.$$

For at vise Overeensstemmelsen af disse Værdier med dem i foregaaende Paragraph, maae vi først bestemme en Ligning for d, e og f. Nu var $d = b - c$; $e = -a + c$; $f = a - b$ og derfor bliver $d + e + f = o$; $d^2 + e^2 + f^2 = 2A^2 - 2AB = -6\beta$; $def = -(a - b)(a - c)(b - c) = \mp \sqrt{'\gamma}$. Altsaa ere d, e og f Rødder til Ligningen $d^3 + 3\beta d \pm \sqrt{'\gamma} = o$.

Multipliceres nu Tæller og Nævner i Brøken for ${}'\mathfrak{n}$ med $d + \mathfrak{b}^2 e + \mathfrak{b} f$, bliver Tælleren i den nye Brøk $= ad^2 + be^2 + cf^2 + \mathfrak{b}bde + \mathfrak{b}^2 cdf + \mathfrak{b}^2 ade + \mathfrak{b}cef + \mathfrak{b}adf + \mathfrak{b}^2 bef = ad^2 + be^2 + cf^2 - \frac{1}{2}(bde + cdf + ade + cef + adf + bef) + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\,(bde + cdf + ade + cef + adf + bef) = \frac{3}{2}(ad^2 + be^2 + cf^2) - \frac{3}{2}\,def\sqrt{-3} = \frac{3}{2}A^2B - 9abc \pm \frac{3}{2}\sqrt{-3}\,\sqrt{'\gamma} = \frac{27}{2}\gamma \pm \frac{3}{2}\sqrt{-3}\,\sqrt{'\gamma} = \frac{27}{2}\gamma \mp 27\sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}$, og Nævneren $= D^2 - DE = -9\beta$, altsaa ${}'\mathfrak{n} = \frac{\frac{27}{2}\gamma \mp 27\sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}}{-9\beta}$ $= \frac{-3\gamma \pm 6\sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}}{2\beta}$ ligesom i foregaaende Paragraph. Behandles Brøken for $''\mathfrak{n}$ paa lignende Maade, findes $''\mathfrak{n} = \frac{-3\gamma \mp 6\sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}}{2\beta}$. Da $\mathfrak{o} = \frac{2}{3}\beta$, bliver ${}'\mathfrak{o} = {}''\mathfrak{o} = -\frac{1}{3}\beta$.

Multipliceres Tæller og Nævner i Brøken for 'a med $d + \mathfrak{b}^2 e + \mathfrak{b} f$, bliver $'a = \frac{\pm \sqrt{'\gamma}\,(d + \mathfrak{b}^2 e + \mathfrak{b} f)}{-9\beta}$. Nu er $(d + \mathfrak{b}^2 e + \mathfrak{b} f)^3 = D^3 - \frac{3}{2} D^2 E + 6\,def - \frac{3}{2}(d-e)(d-f)(e-f)\sqrt{-3} = \mp \frac{27}{2}\sqrt{'\gamma} + \frac{81}{2}\gamma\sqrt{-3}$; men $\sqrt{'\gamma} = 6\sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{3}\gamma^2}\,\sqrt{-3}$, altsaa $(d + \mathfrak{b}^2 e + \mathfrak{b} f)^3 = \frac{81}{2}\gamma\sqrt{-3} \mp 81\sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}\,\sqrt{-3}$ og $d + \mathfrak{b}^2 e + \mathfrak{b} f = \sqrt[3]{\frac{81}{2}\gamma\sqrt{-3} \mp 81\sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}\,\sqrt{-3}}$. Indsættes denne Værdie samt den for $\sqrt{'\gamma}$ i Udtrykket for 'a, findes, efter behørig Reduction,

$$'a = \frac{\pm 6\sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}\;\sqrt[3]{-\frac{1}{2}\gamma \pm \sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}}}{\beta}$$

som tilforn. Paa lignende Maade findes

$$''a = \frac{\pm 6\sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}\;\sqrt[3]{-\frac{1}{2}\gamma \mp \sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}}}{\beta}.$$

§. 37.

Af det Foregaaende følger at

$$a^2 + {'\mathfrak{n}}a + \tfrac{2}{3}\beta = {'a};\quad b^2 + {'\mathfrak{n}}b + \tfrac{2}{3}\beta = \mathfrak{b}\,{'a};\quad c^2 + {'\mathfrak{n}}c + \tfrac{2}{3}\beta = \mathfrak{b}^2\,{'a}$$
$$a^2 + {''\mathfrak{n}}a + \tfrac{2}{3}\beta = {''a};\quad b^2 + {''\mathfrak{n}}b + \tfrac{2}{3}\beta = \mathfrak{b}\,{''a};\quad c^2 + {''\mathfrak{n}}c + \tfrac{2}{3}\beta = \mathfrak{b}\,{''a}.$$

Heraf findes ved Subtraction

$$a = \frac{'a - {''a}}{'\mathfrak{n} - {''\mathfrak{n}}};\quad b = \frac{\mathfrak{b}\,{'a} - \mathfrak{b}^2\,{''a}}{'\mathfrak{n} - {''\mathfrak{n}}};\quad c = \frac{\mathfrak{b}^2\,{'a} - \mathfrak{b}\,{''a}}{'\mathfrak{n} - {''\mathfrak{n}}}.$$

Men $'\mathfrak{n} - {''\mathfrak{n}} = \frac{\pm 6\sqrt{\frac{1}{27}\beta^3 + \frac{1}{4}\gamma^2}}{\beta}$. Indsættes denne Værdie i Ovenstaaende og tillige de i foregaaende Paragraph fundne Værdier for 'a og ''a, bliver, naar vi blot lade de øverste Tegn gjelde

$$a = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$

$$b = \mathfrak{b}\,\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \mathfrak{b}^2\,\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$

$$c = \mathfrak{b}^2\,\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}} + \mathfrak{b}\,\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{\tfrac{1}{27}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^2}}$$

som tilforn.

At Resultatet maatte blive det samme som forhen, sees ogsaa deraf at om vi sætte $\frac{'a}{'n - ''n} = 'c$ og $- \frac{'a}{'n - ''n} = 'd$, bliver

$$a = 'c + 'd;\quad b = b'c + b^2'd;\quad c = b^2'c + b'd,$$

som ganske stemmer overeens med Formerne, der ere fundne i det Foregaaende for den cubiske Lignings Rødder.

§. 38.

Af Ligningerne $a^3 + \beta a + \gamma = o$ og $a^2 + 'na + \frac{2}{3}\beta - 'a = o$ findes ved Additions- og Subtractions-Methoden $a = \frac{'n'a - \frac{2}{3}\beta'n - \gamma}{'a + 'n^2 + \frac{1}{3}\beta}$. Ligeledes bliver $b = \frac{b'n'a - \frac{2}{3}\beta'n - \gamma}{b'a + 'n^2 + \frac{1}{3}\beta}$ og $c = \frac{b^2'n'a - \frac{2}{3}\beta'n - \gamma}{b^2'a + 'n^2 + \frac{1}{3}\beta}$. Her ville vi blot tage Hensyn til disse Rødders Former og, for Kortheds Skyld, sætte

$$a = \frac{p'a + q}{'a + r};\quad b = \frac{bp'a + q}{b'a + r};\quad c = \frac{b^2p'a + q}{b^2'a + r};$$

Bringes disse Brøker til eens Benævning, bliver

$$a = \frac{p'a^3 - (pr - q)\,'a^2 + (pr^2 - qr)\,'a + qr^2}{'a^3 + r^3}$$

$$b = \frac{p'a^3 - b^2(pr - q)\,'a^2 + b\,(pr^2 - qr)\,'a + qr^2}{'a^3 + r^3}$$

$$c = \frac{p'a^3 - b\,(pr - q)\,'a^2 + b^2\,(pr^2 - qr)\,'a + qr^2}{'a^3 + r^3}.$$

Da nu $a + b + c = o$, følger deraf at $p'a^3 + qr = o$, altsaa $'a^3 = -\frac{qr^2}{p}$ og $'a^3 + r^3 = \frac{pr - q}{p}\,r^2$. Indsættes disse Værdier, findes, efter nogle Reductioner,

$$a = p\,.\,\frac{'a}{r} - p\,.\,\frac{'a^2}{r^2}$$

$$b = bp\,.\,\frac{'a}{r} - b^2p\,.\,\frac{'a^2}{r^2}$$

$$c = b^2p\,.\,\frac{'a}{r} - bp\,.\,\frac{'a^2}{r^2}$$

det er, naar vi sætte $p \cdot \frac{'a}{r} = {}'c$ og $-p \cdot \frac{'a^2}{r^2} = {}'d$

$$a = {}'c + {}'d; \quad b = b'c + b^2{}'d; \quad c = b^2{}'c + b'd.$$

Hvorledes Rødderne heraf kunne bestemmes, følger af det Foregaaende.

IV. Om de bestemte Bogstav-Ligninger af 4^{de} Grad.

§. 39.

Ville vi af den almindelige Ligning af 4^{de} Grad $a^4 + \alpha a^3 + \beta a^2 + \gamma a + \delta = o$, hvis Rødder ere a, b, c og d, bortskaffe det 2^{det} Led, sættes, efter §. 18, $a = \dot{a} - \frac{1}{4}\alpha$ og vi faae da Ligningen $\dot{a}^4 - (\frac{3}{8}\alpha^2 - \beta)\,\dot{a}^2 + (\frac{1}{8}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha\beta + \gamma)\,\dot{a} - \frac{3}{256}\alpha^4 + \frac{1}{16}\alpha^2\beta - \frac{1}{4}\alpha\gamma + \delta = o$ eller, naar vi sætte $-\frac{3}{8}\alpha^2 + \beta = \dot{\beta}$; $\frac{1}{8}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha\beta + \gamma = \dot{\gamma}$ og $-\frac{3}{256}\alpha^4 + \frac{1}{16}\alpha^2\beta - \frac{1}{4}\alpha\gamma + \delta = \dot{\delta}$, $\dot{a}^4 + \dot{\beta}\dot{a}^2 + \dot{\gamma}\dot{a} + \dot{\delta} = o$, hvis Rødder ere $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$ og $\dot{d}$. Imidlertid ville vi i det Følgende betjene os af den simplere Betegning $a^4 + \beta a^2 + \gamma a + \delta = o$ og blot erindre at om α beholdes, maae $-\frac{3}{8}\alpha^2 + \beta$ sættes for β, $\frac{1}{8}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha\beta + \gamma$ for γ og $-\frac{3}{256}\alpha^4 + \frac{1}{16}\alpha^2\beta - \frac{1}{4}\alpha\gamma + \delta$ for δ.

For denne Ligning bliver dernæst

$$'A = 4a^3 + 2\beta a + \gamma = (a-b)\,(a-c)\,(a-d)$$
$$'B = 4b^3 + 2\beta b + \gamma = (b-a)\,(b-c)\,(b-d)$$
$$'C = 4c^3 + 2\beta c + \gamma = (c-a)\,(c-b)\,(c-d)$$
$$'D = 4d^3 + 2\beta d + \gamma = (d-a)\,(d-b)\,(d-c)$$

altsaa

$$'A + {}'B + {}'C + {}'D = 4A^3 + 2\beta A + 4\gamma = -8\gamma.$$

Da dernæst

$$'A^2 = 16a^6 + 16\beta a^4 + 8\gamma a^3 + 4\beta^2 a^2 + 4\beta\gamma a + \gamma^2 = -8\gamma a^3 + (4\beta^2 - 16\delta)\,a^2 + 4\beta\gamma a + \gamma^2$$

bliver

$$'A^2 + {}'B^2 + {}'C^2 + {}'D^2 = -8\gamma A^3 + (4\beta^2 - 16\delta)\,A^2 + 4\beta\gamma A + 4\gamma^2 = -8\beta^3 + 28\gamma^2 + 32\beta\delta.$$

Paa lignende Maade findes

$$'A^3 + 'B^3 + 'C^3 + 'D^3 = 96\beta^3\gamma - 80\gamma^3 - 380\beta\gamma\delta$$

$$'A^4 + 'B^4 + 'C^4 + 'D^4 = 32\beta^6 - 720\beta^3\gamma^2 + 244\gamma^4 - 320\beta^4\delta + 2368\beta\gamma^2\delta + 1024\beta^2\delta^2 - 1024\delta^3$$

som giver os

$$'\alpha = 8\gamma;\ '\beta = 4\beta^3 + 18\gamma^2 - 16\beta\delta;\ '\gamma = o;\ '\delta = -4\beta^3\gamma^2 - 27\gamma^4 + 16\beta^4\delta + 144\beta\gamma^2\delta - 128\beta^2\delta^2 + 256\delta^3 = -\tfrac{1}{27}(2\beta^3 + 27\gamma^2 - 72\beta\delta)^2 + \tfrac{4}{27}(\beta^2 + 12\delta)^3.$$

Ligningen for $'A$, $'B$, $'C$ og $'D$ bliver altsaa

$$'A^4 + 8\gamma\ 'A^3 + (4\beta^3 + 18\gamma^2 - 16\beta\delta)\ 'A - 4\beta^3\gamma^2 - 27\gamma^4 + 16\beta^4\delta + 144\beta\gamma^2\delta - 128\beta^2\delta^2 + 256\delta^3 = o.$$

Betingelsen for tvende Rødders Ligestorhed i den biqvadratiske Ligning er derfor den at $'\delta = o$, hvoraf igjen følger at i de almindelige Udtryk for Ligningens Rødder maae denne Function findes paa en saadan Maade at naar den bliver $= o$, tvende Rødder da blive ligestore. Da dernæst $'\delta = (a-b)^2\,(a-c)^2\,(a-d)^2\,(b-c)^2\,(b-d)^2\,(c-d)^2$, bliver omvendt $'\delta = o$ naar Ligningen har ligestore Rødder.

Dersom tvende Rødder, f. Ex. c og d, ere ligestore, da er, efter §. 15, baade $c^4 + \beta c^2 + \gamma c + \delta = o$ og $4c^3 + 2\beta c + \gamma = o$. Af disse Ligninger udledes ved Additions- og Subtractions-Methoden at $c = d = -\dfrac{(\beta^2 + 12\delta)\gamma}{2\beta^3 + 9\gamma^2 - 8\beta\delta}$.

De tvende andre Rødder a og b indeholdes dernæst, efter samme Paragraph, i Ligningen $a^2 + 2ca + 3c^2 + \beta = o$.

§. 40.

For den biqvadratiske Ligning bliver, efter §. 16,

$$''A = 6a^2 + \beta = (a-b)(a-c) + (a-b)(a-d) + (a-c)(a-d)$$
$$''B = 6b^2 + \beta = (b-a)(b-c) + (b-a)(b-d) + (b-c)(b-d)$$
$$''C = 6c^2 + \beta = (c-a)(c-b) + (c-a)(c-d) + (c-b)(c-d)$$
$$''D = 6d^2 + \beta = (d-a)(d-b) + (d-a)(d-c) + (d-b)(d-c)$$

som giver os

$$''A + ''B + ''C + ''D = 6\,A^2 + 4\beta = -4\beta$$

$$''A^2 + ''B^2 + ''C^2 + ''D^2 = 36\,A^4 + 12\beta A^2 + 4\beta^2 = 52\beta^2 - 144\,\delta$$

$$''A^3 + ''B^3 + ''C^3 + ''D^3 = 216\,A^6 + 108\beta A^4 + 18\beta^2 A^2 + 4\beta^3 = -248\beta^3 + 648\gamma^2 + 864\beta\delta$$

$$''A^4 + ''B^4 + ''C^4 + ''D^4 = 1296\,A^8 + 864\beta A^6 + 216\beta^2 A^4 + 24\beta^3 A^3 + 4\beta^4 = 1252\beta^4 - 7776\beta\gamma^2 - 6048\beta^2\delta + 5184\,\delta^2$$

hvoraf findes

$$''\alpha = 8\beta;\ ''\beta = 6\beta^2 + 72\,\delta;\ ''\gamma = -40\beta^3 - 216\gamma^2 + 288\beta\delta;\ ''\delta = 25\beta^4 + 216\beta\gamma^2 - 360\beta^2\delta + 1296\,\delta^2;$$

og Ligningen for $''A$, $''B$, $''C$ og $''D$ bliver derfor

$$''A^4 + 8\beta\ ''A^3 + (6\beta^2 + 72\,\delta)\ ''A^2 - (40\beta^3 + 216\gamma^2 - 288\beta\delta)\ ''A + 25\beta^4\ 216\beta\gamma^2 - 360\beta^2\delta + 1296\,\delta^2 = 0.$$

§. 41.

Ere 2 og 2 af Rødderne ligestore, f. Ex. $a = b$ og $c = d$, da bliver $'A = 'B = 'C = 'D = 0$, altsaa tillige $'\alpha = '\beta = '\delta = 0$. Dernæst bliver $''A = ''B = ''C = ''D = (a - c)^2$, altsaa $''A^4 + ''\alpha\ ''A^3 + ''\beta\ ''A^2 + ''\gamma\ ''A + ''\delta = \left(''A - (a - c)^2\right)^4 = ''A^4 - 4\,(a - c)^2\ ''A^3 + 6\,(a - c)^4\ ''A^2 - 4\,(a - c)^6\ ''A + (a - c)^8 = 0$. Følgeligen er $(a - c)^2 = -\frac{1}{4}\,''\alpha$, hvoraf igjen udledes $\frac{3}{8}\,''\alpha^2 = ''\beta$; $\frac{1}{16}\,''\alpha^3 = ''\gamma$ og $\frac{1}{256}\,''\alpha^4 = ''\delta$.

Af alle disse Ligninger ville vi undersøge Resultatet af de tvende simpleste, nemlig $''\alpha = 0$ og $\frac{3}{8}\,''\alpha^2 = ''\beta$. Den første giver os $\gamma = 0$ og den sidste $\delta = \frac{1}{4}\beta^2$, som derfor ere Betingelserne for at den givne Ligning har 2 og 2 Rødder ligestore, og da derved Ligningen forvandles til $a^4 + \beta a^2 + \frac{1}{4}\beta^2 = 0$, det er til $(a - \sqrt{-\tfrac{1}{2}\beta})^2\,(a + \sqrt{-\tfrac{1}{2}\beta})^2 = 0$, sees deraf at det Omvendte ogsaa finder Sted.

§. 42.

Ere trende af Rødderne ligestore, f. Ex. $b = c = d$, da bliver $'A = (a - b)^3$; $'B = 'C = 'D = 0$, altsaa $'\beta = 0$ og $'\delta = 0$. Tillige bliver $''A = 3\,(a - b)^2$; $''B = ''C = ''D = 0$, altsaa $''\beta = ''\gamma = ''d = 0$.

Af disse Ligninger ville vi vælge de tvende simpleste nemlig $'\beta = o$ og $''\beta = o$. Af den sidste udledes at $\delta = -\frac{1}{12}\beta^2$, som indsat i den første giver os $\gamma^2 = -\frac{8}{27}\beta^3$, hvilke Ligninger derfor ere Betingelserne for trende Rødders Ligestorhed. Da Ligningen dernæst ved denne Antagelse forvandles til $a^4 + \beta a^2 \pm \frac{2}{3}\beta\sqrt{-\frac{2}{3}\beta} \cdot a - \frac{1}{12}\beta^2 = o$ det er til $(a \mp \frac{3}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}\beta})(a \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}\beta})^3 = o$, finder det Omvendte ogsaa Sted.

Dersom vi vilde have udledet Betingelserne for det opgivne Tilfælde af Ligningerne $'\beta = o$ og $'\delta = o$, da havde den første givet $\gamma^2 = -\frac{2}{9}\beta^3 + \frac{8}{9}\beta\delta$ og indsattes denne Værdie i den anden Ligning, blev, efter nogle Reductioner, $\beta^6 + 20\beta^4\delta + 48\beta^2\delta^2 - 576\delta^3 = o$ det er $(\beta^2 + 12\delta)^2(\beta^2 - 4\delta) = o$, hvoraf fulgte at enten $\beta^2 + 12\delta = o$ eller $\beta^2 - 4\delta = o$. Det Første giver os $\gamma^2 = -\frac{8}{27}\beta^3$ og da blev, efter det nylig Anførte, trende af Rødderne ligestore. Det Sidste derimod giver $\gamma^2 = o$ og da blev, efter foregaaende Paragraph, 2 og 2 af Rødderne ligestore. Ligningerne $'\beta = o$ og $'\delta = o$ indeholde derfor flere Betingelser end der høre til trende Rødders Ligestorhed.

§. 43.

Af Antagelsen i foregaaende Paragraph følger tillige, efter §. 16, at $b^4 + \beta b^2 + \gamma b + \delta = o$; $b^3 + \frac{1}{2}\beta b + \frac{1}{4}\gamma = o$ og $b^2 + \frac{1}{6}\beta = o$. De tvende sidste giver os $b = c = d = -\frac{3\gamma}{4\beta}$, altsaa $a = \frac{9\gamma}{4\beta}$ og vi faae da $a^4 + \beta a^2 + \gamma a + \delta$

$$= \left(a - \frac{9\gamma}{4\beta}\right)\left(a + \frac{3\gamma}{4\beta}\right)^3 = a^4 - \frac{27\gamma^2}{8\beta^2}a^2 - \frac{27\gamma^3}{8\beta^2}a - \frac{243\gamma^4}{256\beta^4} = o.$$

Af Ligningerne $b^4 + \beta b^2 + \gamma b + \delta = o$ og $b^2 + \frac{1}{6}\beta = o$ udledes dernæst at $b = c = d = \frac{5\beta^2 - 36\delta}{36\gamma} = \frac{2\beta^2}{9\gamma}$, altsaa $a = -\frac{2\beta^2}{3\gamma}$, og derved bliver

$$a^4 + \beta a^2 + \gamma a + \delta = \left(a + \frac{2\beta^2}{3\gamma}\right)\left(a - \frac{2\beta^2}{9\gamma}\right)^3 = a^4 - \frac{8\beta^4}{27\gamma^2}a^2 + \frac{64\beta^6}{729\gamma^3}a - \frac{16\beta^8}{2187\gamma^4} = o.$$

Da endeligen $8(b^4 + \beta b^2 + \gamma b + \delta) - 20(b^4 + \frac{1}{2}\beta b^2 + \frac{1}{4}\gamma b) + 12(b^4 + \frac{1}{6}\beta b^2) = o$, findes heraf $3\gamma b + 8\delta = o$, altsaa $b = c = d = -\frac{8\delta}{3\gamma}$ og $a = \frac{8\delta}{\gamma}$. Følgeligen bliver $a^4 + \beta a^2 + \gamma a + \delta = \left(a - \frac{8\delta}{\gamma}\right)\left(a + \frac{8\delta}{3\gamma}\right)^3$

$$= a^4 - \frac{128\delta^2}{3\gamma^2}a^2 - \frac{4096\delta^3}{27\gamma^3}a - \frac{4096\delta^4}{27\gamma^4} = o.$$

At alt dette er rigtigt følger deraf at, efter foregaaende Paragraph, er $\gamma^2 = -\frac{8}{27}\beta^3$ og $\delta = -\frac{1}{12}\beta^2$.

Skulle i Ligningen $a^4 + \beta a^2 + \gamma a + \delta = 0$ alle Rødder være ligestore, vil det let sees at β, γ og δ blive Nul og derfor $a = b = c = d = 0$. Var Ligningen derimod denne: $a^4 + \alpha a^3 + \beta a^2 + \gamma a + \delta = 0$, blev $-\frac{3}{8}\alpha^2 + \beta = 0$, $\frac{1}{8}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha\beta + \gamma = 0$ og $-\frac{3}{256}\alpha^4 + \frac{1}{16}\alpha^2\beta - \frac{1}{4}\alpha\gamma + \delta = 0$, altsaa $\beta = \frac{3}{8}\alpha^2$, $\gamma = \frac{1}{16}\alpha^3$ og $\delta = \frac{1}{256}\alpha^4$. I Ligningen $a^4 + \alpha a^3 + \frac{3}{8}\alpha^2 a^2 + \frac{1}{16}\alpha^3 a + \frac{1}{256}\alpha^4 = 0$, bliver derfor $a = b = c = d = -\frac{1}{4}\alpha$.

§. 44.

Til Ligningen $a^4 + \beta a^2 + \gamma a + \delta = 0$ være, efter §. 23, den ene Rod $a = {}'a + {}'b + {}'c = {}'A$, som indsat giver os $({}'A)^4 + \beta({}'A)^2 + \gamma{}'A + \delta = 0$, det er, efter §. 8, ${}'A^4 + 4{}'A^3{}'B + 6{}'A^2B^2 + 12{}'A{}'a{}'b{}'c + \beta({}'A^2 + 2{}'A{}'B) + \gamma{}'A + \delta = 0$. Nu er, efter tredie Formel i §. 9, ${}'A^3{}'B = {}'A^2 . {}'A{}'B - {}'a{}'b{}'c . {}'A$, hvorved ovenstaaende Ligning forvandles til ${}'A^4 + 4{}'A^2 . {}'A{}'B + 6{}'A^2{}'B^2 + 8{}'a{}'b{}'c . {}'A + \beta{}'A^2 + 2\beta{}'A{}'B + \gamma{}'A + \delta = 0$, hvoraf vi danne følgende 3 Ligninger: $4{}'A^2 . {}'A{}'B + 2\beta{}'A{}'B = 0$; $8{}'a{}'b{}'c . {}'A + \gamma{}'A = 0$ og ${}'A^4 + 6{}'A^2{}'B^2 + \beta{}'A^2 + \delta = 0$. Af de tvende første findes ${}'A^2 = -\frac{1}{2}\beta$ og ${}'a{}'b{}'c = -\frac{1}{8}\gamma$. Indsættes dernæst i den sidste $-2{}'A^2$ for β, udledes deraf at $\delta = {}'A^4 - 2{}'A^2B^2$ og da tillige $\frac{1}{4}\beta^2 = {}'A^4 + 2{}'A{}'B$, faae vi ${}'A^2{}'B^2 = \frac{1}{16}\beta^2 - \frac{1}{4}\delta$. Følgeligen ere ${}'a^2$, ${}'b^2$ og ${}'c^2$ Rødder til Ligningen

$${}'a^6 + \tfrac{1}{2}\beta{}'a^4 + (\tfrac{1}{16}\beta^2 - \tfrac{1}{4}\delta)\,{}'a^2 - \tfrac{1}{64}\gamma^2 = 0$$

som, uagtet den er af 6^te^ Grad, dog kan opløses som en cubisk Ligning. Sættes nemlig ${}'a^2 = {}''a + {}''b + {}''c$; ${}'b^2 = {}''a + \mathfrak{b}{}''b + \mathfrak{b}^2{}''c$; ${}'c^2 = {}''a + \mathfrak{b}^2{}''b + \mathfrak{b}{}''c$; ${}''b = \sqrt[3]{{}'''a + {}'''b}$; ${}''c = \sqrt[3]{{}'''a - {}'''b}$ og ${}'''b = \sqrt{{}''''a}$, bliver, efter §. 29,

$${}''a = -\tfrac{1}{6}\beta$$
$${}'''a = \tfrac{1}{1728}\beta^3 + \tfrac{1}{128}\gamma^2 - \tfrac{1}{48}\beta\delta = \tfrac{1}{3456}(2\beta^3 + 27\gamma^2 - 72\beta\delta)$$
$${}''''a = (\tfrac{1}{1728}\beta^3 + \tfrac{1}{128}\gamma^2 - \tfrac{1}{48}\beta\delta)^2 - (\tfrac{1}{144}\beta^2 + \tfrac{1}{12}\delta)^3 = \tfrac{1}{3456^2}[(2\beta^3 + 27\gamma^2 - 72\beta\delta)^2 - 4(\beta^2 + 12\delta)^3].$$

For at bestemme Ligningens øvrige Rødder, kunne vi gaae frem paa denne Maade: Af Hoved-Ligningen $a^4 + \beta a^2 + \gamma a + \delta = 0$ udledes denne: $b^3 + ab^2 + (a^2 + \beta)b + a^3 + \beta a + \gamma = 0$; men $a = {}'A$; $\beta = -{}'A^2$ og $\gamma = -8{}'a{}'b{}'c$, som indsat giver os $b^3 + {}'Ab^2 + ({}'A^2 - 2{}'A{}'B)b - {}'A^3 + {}'A^2{}'B - 2{}'a{}'b{}'c = 0$. For at lette Bestemmelsen af denne Lignings Rødder, kunne vi opløse dens sidste Led i sine Factorer. Vi finde da at $-{}'A^3 + {}'A^2\,{}'B - 2\,{}'a\,{}'b\,{}'c = -({}'a - {}'b - {}'c)\,(-{}'a + {}'b - {}'c)\,(-{}'a - {}'b + {}'c)$ og for saavidt b, c og d rationalt skulle kunne udtrykkes i $'a$, $'b$ og $'c$ ville Factorerne af dette Product, eller deres Mangefold, angive Værdien af dem. Ved nu tillige at tage Hensyn til Coefficienterne til b^2 og b, findes at Ligningen fyldestgjøres ved at sætte $b = {}'a - {}'b - {}'c$; $c = -{}'a + {}'b - {}'c$ og $d = -{}'a - {}'b + {}'c$.

Da $''''a = -\frac{27}{3456^2}\,{}'\delta$, bliver $''''a = o$ naar $'\delta = o$, altsaa tillige $'''b = o$; $''b = {}''c$; $'a^2 = {}''a + 2\,{}''b$; $'b^2 = {}'c^2 = {}''a - {}''b$ og derfor $a = {}'a + 2\,{}'b$; $b = {}'a - 2\,{}'b$; $c = d = -{}'a$. Er omvendt $c = d$, bliver $'b = {}'c$; $'b^2 = {}'c^2$; $''b = {}''c$; $'''b = o$, altsaa $''''a = o$ og $'\delta = o$. Hvilket Alt stemmer overeens med hvad der er anført i Slutningen af §. 39.

Anvendes Opløsningen i dette Paragraph paa Ligningen $\mathfrak{d}^4 + \mathfrak{d}^3 + \mathfrak{d}^2 + \mathfrak{d} + 1 = o$, der er fremkommen ved at dividere $\mathfrak{d}^5 - 1 = o$ med $\mathfrak{d} - 1$, findes de i §. 20 for $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}^2$, $\mathfrak{d}^3$ og $\mathfrak{d}^4$ sidst angivne Værdier, dog i en noget forandret Orden.

§. 45.

I foregaaende Paragraph fandtes $'A^2 = -\frac{1}{2}\beta$ og $'a\,{}'b\,{}'c = -\frac{1}{8}\gamma$, hvoraf udledes at $'b^2 + {}'c^2 = -{}'a^2 - \frac{1}{2}\beta$ og $'b\,{}'c = -\frac{\gamma}{8\,{}'a}$. Derfor bliver

$$'b + {}'c = \pm\sqrt{-{}'a^2 - \tfrac{1}{2}\beta - \frac{\gamma}{4\,{}'a}} \text{ og } 'b - {}'c = \pm\sqrt{-{}'a^2 - \tfrac{1}{2}\beta + \frac{\gamma}{4\,{}'a}}.$$

Lade vi her blot de øverste Tegn gjelde, kunne den biqvadratiske Lignings Rødder ogsaa udtrykkes saaledes:

$$a = {}'a + \sqrt{-{}'a^2 - \tfrac{1}{2}\beta - \frac{\gamma}{4\,{}'a}};\quad b = {}'a - \sqrt{-{}'a^2 - \tfrac{1}{2}\beta - \frac{\gamma}{4\,{}'a}};$$

$$c = -{}'a + \sqrt{-{}'a^2 - \tfrac{1}{2}\beta + \frac{\gamma}{4\,{}'a}};\quad d = -{}'a - \sqrt{-{}'a^2 - \tfrac{1}{2}\beta + \frac{\gamma}{4\,{}'a}};$$

hvor vi for $'a$ kunne vælge hvilkensomhelst af de 6 Værdier, den har i Ligningen $'a^6 + \frac{1}{2}\beta\,{}'a^4 + (\frac{1}{16}\beta^2 - \frac{1}{4}\delta)\,{}'a^2 - \frac{1}{64}\gamma^2 = o$. Herved hæves den Uvished, som ellers finder Sted med Hensyn til de dobbelte Tegn $'a$, $'b$ og $'c$ kunne have.

Det samme Resultat kunde ogsaa være udbragt paa andre Maader. Antages for det Første Hjelpe-Ligningen at være $'a^6 + {}'\alpha\,{}'a^4 + {}'\beta\,{}'a^2 + {}'\gamma = o$, findes deraf $'b^4 + ({}'a^2 + {}'\alpha)\,{}'b^2 + {}'a^4 + {}'\alpha\,{}'a^2 + {}'\beta = o$ eller, hvilket er det Samme, $'b^4 + ({}'a^2 + {}'\alpha)\,{}'b^2 - \frac{'\gamma}{'a^2} = o$. Dette giver $'b^2 = -\frac{1}{2}({}'a^2 + {}'\alpha) + \sqrt{\frac{1}{4}({}'a^2 + {}'\alpha)^2 + \frac{'\gamma}{'a^2}}$;

$'c^2 = -\frac{1}{2}('a^2 + '\alpha) - \sqrt{\frac{1}{4}('a^2 + '\alpha)^2 + \frac{'\gamma}{'a^2}}$ og $'b'c = \pm\frac{\sqrt{-'\gamma}}{'a}$ (hvor vi dog blot ville tage Hensyn til det øverste Tegn), altsaa $('b + 'c)^2 = 'b^2 + 2'b'c + 'c^2 = -'a^2 - '\alpha + \frac{2\sqrt{-'\gamma}}{'a}$; $'b + 'c = \pm\sqrt{-'a^2 - '\alpha + \frac{2\sqrt{-'\gamma}}{'a}}$ og $a = 'a + 'b + 'c = 'a \pm \sqrt{-'a^2 - '\alpha + \frac{2\sqrt{-'\gamma}}{'a}}$. Indsættes denne Værdie i Ligningen $a^4 + \beta a^2 + \gamma a + \delta = o$, bliver, efter behørig Reduction, $'a^6 + '\alpha'a^4 - \frac{1}{4}(8\sqrt{-'\gamma} + \gamma)'a^3 - \frac{1}{4}('\alpha^2 - \beta'\alpha + \delta)'a^2 - (\frac{1}{2}\beta - '\alpha)\sqrt{-'\gamma}\,.\,'a + '\gamma \mp (\frac{1}{2}\beta'a^3 - '\alpha'a^3 + \frac{1}{4}\gamma'a^2 + 2'a^2\sqrt{-'\gamma})\sqrt{-'a^2 - '\alpha + \frac{2\sqrt{-'\gamma}}{'a}} = o$, og sammenlignes denne med $'a^6 + '\alpha'a^4 + '\beta'a^2 + '\gamma = o$, sees at Coefficienterne saavel til $'a^3$ og $'a$ som til Rod-Størrelsen forsvinde naar vi sætte $'\alpha = \frac{1}{2}\beta$ og $\sqrt{-'\gamma} = -\frac{1}{8}\gamma$, altsaa $'\gamma = -\frac{1}{64}\gamma^2$. Derved bliver $'\beta = \frac{1}{16}\gamma^2 - \frac{1}{4}\delta$ og Hjelpe-Ligningen derfor den samme som tilforn.

Af Ligningen $a = 'a \pm \sqrt{-'a^2 - 'a + \frac{2\sqrt{-'\gamma}}{'a}}$ findes dernæst at $a - 'a = \pm\sqrt{-'a^2 - '\alpha + \frac{2\sqrt{-'\gamma}}{'a}}$, altsaa tillige $a^2 - 2a'a + 'a^2 = -'a^2 - \alpha + \frac{2\sqrt{-'\gamma}}{'a}$. Multipliceres nu med 'a, udbringes, efter nogle Reductioner, denne Ligning $'a^3 + \frac{1}{2}(a^2 + '\alpha)'a = a'a^2 + \sqrt{-'\gamma}$, følgeligen, naar der atter qvadreres paa begge Sider, $'a^6 + (a^2 + '\alpha)'a^4 + \frac{1}{4}(a^4 + 2'\alpha a^2 + '\alpha^2)'a^2 = a^2'a^4 + 2a'a^2\sqrt{-'\gamma} - '\gamma$ og naar alle Ledene overføres paa een Side, bliver $'a^6 + '\alpha'a^4 + (\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}'\alpha a^2 - 2a\sqrt{-'\gamma} + \frac{1}{4}'\alpha^2)'a^2 + '\gamma = o$, som sammenlignet med $'a^6 + '\alpha'a^4 + '\beta'a^2 + '\gamma = o$, giver os $'\beta = \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}'\alpha a^2 - 2a\sqrt{-'\gamma} + \frac{1}{4}'\alpha^2 = (\frac{1}{2}'\alpha - \frac{1}{4}\beta)a^2 - (2\sqrt{-'\gamma} + \frac{1}{4}\gamma)a + \frac{1}{4}'\alpha^2 - \frac{1}{4}\delta$. Men skal $'\beta$ kun være afhængig af Hoved-Ligningens Coefficienter, bliver $\frac{1}{2}'\alpha - \frac{1}{4}\beta = o$ og $2\sqrt{-'\gamma} + \frac{1}{4}\gamma = o$, altsaa $'\alpha = \frac{1}{2}\beta$; $'\gamma = -\frac{1}{64}\gamma^2$ og $'\beta = \frac{1}{16}\beta^2 - \frac{1}{4}\delta$. For Resten som forhen.

§. 46.

Efter §. 44 er $a = 'a + 'b + 'c$; $b = 'a - 'b - 'c$; $c = -'a + 'b - 'c$ og $d = -'a - 'b + 'c$, hvoraf igjen udledes at $'a = \frac{1}{4}(a + b - c - d)$; $'b = \frac{1}{4}(a - b + c - d)$ og $'c = \frac{1}{4}(a - b - c + d)$. Antages nu $'a = 'd + 'e + 'f$; $'b = 'd + b'e + b^2'f$ og $'c = 'd + b^2'e + b'f$, findes deraf $'d = \frac{1}{3}('a + 'b + 'c) = \frac{1}{12}(3a$

$-b-c-d)$; $'e = \frac{1}{3}('a + \mathfrak{b}^2\,'b + \mathfrak{b}\,'c) = \frac{1}{12}(2b-c-d-(c-d)\sqrt{-3})$;
$'f = \frac{1}{3}('a + \mathfrak{b}\,'b + \mathfrak{b}^2\,'c) = \frac{1}{12}(2b-c-d+(c-d)\sqrt{-3})$; altsaa

$$'a = \tfrac{1}{12}(3a-b-c-d) + \tfrac{1}{12}(2b-c-d-(c-d)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}(2b-c-d+(c-d)\sqrt{-3})$$
$$'b = \tfrac{1}{12}(3a-b-c-d) + \tfrac{1}{12}\mathfrak{b}(2b-c-d-(c-d)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}\mathfrak{b}^2(2b-c-d+(c-d)\sqrt{-3})$$
$$'c = \tfrac{1}{12}(3a-b-c-d) + \tfrac{1}{12}\mathfrak{b}^2(2b-c-d-(c-d)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}\mathfrak{b}(2b-c-d+(c-d)\sqrt{-3})$$

Nu er

$$\mathfrak{b}\,(2b-c-d-(c-d)\sqrt{-3}) = -b+2c-d+(b-d)\sqrt{-3}$$
$$\mathfrak{b}^2(2b-c-d+(c-d)\sqrt{-3}) = -b+2c-d-(b-d)\sqrt{-3}$$
$$\mathfrak{b}\,(2b-c-d+(c-d)\sqrt{-3}) = -b-c+2d+(b-c)\sqrt{-3}$$
$$\mathfrak{b}^2(2b-c-d-(c-d)\sqrt{-3}) = -b-c+2d-(b-c)\sqrt{-3}$$

Derfor bliver ogsaa

$$'a = \tfrac{1}{12}(3a-b-c-d) + \tfrac{1}{12}(2b-c-d-(c-d)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}(2b-c-d+(c-d)\sqrt{-3})$$
$$'b = \tfrac{1}{12}(3a-b-c-d) + \tfrac{1}{12}(-b+2c-d+(b-d)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}(-b+2c-d-(b-d)\sqrt{-3})$$
$$'c = \tfrac{1}{12}(3a-b-c-d) + \tfrac{1}{12}(-b-c+2d-(b-c)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}(-b-c+2d+(b-c)\sqrt{-3})$$

Her ere $'b$ og $'c$ fremkomne af $'a$ ved at ombytte b først med c og derpaa med d. Ombyttes dernæst a og b, a og c, a og d, faae vi de Værdier for $'a$, $'b$ og $'c$, der høre til Rødderne b, c og d. Den biqvadratiske Lignings Rødder kunne derfor udtrykkes som Functioner af Rødderne selv paa denne Maade:

$$\begin{aligned} a = {} & \tfrac{1}{12}(3a-b-c-d) + \tfrac{1}{12}(2b-c-d+(c-d)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}(2b-c-d-(c-d)\sqrt{-3}) \\ & + \tfrac{1}{12}(3a-b-c-d) + \tfrac{1}{12}(-b+2c-d-(b-d)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}(-b+2c-d+(c-d)\sqrt{-3}) \\ & + \tfrac{1}{12}(3a-b-c-d) + \tfrac{1}{12}(-b-c+2d-(b-c)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}(-b-c+2d+(b-c)\sqrt{-3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = {} & \tfrac{1}{12}(-a+3b-c-d) + \tfrac{1}{12}(2a-c-d+(c-d)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}(2a-c-d-+(c-d)\sqrt{-3}) \\ & + \tfrac{1}{12}(-a+3b-c-d) + \tfrac{1}{12}(-a+2c-d-(a-d)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}(-a+2c-d+(a-d)\sqrt{-3}) \\ & + \tfrac{1}{12}(-a+3b-c-d) + \tfrac{1}{12}(-a-c+2d-(a-c)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}(-a-c+2d+(a-c)\sqrt{-3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c = {} & \tfrac{1}{12}(-a-b+3c-d) + \tfrac{1}{12}(-a+2b-d+(a-d)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}(-a+2b-d-(a-d)\sqrt{-3}) \\ & + \tfrac{1}{12}(-a-b+3c-d) + \tfrac{1}{12}(2a-b-d-(b-d)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}(2a-b-d+(b-d)\sqrt{-3}) \\ & + \tfrac{1}{12}(-a-b+3c-d) + \tfrac{1}{12}(-a-b+2d+(a-b)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}(-a-b+2d-(a-b)\sqrt{-3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d = {} & \tfrac{1}{12}(-a-b-c+3d) + \tfrac{1}{12}(-a+2b-c-(a-c)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}(-a+2b-c+(a-c)\sqrt{-3}) \\ & + \tfrac{1}{12}(-a-b-c+3d) + \tfrac{1}{12}(-a-b+2c+(a-b)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}(-a-b+2c-(a-b)\sqrt{-3}) \\ & + \tfrac{1}{12}(-a-b-c+3d) + \tfrac{1}{12}(2a-b-c-(b-c)\sqrt{-3}) + \tfrac{1}{12}(2a-b-c+(b-c)\sqrt{-3}) \end{aligned}$$

I Øvrigt bliver her $a = 'a + 'b + 'c$; $b = 'a - 'c - 'b$; $c = -'c + 'b - 'a$ og $d = -'b - 'a + 'c$; altsaa, paa Ordenen nær, de samme som forhen.

Endeligen kunne vi ogsaa af disse Udtryk for Rødderne bestemme Værdierne af ${}''a$, a''' og ${}''''a$.

§. 47.

I §. 44 saae vi at naar den biqvadratiske Ligning havde tvende ligestore Rødder, var det samme Tilfældet med dens Hjelpe-Ligning. Vi ville nu søge at opløse den første ved at forudsætte denne Overeensstemmelse imellem Røddernes Ligestorhed. Har altsaa Ligningen $a^4 + \beta a^2 + \gamma a + \delta = o$ tvende ligestore Rødder, f. Ex. c og d, da er baade $c^4 + \beta c^2 + \gamma c + \delta = o$ og $4c^3 + 2\beta c + \gamma = o$. Multipliceres den sidste med c og fra Productet drages den første, bliver $3c^4 + \beta c^2 - \delta = o$, hvoraf $c^2 = -\frac{1}{6}\beta \pm \frac{1}{6}\sqrt{\beta^2 + 12\delta}$, eller, naar vi blot tage Hensyn til det øverste Tegn, $c^2 = -\frac{1}{6}\beta + \frac{1}{6}\sqrt{\beta^2 + 12\delta}$, altsaa $c^4 = \frac{1}{18}\beta^2 + \frac{1}{3}\delta - \frac{1}{18}\beta\sqrt{\beta^2 + 12\delta}$ og $c^6 = -\frac{1}{54}(\beta^2 + 3\delta)\sqrt{\beta^2 + 12\delta}$. Tillige er, efter §. 39, i det antagne Tilfælde, $a^2 + 2ca + 3c^2 + \beta = o$ og derfor $a = -c + \sqrt{-2c^2 - \beta}$ og $b = -c - \sqrt{-2c^2 - \beta}$.

Er dernæst Hjelpe-Ligningen denne ${}'a^6 + {}'\alpha {}'a^4 + {}'\beta {}'a^2 + {}'\gamma = o$, i hvilken ${}'b^2 = {}'c^2$ og ${}'b = {}'c$, da bliver ${}'\alpha = -{}'a^2 - 2b^2$; ${}'\beta = 2{}'a^2{}'b^2 + {}'b^4$ og ${}'\gamma = -{}'a^2{}'b^4$. Antages videre $a = {}'a + {}'b + {}'c = {}'a + 2{}'b$ og denne Værdie sammenlignes med den ovenfor angivne $a = -c + \sqrt{-2c^2 - \beta}$, da kunne vi sætte ${}'a = -c$ og $2{}'b = \sqrt{-2c^2 - \beta}$, hvilket giver os ${}'a^2 = c^2$ og ${}'b^2 = -\frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}\beta$. Følgeligen bliver ${}'\alpha = \frac{1}{2}\beta$; ${}'\beta = -\frac{3}{4}c^4 - \frac{1}{4}\beta c^2 + \frac{1}{16}\beta^2 = \frac{1}{16}\beta^2 - \frac{1}{4}\delta$ og ${}'\gamma = -\frac{1}{4}c^6 - \frac{1}{4}\beta c^4 - \frac{1}{16}\beta^2 c = -\frac{1}{64}\gamma^2$. Hjelpe-Ligningen bliver altsaa denne: $a^6 + \frac{1}{2}\beta c^4 + (\frac{1}{16}\beta^2 - \frac{1}{4}\delta)c^2 - \frac{1}{64}\gamma^2 = o$, som tilforn.

§. 48.

Efter Euler ere Rødderne til Ligningen $a^4 + \beta a^2 + \gamma a + \delta = o$ følgende: $a = {}'a + {}'b + {}'c$; $b = c^2{}'a + c^4{}'b + c^6{}'c = c^2{}'a + {}'b + c^2{}'c = -{}'a + {}'b - {}'c$; $c = c{}'a + c^2{}'b + c^3{}'c = {}'a\sqrt{-1} - {}'b - {}'c\sqrt{-1}$ og $d = c^3{}'a + c^6{}'b + c^9{}'c = c^3{}'a + c^2{}'b + c{}'c = -{}'a\sqrt{-1} - {}'b + {}'c\sqrt{-1}$, hvilke dog, for Sammenligningens Skyld, her ere satte i en anden Orden. Af Værdierne for A^2 og A^3 udledes dernæst Ligningerne ${}'b^2 + 2{}'a{}'c = -\frac{1}{2}\beta$ og $({}'a^2 + {}'c^2)\,b = -\frac{1}{4}\gamma$, som give os

$$ {}'a = \tfrac{1}{2}\sqrt{-{}'b^2 - \tfrac{1}{2}\beta - \frac{\gamma}{4{}'b}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{{}'b^2 + \tfrac{1}{2}\beta - \frac{\gamma}{4{}'b}} $$

$$ {}'c = \tfrac{1}{2}\sqrt{-{}'b^2 - \tfrac{1}{2}\beta - \frac{\gamma}{4{}'b}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{{}'b^2 + \tfrac{1}{2}\beta - \frac{\gamma}{4{}'b}} $$

Deraf findes

$$a = {}'b + \sqrt{-{}'b^2 - \tfrac{1}{2}\beta - \frac{\gamma}{4\,'b}}; \quad b = {}'b - \sqrt{-{}'b^2 - \tfrac{1}{2}\beta - \frac{\gamma}{4\,'b}}$$

$$c = -{}'b + \sqrt{-{}'b^2 - \tfrac{1}{2}\beta + \frac{\gamma}{4\,'b}}; \quad d = -{}'b - \sqrt{-{}'b^2 - \tfrac{1}{2}\beta + \frac{\gamma}{4\,'b}}.$$

Af Værdien for A^4 udledes videre Ligningen $'a^4 + {}'b^4 + 12\,'a'b^2{}'c + 6\,'a^2{}'c^2 + {}'c^4 = \frac{1}{2}\beta^2 - \delta$ og indsættes heri de ovenfor fundne Værdier af $'a$ og $'c$, fremkommer, efter behørig Reduction, denne Ligning $'b^6 + \frac{1}{2}\beta\,'b^4 + (\frac{1}{16}\beta^2 - \frac{1}{4}\delta)\,'b^2 - \frac{1}{64}\gamma^2 = 0$ og Opløsningen giver følgeligen det samme Resultat som den i §. 45, hvor $'a$ har samme Betydning som $'b$ har her.

Vilde vi have opløst Ligningen ved at danne en Hjelpe-Ligning for $'a$, $'b$ og $'c$, da kunde vi af de fundne Værdier for $'a$ og $'c$ have bestemt $'A^4$, $'A^8$ og $'a^4{}'b^4{}'c^4$, og vi havde saaledes faaet en Ligning af 12te Grad, der vel kunde opløses som en cubisk Ligning, men hvis Coefficienter dog maatte udledes af Ligningen for $'b$. Opløsningen var derved bleven vanskeligere end den anførte.

§. 49.

Ville vi anvende den Tschirnhausenske Opløsnings-Methode paa Ligningen $a^4 + \beta a^2 + \gamma a + \delta = 0$, sættes

$$a^3 + n a^2 + o a + p = {}'a;\quad b^3 + n b^2 + o b + p = {}'b = c^2\,'a;$$

$$c^3 + n c^2 + o c + p = {}'c = c\,'a;\quad d^3 + n d^2 + o d + p = {}'d = c^3\,'a.$$

Drages her den 2den, 3die og 4de Ligning fra den 1ste og Differenserne divideres med $a - b$, $a - c$ og $a - d$, bliver

$$a^2 + ab + b^2 + n(a + b) + o = \frac{1 - c^2}{a - b}\,'a$$

$$a^2 + ac + c^2 + n(a + c) + o = \frac{1 - c}{a - c}\,'a$$

$$a^2 + ad + d^2 + n(a + d) + o = \frac{1 - c^3}{a - d}\,'a$$

Drages dernæst den 2den og 3die af disse Ligninger fra den 1ste og Differentserne divideres med $b - c$ og $b - d$, bliver

$$a + b + c + n = \frac{(b - c) - c^2(a - c) + c(a - b)}{(a - b)(a - c)(b - c)}\,'a = -d + n$$

$$a + b + d + n = \frac{(b - d) - c^2(a - d) + c^3(a - b)}{(a - b)(a - d)(b - d)}\,'a = -c + n.$$

Drages endeligen den sidste af disse fra den første og Forskjellen divideres med $c - d$, findes, efter behørig Reduction,

$$1 = \frac{(b-c)(b-d)(c-d) - c^2(a-c)(a-d)(c-d) + c(a-b)(a-d)(b-d) - c^3(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}\,{}'a$$

altsaa

$${}'a = \frac{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}{(b-c)(b-d)(c-d) - c^2(a-c)(a-d)(c-d) + c(a-b)(a-d)(b-d) - c^3(a-b)(a-c)(b-c)}$$

Nu er, efter §. 39, $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) = \pm\sqrt{{}'\delta}$ og sættes $(b-c)(b-d)(c-d) = e$; $-(a-c)(a-d)(c-d) = f$; $(a-b)(a-d)(b-d) = g$ og $-(a-b)(a-c)(b-c) = h$, bliver

$${}'a = \frac{\pm\sqrt{{}'\delta}}{e + c^2 f + cg + c^3 h}$$

Heraf findes igjen

$$\mathfrak{n} = \frac{ae + c^2 bf + ccg + c^3 dh}{e + c^2 f + cg + c^3 h}$$

$$\mathfrak{o} = \frac{(a^2 + \beta)\,e + c^2(b^2 + \beta)\,f + c(c^2 + \beta)\,g + c^3(d^2 + \beta)\,h}{e + c^2 f + cg + c^3 h}$$

$$= \frac{a^2 e + c^2 b^2 f + cc^2 g + c^3 d^2 h}{e + c^2 f + cg + c^3 h} + \beta$$

$$\mathfrak{p} = \frac{(a^3 + \beta a + \gamma)\,e + c^2(b^3 + \beta b + \gamma)\,f + c(c^3 + \beta c + \gamma)\,g + c^3(d^3 + \beta d + \gamma)\,h}{e + c^2 f + cg + c^3 h}$$

$$= \frac{a^3 e + c^2 b^3 f + cc^3 g + c^3 d^3 h}{e + c^2 f + cg + c^3 h} + \beta\mathfrak{n} + \gamma.$$

Sættes her $\dfrac{a^2 e + c^2 b^2 f + cc^2 g + c^3 d^2 h}{e + c^2 f + cg + c^3 h} = {}'\mathfrak{o}$; $\dfrac{a^3 e + c^2 b^3 f + cc^3 g + c^3 d^3 h}{e + c^2 f + cg + c^3 h} = {}'\mathfrak{p}$ og i Analogie hermed $\dfrac{ae + c^2 bf + ccg + c^3 dh}{e + c^2 f + cg + c^3 h} = {}'\mathfrak{n}$, bliver

$$a^3 + \beta a + \gamma + {}'\mathfrak{n}\,(a^2 + \beta) + {}'\mathfrak{o}\,a + {}'\mathfrak{p} = {}'a$$
$$b^3 + \beta b + \gamma + {}'\mathfrak{n}\,(b^2 + \beta) + {}'\mathfrak{o}\,b + {}'\mathfrak{p} = c^2\,{}'a$$
$$c^3 + \beta c + \gamma + {}'\mathfrak{n}\,(c^2 + \beta) + {}'\mathfrak{o}\,c + {}'\mathfrak{p} = c\,a$$
$$d^3 + \beta d + \gamma + {}'\mathfrak{n}\,(d^2 + \beta) + {}'\mathfrak{o}\,d + {}'\mathfrak{p} = c^3\,{}'a.$$

Tages disse Ligningers Sum, bliver $A^3 + \beta A + 4\gamma + {}'\mathfrak{n}\,(A^2 + 4\beta) + {}'\mathfrak{o}A + 4\,{}'\mathfrak{p} = o$, hvoraf udledes at ${}'\mathfrak{p} = -\frac{1}{4}\gamma - \frac{1}{2}\beta\,{}'\mathfrak{n}$. Ved dernæst at tage Summen af Ligningernes Qvadrater, Cuber og Biqvadrater, kunde man bestemme Ligninger for ${}'\mathfrak{n}$, ${}'\mathfrak{o}$, ${}'\mathfrak{p}$ og ${}'a$; men da disse ikke letteligen kunne opløses efter det Foregaaende, ville vi søge at gjøre Bestemmelsen paa en anden Maade. Dog ville vi først søge en Ligning for e, f, g og h.

Da $e = \pm {}'A^{-1}\sqrt{{}'\delta}$; $f = \pm {}'B^{-1}\sqrt{{}'\delta}$; $g = \pm {}'C^{-1}\sqrt{{}'\delta}$ og $h = \pm {}'D^{-1}\sqrt{-{}'\delta}$, udledes af §. 39, sammenlignet med §. 14, at $E = o$; $E^2 = -2{}'\beta$; $E^3 = \mp 3{}'\alpha\sqrt{{}'\delta}$ og $efgh = {}'\delta$. Ligningen for e, f, g og h bliver derfor denne: $e^4 + {}'\beta e^2 \pm {}'\alpha\sqrt{{}'\delta}\,.\,e + {}'\delta = o$.

§. 50.

Af Formerne for ${}'\mathfrak{n}$, ${}'\mathfrak{o}$, ${}'\mathfrak{p}$ og ${}'a$ sees at hver af dem maae have 6 Værdier, hvilke erholdes ved Omsætningen af c, c^2 og c^3. Betegnes nu de Værdier, der fremkomme ved i ${}'\mathfrak{n}$, ${}'\mathfrak{o}$, ${}'\mathfrak{p}$ og ${}'a$ at ombytte c og c^3, med ${}''\mathfrak{n}$, ${}''\mathfrak{o}$, ${}''\mathfrak{p}$ og ${}''a$, da bliver

$$ {}''\mathfrak{n} = \frac{ae + c^2bf + c^3eg + cdh}{e + c^2f + c^3g + ch}; \quad {}''\mathfrak{o} = \frac{a^2e + c^2b^2f + c^3e^2g + cd^2h}{e + c^2f + c^3g + ch}; $$

$$ {}''\mathfrak{p} = \frac{a^3e + c^2b^2f + c^3e^3g + cd^3h}{e + c^2f + c^3g + ch}; \quad {}''a = \frac{\pm\sqrt{{}'\delta}}{e + c^2f + c^3g + ch}; $$

og tillige er

$$ \begin{aligned} a^3 + \beta a + \gamma + {}''\mathfrak{n}(a^2 + \beta) + {}''\mathfrak{o}a + {}''\mathfrak{p} &= {}''a \\ b^3 + \beta b + \gamma + {}''\mathfrak{n}(b^2 + \beta) + {}''\mathfrak{o}b + {}''\mathfrak{p} &= c^2{}''a \\ c^3 + \beta c + \gamma + {}''\mathfrak{n}(c^2 + \beta) + {}''\mathfrak{o}c + {}''\mathfrak{p} &= c^3{}''a \\ d^3 + \beta d + \gamma + {}''\mathfrak{n}(d^2 + \beta) + {}''\mathfrak{o}d + {}''\mathfrak{p} &= c{}''a. \end{aligned} $$

Tages her Forskjellen imellem Ligningerne for ${}'a$ og ${}''a$, findes $({}'\mathfrak{n} - {}''\mathfrak{n})(a^2 + \beta) + ({}'\mathfrak{o} - {}''\mathfrak{o})a + {}'\mathfrak{p} - {}''\mathfrak{p} = {}'a - {}''a$ og da ${}'\mathfrak{p} = -\frac{1}{4}\gamma - \frac{1}{2}\beta{}'\mathfrak{n}$ og ${}''\mathfrak{p} = -\frac{1}{4}\gamma - \frac{1}{2}\beta{}''\mathfrak{n}$, bliver ${}'\mathfrak{p} - {}''\mathfrak{p} = -\frac{1}{2}\beta({}'\mathfrak{n} - {}''\mathfrak{n})$, som indsat giver os $({}'\mathfrak{n} - {}''\mathfrak{n})(a^2 + \frac{1}{2}\beta) + ({}'\mathfrak{o} - {}''\mathfrak{o})a = {}'a - {}''a$, altsaa

$$ a^2 + \frac{{}'\mathfrak{o} - {}''\mathfrak{o}}{{}'\mathfrak{n} - {}''\mathfrak{n}}a + \tfrac{1}{2}\beta = \frac{{}'a - {}''a}{{}'\mathfrak{n} - {}''\mathfrak{n}} $$

eller, ved at sætte $\dfrac{{}'\mathfrak{o} - {}''\mathfrak{o}}{{}'\mathfrak{n} - {}''\mathfrak{n}} = q$

$$ a^2 + qa + \tfrac{1}{2}\beta = \frac{{}'a - {}''a}{{}'\mathfrak{n} - {}''\mathfrak{n}}. $$ Paa samme Maade findes

$$ b^2 + qb + \tfrac{1}{2}\beta = \frac{c^2{}'a - c^2{}''a}{{}'\mathfrak{n} - {}''\mathfrak{n}} $$

$$ c^2 + qc + \tfrac{1}{2}\beta = \frac{c{}'a - c^3{}''a}{{}'\mathfrak{n} - {}''\mathfrak{n}} $$

$$ d^2 + qd + \tfrac{1}{2}\beta = \frac{c^3{}'a - c{}''a}{{}'\mathfrak{n} - {}''\mathfrak{n}}. $$

Summen af disse Ligningers Cuber bliver $A^6 + 3qA^5 + 3q^2A^4 + q^3A^3 + \frac{3}{2}\beta A^4 + 3\beta q A^3 + \frac{3}{2}\beta q^2 A^2 + \frac{3}{4}\beta^2 A^2 + \frac{3}{4}\beta^2 q A + \frac{1}{2}\beta^3 = 0$, hvoraf denne cubiske Ligning for q udledes: $q^3 - \frac{\beta^2 - 4\delta}{\gamma} q^2 - 2\beta q - \gamma = 0$ og Værdien af q kan saaledes af det Foregaaende bestemmes.

Tages videre Summen af Ligningernes Qvadrater, udledes deraf $\frac{'a''a}{('n - ''n)^2} = \frac{1}{4}\beta q^2 + \frac{3}{4}\gamma q - \frac{1}{8}\beta^2 + \frac{1}{2}\delta$.

Ordnes dernæst Ligningerne først paa denne Maade: $a^2 + qa = \frac{'a - ''a}{'n - ''n} - \frac{1}{2}\beta$; o s. v., da findes Summen af deres Biqvadrater at være

$$A^8 + 4qA^7 + 6q^2A^6 + 4q^3A^5 + q^4A^4 = \frac{4('a^4 + 6'a^2''a^2 + ''a^4)}{('n - 'n)^4} - \frac{12\beta'a''a}{('n - ''n)^2} + \frac{1}{4}\beta^2$$

hvoraf igjen udledes

$$\frac{'a^2 + ''a^2}{('n - ''n)^2} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(\beta^2 - 4\delta)q^4 + \tfrac{7}{2}\beta\gamma q^3 - (2\beta^3 - \tfrac{9}{4}\gamma^2 - 8\beta\delta)q^2 - (4\beta^2\gamma - 4\gamma\delta)q - 2\beta\gamma^2}$$

eller, da $-2\beta\gamma q^3 + (2\beta^3 - 8\beta\delta)q^2 + 4\beta^2\gamma q + 2\beta\gamma^2 = 0$,

$$\frac{'a^2 + ''a^2}{('n - ''n^2} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(\beta^2 - 4d)q^4 + \tfrac{3}{2}\beta\gamma q^3 + \tfrac{9}{4}\gamma^2 q^2 + 4\gamma\delta q.}$$

Heraf og af Værdien for $\frac{'a''a}{'n - ''n^2}$ findes dernæst

$$\frac{'a}{'n - ''n} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}\beta q^2 + \tfrac{3}{2}\gamma q - \tfrac{1}{4}\beta^2 + \delta \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(\beta^2 - 4\delta)q^4 + \tfrac{3}{2}\beta\gamma q^3 + \tfrac{9}{4}\gamma^2 q^2 + 4\gamma\delta q}}$$
$$\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-\tfrac{1}{2}\beta q^2 - \tfrac{3}{2}\gamma q + \tfrac{1}{4}\beta^2 - \delta \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(\beta^2 - 4\delta)q^4 + \tfrac{3}{2}\beta\gamma q^3 + \tfrac{9}{4}\gamma^2 q^2 + 4\gamma\delta q}}$$

$$\frac{''a}{'n - ''n} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}\beta q^2 + \tfrac{3}{2}\gamma q - \tfrac{1}{4}\beta^2 - \delta \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(\beta^2 - 4\delta)q^4 + \tfrac{3}{2}\beta\gamma q^3 + \tfrac{9}{4}\gamma^2 q^2 + 4\gamma\delta q}}$$
$$\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{-\tfrac{1}{2}\beta q^3 - \tfrac{3}{2}\gamma q + \tfrac{1}{4}\beta^2 - \delta \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(\beta^2 - 4\delta)q^4 + \tfrac{3}{2}\beta\gamma q^3 + \tfrac{9}{4}\gamma^2 q^2 + 4\gamma\delta q}}$$

hvoraf endeligen udledes

$$\frac{'a - ''a}{'n - ''n} = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}\beta q^2 - \tfrac{3}{2}\gamma q + \tfrac{1}{4}\beta^2 - \delta \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(\beta^2 - 4\delta)q^4 + \tfrac{3}{2}\beta\gamma q^3 + \tfrac{9}{4}\gamma^2 q^2 + 4\gamma\delta q}}$$

$$\frac{'a + ''a}{'n - ''n} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\beta q^2 + \tfrac{3}{2}\gamma q - \tfrac{1}{4}\beta^2 + \delta \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(\beta^2 - 4\delta)q^4 + \tfrac{3}{2}\beta\gamma q^3 + \tfrac{9}{4}\gamma^2 q^2 + 4\gamma\delta q}}$$

eller, for Kortheds Skyld,

$$\frac{'a - ''a}{'n - ''n} = \pm\sqrt{-r \pm s} \text{ og } \frac{'a + ''a}{'n - ''n} = \pm\sqrt{r \pm s}.$$

Ved Indsættelsen af disse Værdier faae vi følgende Ligninger

$$a^2 + qa = -\tfrac{1}{2}\beta \pm \sqrt{-r \pm \delta}$$
$$b^2 + qb = -\tfrac{1}{2}\beta \mp \sqrt{-r \pm \delta}$$
$$c^2 + qc = -\tfrac{1}{2}\beta \pm \sqrt{-r \mp \delta}$$
$$d^2 + qd = -\tfrac{1}{2}\beta \mp \sqrt{-r \mp \delta}$$

hvoraf sees at een af disse Ligninger, f. Ex. den første, indeholder Værdierne af alle Hoved-Ligningens Rødder, og derfor bliver

$$a = -\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{2}\beta + \sqrt{-r + \delta}}$$
$$b = -\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{2}\beta - \sqrt{-r + \delta}}$$
$$c = -\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{2}\beta + \sqrt{-r - \delta}}$$
$$d = -\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{2}\beta - \sqrt{-r - \delta}}$$

At kun een af de tvende Værdier for hver Rod i Almindelighed kan gjelde, følger af §. 22.

§. 51.

For at henføre den Tschirnhausenske Opløsnings-Methode til den i §. 44 fundne, kunne vi gaae saaledes frem: Af det Foregaaende følger at

$$'n - ''n = \frac{-2c((a-c)eg-(a-d)eh-(b-c)fg+(b-d)fh)}{e^2+f^2+g^2+h^2-2(ef+gh)} = \frac{\mp 4c(a+b-c-d)\sqrt{'\delta}}{e^2+f^2+g^2+h^2-2(ef+gh)}$$

$$'o - ''o = \frac{-2c((a^2-c^2)eg-(a^2-d^2)eh-(b^2-c^2)fg+(b^2-d^2)fh)}{e^2+f^2+g^2+h^2-2(ef+gh)} = \frac{\mp 8c(ab-cd)\sqrt{'\delta}}{e^2+f^2+g^2+h^2-2(ef+gh)}$$

$$'a - ''a = \frac{\mp 2c(g-h)\sqrt{'\delta}}{e^2+f^2+g^2+h^2-2(ef+gh)} = \frac{\mp 2c(a-b)((a-d)(b-d)+(a-c)(b-c))\sqrt{'\delta}}{e^2+f^2+g^2+h^2-2(ef+gh)}$$

Altsaa bliver

$$\frac{'o - ''o}{'n - ''n} = q = \frac{2(ab-cd)}{a+b-c-d}$$

$$\frac{'a - ''a}{'n - ''n} = \frac{(a-b)((a-d)(b-d)+(a-c)(b-c))}{2(a+b-c-d)}.$$

Da dernæst $a+b+c+d = o$, bliver $a+b = -c-d$, altsaa tillige $a^2 - 2ab + b^2 = c^2 + 2cd + d^2$ og $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2 = o$. Nu er $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2 = (a-b+c-d)(a-b-c+d)$, som draget fra giver $4ab - 4cd = -(a-b+c-d)(a-b-c+d)$ og $ab - cd = -\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)(a-b-c+d)$, hvoraf følger at $q = \dfrac{-(a-b+c-d)(a-b-c+d)}{2(a+b-c-d)}$.

Tages her $'a$, $'b$ og $'c$ i den Betydning de have i §. 44, da er, efter §. 46, $a + b - c - d = 4'a$; $a - b + c - d = 4'b$ og $a - b - c + d = 4'c$. Tillige bliver $a - b = 2('b + 'c)$; $a - c = 2('a + 'c)$; $a - d = 2('a + 'b)$; $b - c = 2('a - 'b)$; $b - d = 2('a - 'c)$ og $c - d = 2('b - 'c)$. Ved Indsættelsen af disse Værdier findes $q = -\frac{2'b'c}{'a}$ og $\frac{'a - a''}{'n - n''} = \frac{2('b + 'c)('a^2 - 'b'c)}{'a}$. Vi have saaledes Ligningen $a^2 - \frac{2'b'c}{'a}a = -\frac{1}{2}\beta + \frac{2('b + 'c)('a^2 - 'b'c)}{'a}$ (I). Ombyttes heri b og c, følgeligen ogsaa $'a$ og $'b$, bliver $a^2 - \frac{2'a'c}{'b}a = -\frac{1}{2}\beta + \frac{2('a + 'c)('b^2 - 'a'c)}{'b}$ (II), og ombyttes atter heri c og d, altsaa tillige $'b$ og $'c$, findes $a^2 - \frac{2'a'b}{'c}a = -\frac{1}{2}\beta + \frac{2('a + 'b)('c^2 - 'a'b)}{'c}$ (III).

Tages nu Forskjellen imellem tvende af disse Ligninger, hvilkesomhelst, udledes deraf at $a = 'a + 'b + 'c$. Det samme Resultat vilde ogsaa være udbragt ved at tage $\mathrm{I} + b \,.\, \mathrm{II} + b^2 \,.\, \mathrm{III}$ eller $\mathrm{I} + b^2 \,.\, \mathrm{II} + b \,.\, \mathrm{III}$.

Behandles Ligningerne for b, c og d paa samme Maade, findes $b = 'a - 'b - 'c$; $c = -'a + 'b - 'c$ og $d = -'a - 'b + 'c$. Opløsningen bliver for Resten den samme som tilforn.

V. Om de bestemte Bogstav-Ligninger af 5^{te} Grad.

§. 52.

For af den almindelige Ligning af 5^{te} Grad $a^5 + \alpha a^4 + \beta a^3 + \gamma a^2 + \delta a + \varepsilon = o$, hvis Rødder ere a, b, c, d og e, at bortskaffe det 2^{det} Led, sættes, efter §. 18, $a = \dot{a} - \frac{1}{5}\alpha$ og vi faae da $\dot{a}^5 - (\frac{2}{5}\alpha^2 - \beta)\dot{a}^3 + (\frac{4}{25}\alpha^3 - \frac{3}{5}\alpha\beta + \gamma)\dot{a}^2 - (\frac{3}{125}\alpha^4 - \frac{3}{25}\alpha^2\beta + \frac{2}{5}\alpha\gamma - \delta)\dot{a} + \frac{4}{3125}\alpha^5 - \frac{1}{125}\alpha^3\beta + \frac{1}{25}\alpha^2\gamma - \frac{1}{5}\alpha\delta + \varepsilon = o$ eller, for Kortheds Skyld, $\dot{a}^5 + \dot{\beta}\dot{\alpha}^3 + \dot{\gamma}\dot{\alpha}^2 + \dot{\delta}\dot{\alpha} + \dot{\varepsilon} = o$, hvis Rødder ere $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$, $\dot{d}$ og $\dot{e}$. Vi ville imidlertid i det Følgende betjene os af den simplere Betegning $a^5 + \beta a^3 + \gamma a^2 + \delta a + \varepsilon = o$ og blot erindre at om α beholdes, maae $-\frac{2}{5}\alpha^2 + \beta$ sættes for β, $\frac{4}{25}\alpha^3 - \frac{3}{5}\alpha\beta + \gamma$ for γ, $-\frac{3}{125}\alpha^4 + \frac{3}{25}\alpha^2\beta - \frac{2}{5}\alpha\gamma + \delta$ for δ og $\frac{4}{3125}\alpha^5 - \frac{1}{125}\alpha^3\beta + \frac{1}{25}\alpha^2\gamma - \frac{1}{5}\alpha\delta + \varepsilon$ for ε.

For denne Ligning bliver dernæst

$$'A = 5a^4 + 3\beta a^2 + 2\gamma a + \delta = (a-b)(a-c)(a-d)(a-e)$$
$$'B = 5b^4 + 3\beta b^2 + 2\gamma b + \delta = (b-a)(b-c)(b-d)(b-e)$$
$$'C = 5c^4 + 3\beta c^2 + 2\gamma c + \delta = (c-a)(c-b)(c-d)(c-e)$$
$$'D = 5d^4 + 3\beta d^2 + 2\gamma d + \delta = (d-a)(d-b)(d-c)(d-e)$$
$$'E = 5e^4 + 3\beta e^2 + 2\gamma e + \delta = (e-a)(e-b)(e-c)(e-d)$$

hvoraf

$$'A + 'B + 'C + 'D + 'E = 5A^4 + 3\beta A^2 + 2\gamma A + 5\delta = 4\beta^2 - 15\delta.$$

Da videre

$$'A^2 = 25a^8 + 30\beta a^6 + 20\gamma a^5 + (9\beta^2 + 10\delta)a^4 + 12\beta\gamma a^3 + (4\gamma^2 + 6\beta\delta)a^2 + 4\gamma\delta a + \delta^2$$
$$= (4\beta^2 - 15\delta)a^4 + (12\beta\gamma - 25\varepsilon)a^3 + (9\gamma^2 + \beta\delta)a^2 + (9\gamma\delta - 5\beta\varepsilon)a + \delta^2 + 5\gamma\varepsilon$$

bliver

$$'A^2 + 'B^2 + 'C^2 + 'D^2 + 'E^2 = (4\beta^2 - 15\delta)A^4 + (12\beta\gamma - 25\varepsilon)A^3 + (9\gamma^2 + \beta\delta)A^2$$
$$+ (9\gamma\delta - 5\beta\varepsilon)A + 5\delta^2 + 25\gamma\varepsilon = 8\beta^4 - 54\beta\gamma^2 - 48\beta^2\delta + 65\delta^2 + 100\gamma\varepsilon.$$

Ved lignende Fremgangs-Maade findes

$$'A^3 + 'B^3 + 'C^3 + 'D^3 + 'E^3 = 16\beta^6 - 312\beta^3\gamma^2 + 81\gamma^4 - 144\beta^4\delta + 864\beta\gamma^2\delta$$
$$+ 384\beta^2\delta^2 - 255\delta^3 + 720\beta^2\gamma\varepsilon - 1350\gamma\delta\varepsilon - 375\beta\varepsilon.$$

$$'A^4 + 'B^4 + 'C^4 + 'D^4 + 'E^4 = 32\beta^8 - 1232\beta^5\gamma^2 + 1890\beta^2\gamma^4 - 384\beta^6\delta$$
$$+ 6960\beta^3\gamma^2\delta - 1620\gamma^4\delta + 1600\beta^4\delta^2 - 8640\beta\gamma^2\delta^2 - 2560\beta^2\delta^3 + 1025\delta^4$$
$$+ 3040\beta^4\gamma\varepsilon - 5400\beta\gamma^3\varepsilon - 14400\beta^2\gamma\delta\varepsilon + 11000\gamma\delta^2\varepsilon - 2000\beta^3\varepsilon^2 + 5000\gamma^2\varepsilon^2$$
$$+ 7500\beta\delta\varepsilon^2.$$

$$'A^5 + 'B^5 + 'C^5 + 'D^5 + 'E^5 = 64\beta^{10} - 4080\beta^7\gamma^2 + 15660\beta^4\gamma^4 - 3645\beta\gamma^6$$
$$- 960\beta^8\delta + 35040\beta^5\gamma^2\delta - 50220\beta^2\gamma^4\delta + 5440\beta^6\delta^2 - 92160\beta^3\gamma^2\delta^2 + 19440\gamma^4\delta^2$$
$$- 14080\beta^4\delta^3 + 69120\beta\gamma^2\delta^3 + 15360\beta^2\delta^4 - 4095\delta^5 + 10400\beta^6\gamma\varepsilon - 58320\beta^3\gamma^3\varepsilon$$
$$+ 7290\gamma^5\varepsilon - 80160\beta^4\gamma\delta\varepsilon + 129600\beta\gamma^3\delta\varepsilon + 172800\beta^2\gamma\delta^2\varepsilon - 74250\gamma\delta^3\varepsilon - 6960\beta^5\varepsilon^2$$
$$+ 81000\beta^2\gamma^2\varepsilon^2 + 48000\beta^3\delta\varepsilon^2 - 101250\gamma^2\delta\varepsilon^2 - 80625\beta\delta^2\varepsilon^2 - 50000\beta\gamma\varepsilon^3 + 31250\varepsilon^4$$

Heraf findes

$$'\alpha = -4\beta^2 + 15\delta;\ '\beta = 4\beta^4 + 27\beta\gamma^2 - 36\beta^2\delta + 80\delta^2 - 50\gamma\varepsilon;$$
$$'\gamma = -4\beta^3\gamma^2 - 27\gamma^4 + 12\beta^4\delta + 117\beta\gamma^2\delta - 88\beta^2\delta^2 + 160\delta^3 - 40\beta^2\gamma\varepsilon - 300\gamma\delta\varepsilon$$
$$+ 125\beta\varepsilon;\ '\delta = 0;$$
$$'\varepsilon = 4\beta^3\gamma^2\delta^2 + 27\gamma^4\delta^2 - 16\beta^4\delta - 144\beta\gamma^2\delta^3 + 128\beta^2\delta^4 - 256\delta^5 - (16\beta^3\gamma^3 + 108\gamma^5$$
$$- 72\beta^4\gamma\delta - 630\beta\gamma^3\delta + 560\beta^2\gamma\delta^2 - 1600\gamma\delta^3)\varepsilon - (108\beta^5 + 825\beta^2\gamma^2 - 900\beta^3\delta$$
$$+ 2250\gamma^2\delta + 2000\beta\delta^2)\varepsilon^2 + 3750\beta\gamma\varepsilon^3 - 3125\varepsilon^4.$$

Ligningen for $'A$, $'B$, $'C$, $'D$ og $'E$ bliver derfor

$$'A^5 - (4\beta^2 - 15\delta)\,'A^4 + (4\beta^3 + 27\beta\gamma^2 - 36\beta^2\delta + 80\delta^2 - 50\gamma\varepsilon)\,'A^3 - (4\beta^3\gamma^3 + 27\gamma^4 - 12\beta^4\delta - 117\beta\gamma^2\delta + 88\beta^2\delta^2 - 160\delta^3 + 40\beta^2\gamma\varepsilon + 300\gamma\delta\varepsilon - 125\beta\varepsilon^2)\,'A^2 + 4\beta^3\gamma^2\delta^2 + 27\gamma^4\delta^2 - 16\beta^4\delta - 144\beta\gamma^2\delta^3 + 128\beta^2\delta^4 - 256\delta^5 - (16\beta^3\gamma^3 + 108\gamma^4 - 72\beta^4\gamma\delta - 630\beta\gamma^3\delta + 560\beta^2\gamma\delta^2 - 1600\gamma\delta^3)\,\varepsilon - (108\beta^5 + 825\beta^2\gamma^2 - 900\beta^3\delta + 2250\gamma^2\delta + 2000\beta\delta^2)\,\varepsilon^2 + 3750\beta\gamma\varepsilon^3 - 3125\varepsilon^4 = o.$$

Heraf følger at Betingelsen for tvende Rødders Ligestorhed i Ligningen af 5te Grad er den at $'\varepsilon = o$ og denne Function maae derfor i de almindelige Udtryk for Ligningens Rødder findes paa en saadan Maade at naar den bliver $= o$, tvende Rødder da blive ligestore. Da dernæst $'\varepsilon = (a-b)^2\,(a-c)^2\,(a-d)^2\,(a-e)^2\,(b-c)^2\,(b-d)^2\,(b-e)^2\,(c-d)^2\,(c-e)^2\,(d-e)^2$, bliver omvendt $'\varepsilon = o$ naar Ligningen har ligestore Rødder.

Ere tvende Rødder, f. Ex. d og e, ligestore, da er, efter §. 15, baade $d^5 + \beta d^3 + \gamma d^2 + \delta d + \varepsilon = o$ og $5d^4 + 3\beta d^2 + 2\gamma d + \delta = o$. Heraf udledes ved Additions- og Subtractions-Methoden at $d = e = (4\beta^3\gamma\delta + 27\gamma^3\delta - 48\beta\gamma\delta^2 - 36\beta^4\varepsilon - 195\beta\gamma^2\varepsilon + 260\beta^2\delta\varepsilon - 400\delta^2\varepsilon + 375\gamma\varepsilon^2) : 2'\gamma$. De andre Rødder a, b og c indeholdes dernæst, efter samme Paragraph, i Ligningen $a^3 + 2\,da^2 + (3\,d^2 + \beta)\,a + 4\,d^3 + 2\beta d + \gamma = o$.

§. 53.

For Ligningen $a^5 + \beta a^3 + \gamma a^2 + \delta a + \varepsilon = o$ er videre

$$''A = 10a^3 + 3\beta a + \gamma = (a-b)(a-c)(a-d) + (a-b)(a-c)(a-e) + (a-b)(a-d)(a-e) + (a-c)(a-d)(a-e)$$

$$''B = 10b^3 + 3\beta b + \gamma = (b-a)(b-c)(b-d) + (b-a)(b-c)(b-e) + (b-a)(b-d)(b-e) + (b-c)(b-d)(b-e)$$

$$''C = 10c^3 + 3\beta c + \gamma = (c-a)(c-b)(c-d) + (c-a)(c-b)(c-e) + (c-a)(c-d)(c-e) + (c-b)(c-d)(c-e)$$

$$''D = 10d^3 + 3\beta d + \gamma = (d-a)(d-b)(d-c) + (d-a)(d-b)(d-e) + (d-a)(d-c)(d-e) + (d-b)(d-c)(d-e)$$

$$''E = 10d^3 + 3\beta o + \gamma = (e-a)(e-b)(e-c) + (e-a)(e-b)(e-d) + (e-a)(e-c)(e-d) + (e-b)(e-c)(e-d)$$

altsaa

$$''A + ''B + ''C + ''D + ''E = 10A^3 + 3\beta A + 5\gamma = -25\gamma$$ og da

$$''A^2 = 100a^6 + 60\beta a^4 + 20\gamma a^3 + 9\beta a^2 + 6\beta\gamma\alpha + \gamma^2 = -40\beta a^4 - 80\gamma a^3 + (9\beta^2 - 100\delta)\,a^2 + (6\beta\gamma - 100\varepsilon)\,a + \gamma^2$$ bliver

$$''A^2 + ''B^2 + ''C^2 + ''D^2 + ''E^2 = -40\beta A^4 - 80\gamma A^3 + (9\beta^2 - 100\delta)\,A^2 + (6\beta\gamma - 100\varepsilon)\,A + 5\gamma^2 = -98\beta^3 + 245\gamma^2 + 360\beta\delta.$$

Paa lignende Maade findes

$$''A^3 + ''B^3 + ''C^3 + ''D^3 + ''E^3 = 3675\beta^3\gamma - 2185\gamma^3 - 10620\beta\gamma\delta - 4050\beta^2\varepsilon + 9000\delta\varepsilon$$

$${}''A^4 + {}''B^4 + {}''C^4 + {}''D^4 + {}''E^4 = 4802\beta^6 - 84672\beta^3\gamma^2 + 19685\gamma^4 - 37044\beta^4\delta + 195360\beta\gamma^2\delta + 81600\beta^2\delta^2 - 40000\delta^3 + 147000\beta^2\gamma\varepsilon - 204000\gamma\delta\varepsilon - 60000\beta\varepsilon^2$$

$${}''A^5 + {}''B^5 + {}''C^5 + {}''D^5 + {}''E^5 = -300125\beta^6\gamma + 1547910\beta^3\gamma^3 - 177145\gamma^5 + 2027130\beta^4\gamma\delta - 2963400\beta\gamma^3\delta - 3732000\beta^2\gamma\delta^2 + 1300000\delta^3 + 324135\beta^5\varepsilon - 3364500\beta^2\gamma^2\varepsilon - 1887000\beta^3\delta\varepsilon + 3390000\gamma^2\delta\varepsilon + 2550000\beta\delta^2\varepsilon + 2250000\beta\gamma\varepsilon^2 - 50000\varepsilon^3$$

som giver os

$${}''\alpha = 25\gamma;\ {}''\beta = 49\beta^3 + 190\gamma^2 - 180\beta\delta;\ {}''\gamma = 270\gamma^3 - 960\beta\gamma\delta + 1350\beta^2\varepsilon - 3000\delta\varepsilon;\ {}''\delta = -147\beta^3\gamma^2 - 1215\gamma^4 + 441\beta^4\delta + 5460\beta\gamma^2\delta - 4200\beta^2\delta^2 + 10000\delta^3 - 3000\beta^2\gamma\varepsilon - 24000\gamma\delta\varepsilon + 15000\beta\varepsilon^2;\ {}''\varepsilon = 98\beta^3\gamma^2 + 729\gamma^6 - 441\beta^4\gamma\delta - 4320\beta\gamma^3\delta + 4200\beta^2\gamma\delta^2 - 10000\gamma\delta^3 + (1323\beta^5 + 10650\beta^2\gamma^2 - 12600\beta^3\delta + 27000\gamma^2\delta + 30000\beta\delta^2)\varepsilon - 75000\beta\gamma\varepsilon^2 + 100000\varepsilon^3.$$

Ligningen for ${}''A$, ${}''B$, ${}''C$, ${}''D$ og ${}''E$ bliver derfor

$${}''A^5 + 25\gamma\,{}''A^4 + (49\beta^3 + 190\gamma^2 - 180\beta\delta)\,{}''A^3 + (270\gamma^3 - 960\beta\gamma\delta + 1350\beta^2\varepsilon - 3000\delta\varepsilon)\,{}''A^2 - (147\beta^3\gamma^2 + 1215\gamma^4 - 441\beta^4\delta - 5460\beta\gamma^2\delta + 4200\beta^2\delta^2 - 10000\delta^3 + 3000\beta^2\gamma\varepsilon + 24000\gamma\delta\varepsilon - 15000\beta\varepsilon^2)\,{}''A + 98\beta^3\gamma^2 + 729\gamma^6 - 441\beta^4\gamma\delta - 4320\beta\gamma^3\delta + 4200\beta^2\gamma\delta^2 - 10000\gamma\delta^3 + (1323\beta^5 + 10650\beta^2\gamma^2 - 12600\beta^3\delta + 27000\gamma^2\delta + 30000\beta\delta^2)\varepsilon - 75000\beta\gamma\varepsilon^2 + 100000\varepsilon^3 = 0.$$

§. 54.

Endeligen er

$${}'''A = 10a^2 + \beta = (a-b)(a-c) + (a-b)(a-d) + (a-b)(a-e) + (a-c)(a-d) + (a-c)(a-e) + (a-d)(a-e)$$
$${}'''B = 10b^2 + \beta = (b-a)(b-c) + (b-a)(b-d) + (b-a)(b-e) + (b-c)(b-d) + (b-c)(b-e) + (b-d)(b-e)$$
$${}'''C = 10c^2 + \beta = (c-a)(c-b) + (c-a)(c-d) + (c-a)(c-e) + (c-b)(c-d) + (c-b)(c-e) + (c-d)(c-e)$$
$${}'''D = 10d^2 + \beta = (d-a)(d-b) + (d-a)(d-c) + (d-a)(d-e) + (d-b)(d-c) + (d-b)(d-e) + (d-c)(d-e)$$
$${}'''E = 10e^2 + \beta = (e-a)(e-b) + (e-a)(e-c) + (e-a)(e-d) + (e-b)(e-c) + (e-b)(e-d) + (e-c)(e-d)$$

altsaa

$${}'''A + {}'''B + {}'''C + {}'''D + {}'''E = 10A^2 + 5\beta = -15\beta$$
$${}'''A^2 + {}'''B^2 + {}'''C^2 + {}'''D^2 + {}'''E^2 = 100A^4 + 20\beta A^2 + 5\beta^2 = 165\beta^2 - 400\delta.$$

Da dernæst

$${}'''A^3 = 1000a^6 + 300\beta a^4 + 30\beta^2 a^2 + \beta^3 = -700\beta a^4 - 1000\gamma a^3 + 30\beta^2 a^2 - 1000\delta a^2 - 1000\varepsilon a + \beta^3,$$ bliver

$$'''A^3 + '''B^3 + '''C^3 + '''D^3 + '''E^3 = -700\beta A^4 - 1000\gamma A^3 + 30\beta^2 A^2 - 1000\delta A^2 - 1000\varepsilon A + 5\beta^3 = -1455\beta^3 + 3000\gamma^2 + 4800\beta\delta.$$

Paa lignende Maade findes

$$'''A^4 + '''B^4 + '''C^4 + '''D^4 + '''E^4 = 13125\beta^4 - 68000\beta\gamma^2 + 58400\beta^2\delta + 40000\delta^2 + 80000\gamma\varepsilon$$

$$'''A^5 + '''B^5 + '''C^5 + '''D^5 + '''E^5 = -118095\beta^5 + 1130000\beta^2\gamma^2 + 656000\beta^3\delta - 1000000\gamma^2\delta - 800000\beta\delta^2 - 1600000\beta\gamma\varepsilon + 500000\varepsilon^2$$

som giver os

$$'''\alpha = 15\beta;\ '''\beta = 30\beta^2 + 200\delta;\ '''\gamma = -190\beta^3 - 1000\gamma^2 + 1400\beta\delta;\ '''\delta = 225\beta^4 + 2000\beta\gamma^2 - 3400\beta^2\delta + 10000\delta^2 - 20000\gamma\varepsilon;\ '''\varepsilon = -81\beta^5 - 1000\beta^2\gamma^2 + 1800\beta^3\delta - 10000\beta\delta^2 + 20000\beta\gamma\varepsilon - 100000\varepsilon^2;$$

Ligningen for $'''A$, $'''B$, $'''C$, $'''D$ og $'''E$ bliver derfor

$$'''A^5 + 15\beta\ '''A^4 + (30\beta^2 + 200\delta)\ '''A^3 - (190\beta^3 + 1000\gamma^2 - 1400\beta\delta)\ '''A^2 + (225\beta^4 + 2000\beta\gamma^2 - 3400\beta^2\delta + 10000\delta^2 - 20000\gamma\varepsilon)\ '''A - 81\beta^5 - 1000\beta^2\gamma^2 + 1800\beta^3\delta - 10000\beta\delta^2 + 20000\beta\gamma\varepsilon - 100000\varepsilon^2 = o.$$

§. 55.

Ere 2 og 2 Rødder ligestore, f. Ex. $b = c$ og $d = e$, bliver $'A = (a-b)^2(a-d)^2$ og $'B = 'C = 'D = 'E = o$, altsaa $'\beta = '\gamma = '\varepsilon = o$. Ligningerne i de tvende foregaaende Paragrapher kunne i dette Tilfælde ikke anvendes. Vi ville nu undersøge om Antagelsen af de tvende simpleste af de fundne Ligninger, nemlig $'\beta = o$ og $'\gamma = o$, har 2 og 2 Rødders Ligestorhed til Følge; men for at lette Undersøgelsen sættes $\beta = o$. Derved faae vi $8\delta^2 - 5\gamma\varepsilon = o$ og $-27\gamma^4 + 160\delta^3 - 300\gamma\delta\varepsilon = o$, som giver os $\delta = -\frac{3}{4}\gamma\sqrt[3]{\frac{1}{5}\gamma}$ og $\varepsilon = \frac{9}{10}\gamma\sqrt[3]{\frac{1}{25}\gamma^2}$. Ligningen bliver derfor $a^5 + \gamma a^2 - \frac{3}{4}\gamma a\sqrt{\frac{1}{5}\gamma} + \frac{9}{10}\gamma\sqrt[3]{\frac{1}{25}\gamma^2} = o$. Men skal denne fyldestgjøre den opgivne Betingelse, bliver $A = a + 2b + 2d = o$; $A^2 = a^2 + 2b^2 + 2d^2 = o$ og $A^3 = a^3 + 2b^3 + 2d^3 = -3\gamma$. Af den 1ste af disse Ligninger findes $a = -2(b + d)$, som indsat i den 2den giver $d = \frac{-2 \pm \sqrt{-5}}{3}b$, altsaa $a = \frac{-2 \mp 2\sqrt{-5}}{3}b$, og ved at indsætte begge disse Værdier i den 3die, findes, efter behørig Reduction, $b = \frac{1 \mp \sqrt{-5}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{5}\gamma}$, hvoraf igjen udledes at $d = \frac{1 \pm \sqrt{-5}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{5}\gamma}$ og $a = -2\sqrt[3]{\frac{1}{5}\gamma}$. Da dernæst $(a+2\sqrt[3]{\tfrac{1}{5}\gamma})\left(a-\frac{1\mp\sqrt{-5}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{5}\gamma}\right)^2\left(a-\frac{1\pm\sqrt{-5}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{5}\gamma}\right)^2=(a+2\sqrt[3]{\tfrac{1}{5}\gamma})$ $(a^2-a\sqrt[3]{\tfrac{1}{5}\gamma}+\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{25}\gamma^2})^2=(a+2\sqrt[3]{\tfrac{1}{5}\gamma})(a^4+2a^3\sqrt[3]{\tfrac{1}{5}\gamma}+4a^2\sqrt[3]{\tfrac{1}{25}\gamma^2}-\tfrac{3}{5}\gamma a+\tfrac{9}{10}\gamma\sqrt[3]{\tfrac{1}{5}\gamma})$ $=a^5+\gamma a^2-\tfrac{3}{4}\gamma a\sqrt[3]{\tfrac{1}{5}\gamma}+\tfrac{9}{10}\gamma\sqrt[3]{\tfrac{1}{25}\gamma^2}=0$, følger heraf at naar $'\beta=0$ og $'\gamma=0$, maae Ligningen have 2 og 2 Rødder ligestore. Tillige bliver $'\varepsilon=0$.

§. 56.

Ere trende Rødder ligestore, f. Ex. $c=d=e$, da bliver $'\mathbf{A}=(a-b)(a-c)^3$; $'\mathbf{B}=-(a-b)(b-c)^3$; $'\mathbf{C}='\mathbf{D}='\mathbf{E}=0$, altsaa $'\gamma=0$ og $'\varepsilon=0$. Ligeledes bliver $''\mathbf{A}=3(a-b)(a-c)^2+(a-c)^3$; $''\mathbf{B}=-3(a-b)(b-c)^3+(b-c)^3$; $''\mathbf{C}=''\mathbf{D}=''\mathbf{E}=0$, altsaa $''\gamma=0$, $''\delta=0$ og $''\varepsilon=0$. Ligningen i §. 54 kan her ikke anvendes. De tvende simpleste Betingelser for trende Rødders Ligestorhed er derfor $'\gamma=0$ og $''\gamma=0$, det er, naar β igjen sættes $=0$, $-27\gamma^4+160\delta^3-300\gamma\delta\varepsilon=0$ og $9\gamma^3-100\delta\varepsilon=0$. Heraf findes $\delta=\tfrac{3}{2}\gamma\sqrt[3]{\tfrac{1}{10}\gamma}$ og $\varepsilon=\tfrac{3}{5}\gamma\sqrt[3]{\tfrac{1}{100}\gamma^2}$, og Ligningen bliver følgeligen $a^5+\gamma a^2+\tfrac{3}{2}\gamma a\sqrt[3]{\tfrac{1}{10}\gamma}+\tfrac{3}{5}\gamma\sqrt[3]{\tfrac{1}{100}\gamma^2}=0$. Skal nu denne have 3 ligestore Rødder, bliver $A=a+b+3c=0$; $A^2=a^2+b^2+3c^2=0$ og $A^3=a^3+b^3+3c^3=-3\gamma$. Af den 1ste af disse Ligninger findes $c=-\tfrac{1}{3}(a+b)$, som indsat i den 2den giver $b=\frac{-1\pm\sqrt{-15}}{4}a$, hvoraf igjen $c=\frac{-3\mp\sqrt{-15}}{12}a$. Ved Indsættelsen af begge disse Værdier i den 3die Ligning, findes, efter behørig Reduction, $a=\frac{3\mp\sqrt{-15}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{10}\gamma}$, altsaa $b=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{10}\gamma}$ og $c=-\sqrt[3]{\tfrac{1}{10}\gamma}$. Da dernæst $\left(a-\frac{3\mp\sqrt{-15}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{10}\gamma}\right)\left(a-\frac{3\pm\sqrt{-15}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{10}\gamma}\right)(c+\sqrt[3]{\tfrac{1}{10}\gamma})^3$ $=a^5+\gamma a^2+\tfrac{3}{2}\gamma a\sqrt[3]{\tfrac{1}{10}\gamma}+\tfrac{3}{5}\gamma\sqrt[3]{\tfrac{1}{100}\gamma^2}=0$, sees heraf at naar $'\gamma=0$ og $''\gamma=0$, maae Ligningen have 3 ligestore Rødder.

Af Antagelsen følger tillige; efter §. 16, at $c^5+\gamma c^2+\delta c+\varepsilon=0$; $5c^4+2\gamma c+\delta=0$ og $10c^3+\gamma=0$. Af den 1ste og 3die af disse Ligninger udledes dernæst paa sædvanlig Maade at $c=\frac{81\gamma^3+10\delta\varepsilon}{9\gamma\varepsilon-10\delta^2}$. Af den 2den og 3die findes $c=-\frac{2\delta}{3\gamma}$, og da endeligen $5(c^5+\gamma c^2+\delta c^2+\varepsilon)-3(5c^5+2\gamma c^2+\delta c)+10c^5+\gamma c^2=0$, giver det os

$c = -\frac{5\varepsilon}{2\delta}$. Da videre, efter §. 16, Ligningen for a og b er $a^2 + 3c + 6c^2 = 0$, udledes heraf, efter §. 12, at $a^3 + b^3 = 27c^3$; $a^4 + b^4 = -63c^4$ og $a^5 + b^5 = 27c^5$, altsaa $A^3 = a^3 + b^3 + 3c^3 = 30c^3 = -3\gamma$; $A^4 = a^4 + b^4 + 3c^4 = -60c^4 = -4\delta$ og $A^5 = a^5 + b^5 + 3c^5 = 30c^5 = -5\varepsilon$; hvilket giver os $\gamma = -10c^3$; $\delta = 15c^4$ og $\varepsilon = -6c^5$. Ligningen for 3 ligestore Rødder kan derfor ogsaa udtrykkes saaledes $a^5 - 10c^3a^2 + 15c^4a - 6c^5 = 0$, hvor vi for c kunne tage hvilken af de 3 ovenfor bestemte Værdier vi ville. I Begyndelsen af Paragraphet er c taget $= \sqrt[3]{\frac{1}{10}\gamma}$, som udledes af Ligningen $10c^3 + \gamma = 0$.

Beholdes β, bliver Ligningen for 3 ligestore Rødder denne: $a^5 + \beta a^3 - (10c^3 + 3\beta c)a^2 + (15c^4 + 3\beta c^2)a - 6c^5 - \beta c^3 = 0$, hvilket paa en lignende Maade er udledet. For β og c kunne vi sætte hvilkesomhelst Tal.

§. 57.

Ere 4 Rødder ligestore, f. Ex. $b = c = d = e$, bliver $'A = (a - b)^4$; $'B = 'C = 'D = 'E = 0$, altsaa $'\beta = '\gamma = '\varepsilon = 0$. Ligeledes bliver $''A = 4(a - b)^3$; $''B = ''C = ''D = ''E = 0$, altsaa $''\beta = ''\gamma = ''\delta = ''\varepsilon = 0$. Videre er $'''A = 6(a - b)^2$; $'''B = '''C = '''D = '''E = 0$ og derfor $'''\beta = '''\gamma = '''\delta = '''\varepsilon = 0$. De 3 simpleste Betingelser for 4 Rødders Ligestorhed blive følgeligen $'\beta = 0$; $''\beta = 0$ og $'''\beta = 0$ det er $4\beta^4 + 27\beta\gamma^2 - 36\beta^2\delta + 80\delta^2 - 50\gamma\varepsilon = 0$; $49\beta^3 + 190\gamma^2 - 180\beta\delta = 0$ og $30\beta^2 + 200\delta = 0$, af hvilke findes $\gamma = \pm 2\beta\sqrt{-\frac{1}{10}\beta}$; $\delta = -\frac{3}{20}\beta^2$ og $\varepsilon = \mp \frac{1}{25}\beta^2\sqrt{-\frac{1}{10}\beta}$. Ligningen bliver altsaa $a^5 + \beta a^3 \pm 2\beta a^2\sqrt{-\frac{1}{10}\beta} - \frac{3}{20}\beta^2 a \mp \frac{1}{25}\beta^2\sqrt{-\frac{1}{10}\beta} = 0$. Men skal denne have 4 ligestore Rødder, er $A = a + 4b = 0$ og $A^2 = a^2 + 4b^2 = -2\beta$, hvoraf udledes at $a = \pm 4\sqrt{-\frac{1}{10}\beta}$ og $b = \mp\sqrt{-\frac{1}{10}\beta}$. Da dernæst $(a \mp 4\sqrt{-\frac{1}{10}\beta})(a \pm \sqrt{-\frac{1}{10}\beta})^4 = a^5 + \beta a^3 \pm 2\beta a^2\sqrt{-\frac{1}{10}\beta} - \frac{3}{20}\beta^2 a \mp \frac{1}{25}\beta^2\sqrt{-\frac{1}{10}\beta} = 0$, sees at Ligningen nødvendigen maae have 4 ligestore Rødder naar $'\beta = 0$; $''\beta = 0$ og $'''\beta = 0$.

I det opgivne Tilfælde er tillige, efter §. 17, $b^5 + \beta b^3 + \gamma b^2 + \delta b + \varepsilon = 0$; $5b^4 + 3\beta b^2 + 2\gamma b + \delta = 0$; $10b^3 + 3\beta b + \gamma = 0$ og $10b^2 + \beta = 0$. Ved disse Ligningers Sammenligning kunne forskjellige Værdier for 6 udfindes, af hvilke vi dog her blot ville anføre dem der fremkomme af 1ste og 4de, af 2den og 4de samt af 3die og 4de Ligning. Derved findes nemlig $b = \frac{-10\beta\gamma + 100\varepsilon}{9\beta^2 - 100\delta}$; $b = \frac{-\beta^2 + 4\delta}{2\gamma}$ og $b = -\frac{\gamma}{2\beta}$.

Da dernæst $a = -4b$, bliver $A^2 = a^2 + 4b^2 = 20b^2 = -2\beta$; $A^3 = a^3 + 4b^3 = -60b^3 = -3\gamma$; $A^4 = a^4 + 4b^4 = 260b^4 = 2\beta^2 - 4\delta$ og $A^5 = a^5 + 4b^5 = -1020b^5 = 5\beta\gamma - 5\varepsilon$, hvoraf udledes at $\beta = -10b^2$; $\gamma = 20b^3$; $\delta = -15b^4$ og $\varepsilon = 4b^5$. Ligningen for 4 ligestore Rødder kan derfor ogsaa udtrykkes paa denne Maade: $a^5 - 10b^2a^3 + 20b^3a^2 - 15b^4a + 4b^5 = o$, hvor vi for b kan tage hvilken af de ovenfor fundne Værdier vi ville, eller overhovedet hvilketsomhelst Tal. I Begyndelsen af Paragraphet er b antaget $= \mp\sqrt{-\tfrac{1}{10}\beta}$, som udledes af den 4de ovenfor anførte Ligning $10b^2 + \beta = o$.

§. 58.

Ere i Ligningen af 5te Grad først 2 Rødder ligestore og dernæst de trende øvrige, f. Ex. $a = b$ og $c = d = e$, da bliver $'A = 'B = 'C = 'D = 'E = o$, altsaa $'\alpha = '\beta = '\gamma = '\varepsilon = o$. Ligeledes bliver $''A = ''B = (a-c)^3$ og $''C = ''D = ''E = o$, altsaa $''\beta = \tfrac{1}{4}''\alpha^2$ og $''\gamma = ''\delta = ''\varepsilon = o$. Ligningen i §. 54 kan her ikke anvendes. De 3 simpleste Betingelser for det antagne Tilfælde blive da disse: $'\alpha = o$; $'\beta = o$ og $''\beta = \tfrac{1}{4}''\alpha$, det er $-4\beta^2 + 15\delta = o$; $4\beta^4 + 27\beta\gamma^2 - 36\beta^2\delta + 80\delta^2 - 50\gamma\varepsilon = o$ og $49\beta^3 + 190\gamma^2 - 180\beta\delta = \tfrac{625}{4}\gamma^2$, hvoraf $\gamma = \pm\tfrac{2}{3}\beta\sqrt{-\tfrac{1}{15}\beta}$; $\delta = \tfrac{4}{15}\beta^2$ og $\varepsilon = \pm\tfrac{8}{25}\beta^2\sqrt{-\tfrac{1}{15}\beta}$. Ligningen bliver derfor $a^5 + \beta a^3 \pm \tfrac{2}{3}\beta a^2\sqrt{-\tfrac{1}{15}\beta} + \tfrac{4}{15}\beta^2 a \pm \tfrac{8}{25}\beta^2\sqrt{-\tfrac{1}{15}\beta} = o$. Skal nu denne fyldestgjøre Antagelsen, bliver $A = 2a + 3c = o$ og $A^2 = 2a^2 + 3c^2 = -2\beta$, hvoraf udledes at $a = \pm 3\sqrt{-\tfrac{1}{15}\beta}$ og $c = \mp 2\sqrt{-\tfrac{1}{15}\beta}$. Da dernæst $(a \mp 3\sqrt{-\tfrac{1}{15}\beta})^2(a \pm 2\sqrt{-\tfrac{1}{15}})^3 = a^5 + \beta a^3 \pm \tfrac{2}{2}\beta a^2\sqrt{-\tfrac{1}{15}\beta} + \tfrac{4}{15}\beta^2 a \pm \tfrac{8}{25}\beta^2\sqrt{-\tfrac{1}{15}} = o$, følger heraf at naar $'\alpha = o$; $'\beta = o$ og $''\beta = \tfrac{1}{4}''\alpha^2$, maae Ligningen nødvendigen have den opgivne Egenskab.

Da $c = d = e$, bliver, efter §. 16, $c^5 + \beta c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \varepsilon = o$; $5c^4 + 3\beta c^2 + 2\gamma c + \delta = o$ og $10c^3 + 3\beta c + \gamma = o$. Tillige indeholder, efter samme Paragraph, $a^2 + 3ca + 6c^2 + \beta = o$ de øvige tvende Rødder, og da disse ogsaa skulle være ligestore, findes deraf, efter §. 24, at $15c^2 + 4\beta = o$. Af disse 4 Ligninger kunne forskjellige Værdier for c udledes, af hvilke vi her dog blot ville anføre dem, der forekomme ved at sammenligne de 3 første Ligninger med den sidste. Deraf findes nemlig $c = \dfrac{-15(4\beta\gamma - 15\varepsilon)}{44\beta^2 - 225d}$; $c = \dfrac{4\beta^2 - 9\delta}{18\gamma}$ og $c = -\dfrac{3\gamma}{\beta}$.

I Følge Antagelsen bliver $a = -\tfrac{3}{2}c$, altsaa $A^2 = 2a^2 + 3c^2 = \tfrac{15}{2}c^2 = -2\beta$; $A^3 = 2a^3 + 3c^3 = -\tfrac{15}{4}c^3 = -3\gamma$; $A^4 = 2a^4 + 3c^4 = \tfrac{105}{8}c^4 = 2\beta^2 - 4\delta$ og $A^5 = 2a^5 + 3c^5 = -\tfrac{195}{16}c^5 = 5\beta\gamma - 5\varepsilon$, hvilket giver os $\beta = -\tfrac{15}{4}c^2$; $\gamma = \tfrac{5}{4}c^3$; $\delta = \tfrac{15}{4}c^4$ og $\varepsilon = -\tfrac{9}{4}c^5$.

Derfor bliver $a^5 - \frac{15}{4} c^2 a^3 + \frac{5}{4} c^3 a^2 + \frac{15}{4} c^4 a - \frac{9}{4} c^5 = o$. Paa lignende Maade findes $c^5 - \frac{5}{3} a^2 c^3 - \frac{10}{27} a^3 c^2 + \frac{20}{27} a^4 c + \frac{8}{27} a^5 = o$. I begge disse Ligninger har a Værdien af een af de tvende og c af een af de trende ligestore Rødder. For Resten kan i den første for c og i den anden for a sættes hvilkesomhelst Tal.

Det var egentligen Forfatterens Hensigt at udføre denne Afdeling om Ligningerne af 5te Grad overeensstemmende med de tvende foregaaende og dermed at slutte Undersøgelsen om de bestemte Bogstav-Ligninger; men en langvarig, og nu dette skrives ikke ganske hævet, Øien-Svaghed har sat ham i den Nødvendighed at opgive denne Plan. Det, som derfor mangler, vil, i Forbindelse med en Undersøgelse om de bestemte **Tal-Ligninger**, kunne afgive Emne til eet af de følgende Aars Indbydelses-Skrifter, hvis det forundes Forfatteren heraf at skrive et saadant. Samlede ville de da kunne ansees som et Heelt under den nu valgte almindelige Titel: **Om de bestemte Ligninger.**
