Danskernes Historie Online
Danske Slægtsforskeres Bibliotek

Dette værk er downloadet fra Danskernes Historie Online

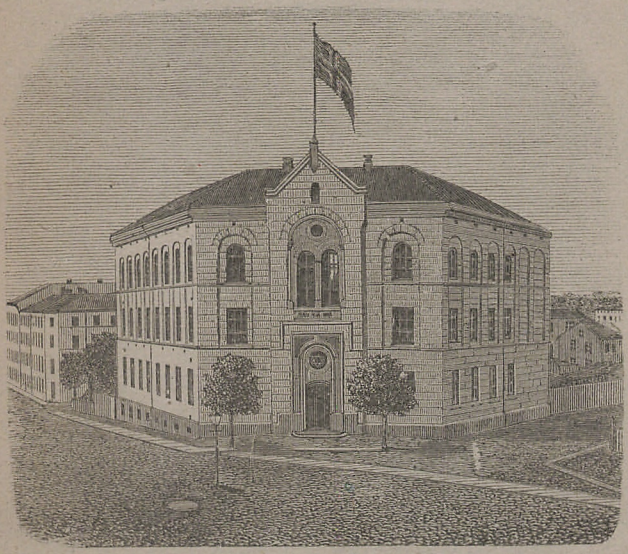
Danskernes Historie Online er Danmarks største digitaliseringsprojekt af litteratur inden for emner som personalhistorie, lokalhistorie og slægtsforskning. Biblioteket hører under den almennyttige forening Danske Slægtsforskere. Vi bevarer vores fælles kulturarv, digitaliserer den og stiller den til rådighed for alle interesserede.

Støt Danskernes Historie Online - Bliv sponsor
Som sponsor i biblioteket opnår du en række fordele. Læs mere om fordele og sponsorat her: https://slaegtsbibliotek.dk/sponsorat

Ophavsret
Biblioteket indeholder værker både med og uden ophavsret. For værker, som er omfattet af ophavsret, må PDF-filen kun benyttes til personligt brug.

Links
Slægtsforskernes Bibliotek: https://slaegtsbibliotek.dk
Danske Slægtsforskere: https://slaegt.dk

GJERTSENS SKOLE.



Indbydelsesskrift.

1884.

Indbydelsesskrift

til

den offentlige examen i juni og juli 1884

ved

Gjertsens Skole

for den høiere almendannelse.

Udgivet af

Fr. Gjertsen og M. Gjør,

skolens bestyrere.

Kristiania.

H. Tønsbergs Bogtrykkeri.

1884.

Indholdsfortegnelse.

Side.

Et stykke Arithmetik og Algebra af A. Eliassen 1

Skoleefterretninger:

1. Afgang til universitetet 1883 59
2. Middelskolens afgangsexamen 1883 60
3. Discipeltal i skoleaaret 1883—84 62
4. Examen artium 1884 62
5. Skolens lærerpersonale 62
6. Skolepenge og fripladse 64

Examen 1884 67

Et stykke

Arithmetik og Algebra.

Af

A. Eliassen.

Den fremstilling af Arithmetikken og elementerne af Algebraen, hvoraf et første afsnit herved offentliggjøres, har efterhaanden udviklet sig og taget form under forf.'s virksomhed som lærer i faget. De bestræbelser, som fornemmelig har været de ledende under dette arbeide, har gaaet ud paa: at stille de principielle sider ved emnet, eksempelvis læren om de negative størrelser, i et tydeligt og rigtigt lys, — at gruppere stoffet paa en overskuelig maade, — at give det mere og mindre væsentlige, det selvstændige og det afledede en forskjellig betoning, — at gjennemføre en omhyggelig og feilfri logik i beviserne og undgaa, at grundenes realitet gaar tabt i overdreven formalisme ved deres fremstilling, — at skille klart mellem det, som defineres, og det, som deduceres, — og endelig et finde den middelvei mellem bred og sammentrængt fremstillingsmaade, som bidrager til at gjøre læsningen mere tiltalende.

De værker, som forf. hidtil har hentet veiledning i, er: *Dr. O. J. Brochs* Arithmetik, *Traité d'Arithmetique* par *J. A. Serret*, *Traité d'Algèbre* par *H. Laurent*, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik von *Dr. Carl Spitz* og for en mindre del Die Elemente der Mathematik von *Dr. Baltzer*. Specielt skal bemærkes, at det nævnte klassiske værk af *H. Laurent* er lagt til grund for fremstillingen af afsnittet om ligningerne, hvad der i hvert fald vil give nærværende arbeide et laant værd.

Forf. vil tilslut anmode kollegaer om at ofre de følgende blade nogen opmærksomhed og vil være taknemmelig for de udtalelser, som de maatte ville komme med enten privat eller offentlig. Pladsen har kun tilladt at aftrykke en liden del af fremstillingen; men denne del er vistnok typisk for arbeidet. Om dette nogen gang skal blive fuldført, det vil bero meget paa, hvilken modtagelse disse blade faar.

Kristiania, i mai 1884.

Indledning.

1. Naar vi ser for os en flerhed af gjenstande af en vis art, kan vor opmærksomhed fæste sig enten ved en enkelt af dem eller ved dem alle under et. For saa vidt man under en slig betragtning bortser fra gjenstandenes *væsentlige* egenskaber og alene lægger mærke til, *hvormange* der er af dem eller, med et andet udtryk, deres *antal*, bruges ordet **Enhed** om en hvilkensomhelst enkelt, for sig selv betragtet, gjenstand, og ordet **Tal** om en flerhed af enheder og om enheden selv.

En mængde kviste danner saaledes et tal, for hvilket den enkelte kvist er enheden.

2. Det er dog intet iveien for, at ogsaa enheden kan være sammensat af flere gjenstande. Hvis man saaledes fordeler den nævnte mængde af kviste i flere mindre grupper, danner mængden af disse grupper et tal, for hvilket den enkelte gruppe er enheden; men her er enheden selv sammensat af flere enkelte kviste. Ja, der gives ingen enhed, uden at den kan tænkes sammensat; thi enhver gjenstand kan deles i mindre dele og opfattes som den samlede mængde af disse dele.

3. Et tal kan adskille sig fra et andet dels derved, at enhederne i ethvert af tallene er af forskjellig art, f. eks. en mængde af *kviste* og en mængde af *kroner*, dels derved, at enhederne er tilstede i forskjellig mængde i de to tal. Til navnet paa ethvert virkeligt tal hører derfor to ord, et til angivelse af enhedernes antal og et til angivelse af deres art, f. eks. fem kviste, to kroner.

I det efterfølgende vil enhedernes art som oftest være ligegyldig, idet tallene vil blive behandlede alene fra det synspunkt, hvormange enheder de indeholder. Bekvemmest er det da at fjerne enhver forestilling om enhedernes bestemte art og opfatte tallene som samlinger af abstrakte enheder. I denne forstand kaldes tallene ubenævnte, idet enhedernes artsnavn sløifes, f. eks. fem, to. I modsætning hertil kaides de virkelige tal benævnte, f. eks. fem kviste.

4. Naar man til et tal føier en enhed til, danner man *det følgende tal.* Tallene i deres følge fra enheden af danner *talrækken.* Denne er ubegrændset, idet man uden ophør kan vedblive med at føie en ny enhed til den foregaaende mængde.

Ethvert tal i talrækken har sit navn og skrives med sit særegne tegn. Navnene kaldes *talord.* Det system af regler, hvorefter tallene nævnes og skrives, kaldes et *talsystem.* Det vigtigste af disse er

Titalssystemet.

a) Talordenes dannelse.

5. De første tal har faaet navne, som er sproglig uafhængige af hverandre; de er

I II III IIII IIIII IIIIII IIIIIII IIIIIIII IIIIIIIII

en, to, tre, fire, fem, seks, syv, otte, ni.

Det følgende tal IIIIIIIIII, som har en særegen vigtig betydning i dette talsystem, heder

ti eller en tier.

Denne mængde af enheder anskues nemlig som en samlet gruppe og danner derved en ny enhed. Forskjellige mængder af disse nye enheder kan man nævne ved hjælp af de ovenfor angivne talord:

en tier, to tiere, tre tiere, fire tiere, fem tiere, seks tiere, syv tiere, otte tiere, ni tiere, ti tiere.

Den sidste mængde, ti tiere, anskues atter som en samlet gruppe, og derved dannes atter en ny enhed, som hedder

et hundrede.

Ligeledes forenes ti hundreder til en en ny enhed, som hedder
et tusinde.
Ligesaa ti tusinder til et titusinde,
ti titusinder til et hundredetusinde,
ti hundredetusinder til en million
o. s. v.

Tieren, hundredet, tusindet, titusindet o. s. v. kaldes ogsaa enhed af anden, af tredie, af fjerde o. s v. orden, tallet en eller enheden kaldes ogsaa enhed af første orden eller ener.

Det sees, at disse titalssystemets forskjellige enheder dannes paa den maade, at ti enheder af en vis orden forenes til en enhed af den følgende orden. De kaldes derfor med et fælles navn *dekadiske enheder* (det græske talord deka betyder ti) og selve talsystemet det dekadiske talsystem.

Navnene paa de dekadiske enheder, som følger efter en million er: En timillion, en hundredemillion, en tusindmillion (milliard), en titusindmillion, en hundredetusindmillion, en billion, en tibillion o. s. v.

6. Ved hjælp af det i foregaaende stykke (5) forklarede apparat af navne, nemlig navnene paa de ni første tal og paa de dekadiske enheder, er det, at man danner alle de andre talord, som behøves til benævnelsen af de forskjellige tal i talrækken. Udførbarheden heraf forudsætter en særegen fordeling af enhederne i ethvert tal efter følgende fremgangsmaade:

Lad os tænke os, at vi har for os en mængde af enheder, flere end ni. Af denne mængde udskilles der grupper, hver paa ti enheder, saalænge, indtil der enten ikke er nogen enhed tilovers, eller de tiloversblevne ikke længere er mange nok til at danne en saadan gruppe paa ti. Det tal, vi har for os, vil herved være inddelt i tiere og enere, og af de sidste vil der i det høieste være ni. Fremdeles, hvis der af tiere er flere end ni, forenes ti tiere til et hundrede og nok en gang ti tiere til et hundrede og hermed fortsættes saa længe, indtil de tiloversblevne tiere er for faa til at danne noget hundrede; hvis der er tiere tilovers, kan disses antal i det høieste være ni. Fremdeles, hvis der af hundreder er flere end ni, forenes ti hundreder til et tu-

sinde og atter ti hundreder til et tusinde saalænge som der er hundreder nok til at danne et tusinde af; de tiloversblevne hundreder kan da ikke være flere end ni. Ved at blive ved paa denne maade indsees, at

ethvert tal lader sig opfatte som en forening af flere partier, hvoraf ethvert bestaar af dekadiske enheder af en vis orden og det saadan, at det høieste antal dekadiske enheder, som kan findes af en og samme orden, er ni.

Paa grundlag heraf dannes det til et hvilketsomhelst tal svarende talord saaledes:

Man nævner særskilt, *hvormange enheder af enhver orden tallet indeholder, idet man begynder med enhederne af den høieste orden.*

F. eks. Otte tusinder, fem hundreder, fire tiere og to enere.

7. Fra dette princip for talordenes dannelse har sprogbrugen gjort følgende afvigelser:

1⁰. To tiere, tre tiere, fire tiere, fem tiere, seks tiere, syv tiere, otte tiere og ni tiere er blevet til
tyve, tredve, firti, femti, seksti, sytti, otti og nitti.

2⁰. Talordene mellem ti og tyve, altsaa en tier og en ener, en tier og to enere, en tier og tre enere o. s. v, er ombyttede med elleve, tolv, tretten, fjorten, femten, seksten, sytten, atten og nitten.

3⁰. Ved enerne nævnes kun antallet; selve navnet ener sløifes.

4⁰. Enernes antal nævnes sædvanlig foran tierne. Saaledes fem og sytti i stedet for sytti og fem.

5⁰. Ved talordene mellem tusind og en million er at mærke, at man ikke ligefrem nævner, hvormange titusinder og hundredetusinder tallene indeholder; enhederne af disse to ordener opløses nemlig i tusinder og forenes med tallets øvrige tusinder, hvorpaa man nævner det samlede antal enheder, som paa denne maade erholdes af tusindernes orden. Der opnaaes herved en betydelig forkortning af talordet. Hvis f. eks. et tal indeholder seks hundredetusinder, fire titusinder og ni tusinder, opløses de første i seks hundrede tusinder, de andre i firti tusinder, og hermed forenes de ni egent-

lige tusinder, hvorved ialt faaes seks hundrede og ni og firti tusinder; saaledes lyder ogsaa talordet. — En tilsvarende sammentrækning sker med talordene mellem en million og en billion, idet alle mellem disse værende dekadiske enheder opløses i millioner, hvorpaa man nævner det samlede antal millioner, som derved erholdes hos tallet. Ligedan mellem en billion og en trillion o. s. v.

b) *Tallenes skriftlige betegnelse.*

8. Ti særskilte tegn eller **sifre** er alt, hvad titalssystemet behøver til den skriftlige betegnelse af et hvilketsomhelst tal Forudsætningen herfor er den samme fordeling af enhederne i ethvert tal som den, der ligger tilgrund for talordenens dannelse. (Se 6).

Af de ti sifre tjener de ni til betegnelse af talrækkens ni første tal. De er:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9.
en, to, tre, fire, fem, seks, syv, otte og ni.

Det tiende siffer er 0; det benævnes *nul* og bruges til at betegne, at der mangler enheder af den ene eller anden orden. I modsætning til 0 kaldes de ni førstnævnte sifre *gjældende sifre.*

9. Den skriftlige betegnelse af et hvilketsomhelst af tallene efter ni sker ved en sammenstilling af to eller flere af de ti sifre efter følgende fremgangsmaade:

Man skriver først det siffer, som betegner antallet af enhederne af den høieste orden hos tallet; tilhøire for dette siffer skrives det, der angiver antallet af enhederne af den umiddelbart lavere orden; hvis tallet ingen saadanne enheder har, skrives sifret 0; paa samme maade fortsættes, indtil man har skrevet som sidste siffer tilhøire det, der angiver antallet af tallets enere. Navnene paa selve de dekadiske enheder skrives ikke.

Eks. 1. Tallet fem hundrede og to og nitti skrives 592.

Eks. 2. Den dekadiske enhed tusind skrives 1000, hvor de tre nuller betegner mangelen af enheder af 3die, 2den og 1ste orden.

Eks. 3. Otte hundrede og seks tusind fire hundrede og syv skrives 806407, hvor det første nul betegner mangelen af titusinder og det andet mangelen af tiere.

Det ligger i den her forklarede fremgangsmaade, at ethvert siffer, som staar tilhøire for et andet, betegner enhederne af den orden, som er umiddelbart lavere end ordenen af de enheder, som er betegnet med dette andet siffer; ligeledes at ordenen af de enheder, som ethvert siffer betegner, er netop den samme som sifrets nummer fra høire.

c) *At læse et skrevet tal.*

10. Af fremgangsmaaden ved tallenes skriftlige betegnelse følger, at naar man vil læse et skrevet tal, da har man at udtale betydningen af de gjældende sifre efter hverandre fra venstre samt for hvert siffer, man nævner, at tilføie navnet paa den dekadiske enhed, som er udeladt men underforstaaet ved den skriftlige betegnelse; herunder har man da ogsaa at iagttage de sammentrækninger og ombytninger, som sprogbrugen har indført (se 7).

Eks. 346059 læses: tre hundrede og seks og firti tusind og ni og femti.

---

11. Paa grund af den betydning, som tallet *ti* har ved enhedernes gruppering i dekadiske enheder, idet enhver saadan dannes ved en forening af ti enheder af den umiddelbart lavere orden, kaldes det titalssystemets *grundtal.*

---

12 *Arithmetikken* er videnskaben om tallene. Den har til væsentligt formaal at udfinde ubekjendte tal ved at behandle to eller flere givne tal paa en eller anden af de maader, som naturlig frembyder sig for saadanne. Disse forskjellige — af det praktiske livs behov fremgaaede — behandlingsmaader af givne tal kaldes *regningsarter*, og arithmetikken er derfor ogsaa regnelære. —

Om størrelser.*)

13. Alt, hvad der er direkte modtageligt for forøgelse eller formindskelse, kaldes *størrelse.* Længder, flader, volumer, vægter,

*) Meget i dette stykke er taget fra *Traité d'Arithmétique par J. A. Serret* — saaledes den vidtrækkende definition af *Størrelser.*

tider, hastigheder, kræfter er størrelser. Tallene indbefattes ogsaa heriblandt, idet en mængde af enheder er modtagelig for forøgelse eller formindskelse ved tilførsel af nye eller fjernelse af forhaandenværende enheder.

14. *Størrelsers udmaaling.* Ved en mængde gjenstande af en vis art er enheden naturlig given, nemlig som den enkelte for sig selv eksisterende gjenstand, og for at bestemme, hvor stor mængden er, har man kun at skille enhederne fra hverandre og tælle dem. Med de ovenfor nævnte størrelser, længder, flader o. s. v. forholder det sig anderledes; ved disse foreligger der ingen paa forhaand given enhed. Men for enhver af disse vælger man til enhed en vilkaarlig størrelse af samme art som størrelsen selv, for længder en vilkaarlig længde, for kræfter en vilkaarlig kraft o. s. v. Man kan nu tænke sig størrelsen fordelt i slige enheder, og uagtet der ikke kan blive tale om nogen virkelig adskillelse af enhederne, kan man alligevel tænke sig en saadan ligesom ogsaa tænke sig en optælling af enhederne. Dette, at finde hvormange gange en størrelse indeholder den valgte enhed, kaldes at maale størrelsen.

Tallene faar herved en særegen vigtig betydning blandt størrelserne, idet angivelsen af disses storhed sker ved tal.

To størrelser af samme art er *lige store*, naar de indeholder en for dem begge valgt fælles enhed lige mange gange. Hvis derimod denne enhed indeholdes flere gange i den ene af størrelserne end i den anden, da er den første størrelse *større* end den anden eller den anden *mindre* end den første.

15. Hvis man ved at gjentage den valgte enhed tilstrækkelig mange gange kan nøiagtig frembringe en given størrelse, da siges denne at være *hel* i forhold til den benyttede enhed. Specielt ligger heri indbefattet, at ved *hele tal* menes slige samlinger af enheder, det være sig naturlige eller tænkte.

---

16. Videnskaben om størrrelser kaldes *Algebra*, for saa vidt som den alene tager sit udgangspunkt i den for alle størrelser almindelige forudsætning, at de er direkte modtagelige for forøgelse eller formindskelse, men derimod ganske bortser fra de mere specielle forudsætninger som rum, tid, kraft o. s. v.

Omhandler videnskaben specielt de størrelser, som fremkommer ved betragtning af rummet, hedder den *Geometri*.

Omhandler den størrelser, som fremkommer ved den forenede betragtning af rummet og tiden, hedder den *rationel Mekanik*.

Alle er grene af *Mathematikken* eller størrelseslæren. —

Almindelige begreber. Betegnelsessæt.

17. Med en *Definition* menes fastsættelsen af et navn paa en vis klart betegnet mathematisk forekomst, eksempelvis paa en vis klart betegnet figur, en linjestilling, en regningsart o. s. v. Definitionens betydning er den forkortning, som den medfører i tale og skrift, idet man med et enkelt ord kan faa betegnet det, som man ellers maatte bruge hele sætninger for at udtrykke.

Anmærkning. Da de engang vedtagne navne paa de mathematiske forekomster har vundet en mere eller mindre almindelig hævd, kan selvfølgelig ikke den, som vil fremstille eller tilegne sig de fra tidligere tider nedarvede kundskaber om disse emner, sætte sig ud over de nedarvede navne og vilkaarlig indføre nye; han har at holde sig til de engang givne. I saa fald kommer definitionen til at bestaa i en klart betegnende udtalelse af, hvilken mathematisk forekomst det er, som repræsenteres ved det eller det navn.

En *grundsætning* (aksiom) er det sproglige udtryk for en størrelserne vedkommende sandhed, som er saa indlysende i sig selv, at det er umuligt at forstærke overbevisningen om den ved nogensomhelst begrundelse. Herhen hører f eks. den sandhed, at enhver størrelse er lig selv. Mathematikken regner grundsætningerne med blandt sine givne forudsætninger.

En *læresætning* (theorem) er det sproglige udtryk for en saadan kundskab om et mathematisk emne, hvis sandhed kan gjøres indlysende ved en strengt logisk begrundelse. Enhver saadan læresætning bestaar af to dele, betingelsen og satsen. Den sidste udtaler selve indeholdet af den omhandlede mathematiske kundskab, medens den første udtaler de begrændsende forudsætninger for satsens gyldighed.

Et *bevis* er den ordnede fremstilling af den begrundelse, ved hvilken gyldigheden af en læresætnings sats bliver indlysende.

Beviset kaldes indirekte, naar der begrundes, at sagen umulig kan forholde sig paa nogensomhelst maade anderledes end som i læresætningens sats paastaaet, hvorefter dennes rigtighed sluttes som følge af, at den er eneste tilbageværende mulighed. Derimod kaldes beviset direkte, naar det er rettet ligefrem mod indholdet af læresætningens sats uden at indlade sig med mulighederne for, at sagen kunde forholde sig anderledes end der paastaaet. — Det direkte bevis kaldes synthetisk, naar det søger at fremstille læresætningens sats som enderesultat af en række ligefremme slutninger, hvis forudsætninger (præmisser) tages dels fra læresætningens betingelser dels fra indholdet af tidligere beviste læresætninger eller af forhen givne definitioner.

18. Som betegnelsesmiddel for størrelser overhovedet bruges bogstaver overalt, hvor det ikke kommer an paa, at størrelsen er nogen enkelt bestemt men kan være en hvilkensomhelst. Dette faar sin store betydning hver gang, man med tegn vil udtrykke indholdet af en definition, en grundsætning eller en læresætning, som angaar enten alle mulige størrelser eller i hvert fald en større gruppe indenfor det samlede størrelsesomraade, eksempelvis tallene; i sidste tilfælde bliver altsaa bogstavets betydning en begrændset, men dog omfattende en flerhed af særskilte størrelser. Ikke mindre nytte gjør bogstavet i beviser eller andre udviklinger som et kort tegn for den størrelsesgruppe, der handles om. En hvilkensomhelst størrelse kan saaledes betegnes med bogstavet a, en anden med b o. s. v. Ofte er det bekvemt at bruge et og samme bogstav forsynet med forskjellige mærker til at betegne forskjellige størrelser; saaledes a_1, a_2, a_3 o. s. v. eller a', a'', a''' o. s. v.

19. At to størrelser er lige store betegnes ved at sætte tegnet $=$ (lighedstegnet) mellem dem. At en størrelse er større eller mindre end en anden betegnes ved at sætte tegnet $>$ mellem dem, saaledes at aabningen af tegnet vender mod den større og spidsen mod den mindre af størrelserne. Saaledes betegner $a = b$, at a er lige stor som b eller, som man kortere siger, a lig b; $c > d$, at c er større end d eller d mindre end c; $p < q$, at p er mindre end q eller q større end p.

En sætning, som udtaler, at to størrelser er lige store, kaldes en *ligning*. En saadan bliver altsaa at betegne derved, at lighedstegnet skrives mellem de to størrelser. F. eks. $A = B$.

Grundsætninger eller Aksiomer

er følgende:

20. *Enhver størrelse er lig sig selv.*

$$A = A.$$

21. *Naar to størrelser er lig en og samme tredie størrelse, er de indbyrdes lige store.*

$$\begin{array}{r} \text{Naar } A = B \\ \text{og } C = B \\ \hline \text{saa er } A = C. \end{array}$$

22. *Naar en størrelse er større end den ene af to lige store størrelser, er den ogsaa større end den anden.*

$$\begin{array}{r} \text{Naar } A > B \\ \text{og } B = C \\ \hline \text{saa er } A > C. \end{array}$$

23. *Naar en størrelse er mindre end den ene af to lige store størrelser, er den ogsaa mindre end den anden.*

$$\begin{array}{r} \text{Naar } A < B \\ \text{og } B = C \\ \hline \text{saa er } A < C. \end{array}$$

24. *Naar en størrelse er større end den største af to andre størrelser, er den ogsaa større end den mindste;*

eller

Naar en størrelse er mindre end den mindste af to andre størrelser, er den ogsaa mindre end den største.

$$\begin{array}{r} \text{Naar } A > B \\ \text{og } B > C \\ \hline \text{saa er } A > C \end{array} \qquad \text{eller} \qquad \begin{array}{r} \text{naar } C < B \\ \text{og } B < A \\ \hline \text{saa er } C < A. \end{array}$$

Tillæg I. Grundsætningerne 21, 22 og 23 er alle udtryk for den mere almindelige sætning, at

man kan overalt, hvor der ved størrelserne kun tages hensyn til deres storhed, istedetfor en størrelse sætte en dermed lige stor.

De i 21, 22 og 23 gjorte slutninger fremkommer nemlig ved, at man i den øverste af betingelserne ombytter B med den lige store C.

Tillæg II. Grundsætningerne i 24 udtrykker ogsaa, at

Naar prædikatet større eller mindre passer i en sammenligning mellem to størrelser, da passer det samme prædikat fremdeles, om man istedet for den større af de to størrelser sætter en endda større eller istedet for den mindre en endda mindre.

Første bog.

De fire regningsarter i hele tal.

Kapitel I.

Addition og subtraktion med de naturlige tal.

I. Addition.

25. *Definitioner.* Addition kaldes den regningsart, som gaar ud paa at forene til et eneste tal alle de enheder, som findes i to eller flere givne tal. Disse sidste kaldes *Addender*. Det søgte tal, som indeholder alle addendernes enheder, kaldes *Summen*. — Additionstegnet er + (plus), som sættes mellem addenderne.

26. Summen af to tal findes derved, at man til det første af dem føier det andets enheder en for en. Udførelsen heraf falder sammen med at tælle fra det førsre tals sted i talrækken saa mange pladse frem i denne, som det andet tal indeholder enheder.

F. eks. Summen af 28 og 4 findes saaledes: 28 og 1 er 29; 29 og 1 er 30; 30 og 1 er 31; 31 og 1 er 32. Altsaa $28 + 4 = 32$.

Summen af tre eller flere tal findes ved først at addere de to, derpaa til summen af disse det tredie, til summen heraf det fjerde o. s. v.

27. Af definitionen følger umiddelbart:

1°. Summen bliver den samme, i hvilken orden man end adderer addenderne.

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = c + a + b = c + b + a.$$

2°. Summen bliver den samme, om man først samler addenderne til to eller flere grupper, derpaa søger summen af hver gruppe og tilsidst summen af de saaledes fremkomne nye addender.

F. eks. $a + b + c + d + e + f + g = (a + b + c) + (d + e) + (f + g)$,

hvor parentheserne angiver addendernes forening gruppevis.

3°. Summen bliver den samme, om man tager enheder bort fra nogen af addenderne og enten opfører disse enheder som en ny addend eller fordeler dem paa en eller flere af de øvrige addender.

28. *Flersifrede tals addition* sker overensstemmende med reglerne i 27 ved særskilt at søge summen af deres enere, deres tiere, hundreder o. s. v. og derpaa forene alle disse partielle summer til et eneste flersifret tal.

Til dette øiemed skriver man tallene under hverandre saaledes, at enhederne af samme orden kommer til at staa i samme vertikale kolonne. Først søges summen af de i den første kolonne tilhøire skrevne tal, altsaa af addendernes enere; hvis resultatet ikke overstiger 9, skrives det op nedenunder kolonnen; i modsat fald skilles resultatets tiere fra dets enere, og kun disse sidste skrives op, medens tiernes antal tilføies tallene i den anden kolonne. Derpaa søges summen af tallene i den anden kolonne, altsaa af tierne; hvis resultatet ikke overstiger 9, skrives det op nedenunder kolonnen; i modsat fald skilles tierne fra enerne, og kun disse sidste skrives op, hvorimod antallet af de fraskilte tiere tilføies tallene i tredie kolonne. Paa samme maade fortsættes indtil den sidste kolonne; summen af de i denne skrevne tal og af det fra foregaaende kolonnes sum overførte antal skrives op fuldstændig.

Eksempel. $8027 + 718 + 4806 = ?$

```
 8027
  718
 4806
-----
13551
```

Man siger: 7 og 8 er 15 og 6 er 21 (enere), hvoraf 1 skrives op, medens de to tiere overføres paa næste kolonne. 2 og 2 er 4 og 1 er 5 (tiere), som skrives op. 7 og 8 er 15 (hundreder), hvoraf de 5 skrives op, medens den ene tier af hundreder eller den ene ener af tusinder tilføies næste kolonne. 1 og 8 er 9 og 4 er 13 (tusinder), som alle skrives op.

29. Vi har under den foregaaende fremstilling benyttet ubenævnte tal (se indledningen 3). I det daglige liv gaar derimod additionen altid ud paa at forene flere forskjellige mængder af ligeartede virkelige enheder til én ensartet mængde; f. eks. ligeartede myntenheder, vareenheder eller naturgjenstande. Addenderne er altsaa her stedse benævnte tal af samme benævning og summen ligeledes et benævnt tal af samme benævning som addenderne. Da de benævnte enheder tælles ganske som de ubenævnte, kun med tilføielse af enhedens artsnavn, saa findes summen af flere ensbenævnte tal ved at søge summen af de tilsvarende ubenævnte tal og til denne føie addendernes benævning.

Eks. 25 kr. + 9 kr. + 317 kr. = ?

Ved at søge summen af 25, 9 og 317 faaes 351; følgelig er

25 kr. + 9 kr. + 317 kr. = 351 kr.

Tillæg: Parenthesen som betegnelsesmiddel. Naar flere størrelser indesluttes i en parenthes, betegnes derved, at de danner et sammenhørende hele. 6 + (7 + 3 + 1) betegner saaledes, at summen af 7, 3 og 1 skal adderes til 6; da 7 + 3 + 1 = 11, er altsaa meningen den samme, som om der stod 6 + 11.

((a + b) + c) + d betegner, at man til summen af a og b skal addere c og derpaa til summen heraf addere d. En saadan brug af parenthesen er dog overflødig, idet der ved skrivemaaden a + b + c + d, uden nogen parenthes, menes netop de samme additioner.

II. Subtraktion.

30. *Definitioner.* Subtraktion kaldes den regningsart, som gaar ud paa at finde, hvormange enheder der bliver tilbage af et givet tal, *Minuenden*, naar man har taget fra det saa mange enheder, som et andet givet tal, *Subtrahenden*, angiver. Det søgte tal kaldes *Differensen*.

Man siger, at subtrahenden subtraheres (trækkes) fra minuenden. Subtraktionstegnet er — (minus); minuenden skrives foran og subtrahenden efter dette tegn.

31. Differensen findes derved, at man fra minuenden borttager subtrahendens enheder en for en. Udførelsen heraf falder sammen med at tælle fra den førstes sted i talrækken saa mange pladse tilbage i denne, som den anden indeholder enheder. Differensen er da det tal, som man standser ved.

Eks. 32 — 4 =? 1 fra 32 er 31; 1 fra 31 er 30; 1 fra 30 er 29, og 1 fra 29 er 28. Altsaa 32 — 4 = 28.

32. *Minuenden er lig summen af subtrahenden og differensen.* Thi ved subtraktionen bliver minuenden adskilt i to partier, nemlig det antal enheder, som bliver borttaget fra den, (subtrahenden), og det antal enheder, som bliver tilbage, (differensen); disse to partier maa da forenede udgjøre minuenden.

$$\text{Naar } a - b = d$$

$$\text{saa er } a = b + d.$$

Heraf følger igjen, at naar man fra a subtraherer d, faaes b til differens. Naar $a - b = d$, saa er altsaa ogsaa $a - d = b$.

Anmærkning. Om differensen bruges ogsaa udtrykket, at den er forskjellen mellem minuenden og subtrahenden, hvormed sigtes til, at den angiver, hvor mange enheder der maa adderes til den sidste for at gjøre den lig den første. Med samme mening bruges ogsaa udtrykket, at differensen angiver, hvor meget større minuenden er end subtrahenden.

33. Naar man til et tal først adderer et andet og derpaa fra summen atter subtraherer det samme tal — eller — naar man fra et tal først subtraherer et andet og derpaa til differensen atter adderer det samme tal, da bliver resultatet ligt det første tal.

$$a + b - b = a$$
$$\text{og } a - b + b = a.$$

Thi et tillæg af b enheder til et tal efterfulgt af et fradrag af de samme b enheder bliver uden nogen virkning.

---

34. *Naar man adderer et tal til minuenden, maa samme tal adderes til differensen,* og

naar man subtraherer et tal fra minuenden, maa samme tal subtraheres fra differensen.

$$\text{Er } a - b = d$$
$$\text{saa er } (a + c) - b = d + c$$
$$\text{og } (a - c) - b = d - c.$$

Dette er kun den ligefremme sandhed, at naar den beholdning af enheder, fra hvilken der skal borttages b enheder, bliver c større eller mindre, maa ogsaa det antal enheder, som bliver tilovers, blive c større eller mindre.

35. *Naar man til subtrahenden adderer et tal, maa samme tal subtraheres fra differensen,* og

naar man fra subtrahenden subtraherer et tal, maa samme tal adderes til differensen.

$$\text{Er } a - b = d$$
$$\text{saa er } a - (b + c) = d - c$$
$$\text{og } a - (b - c) = d + c.$$

Thi herved er kun udtalt, at naar det antal enheder, som skal tages bort fra et givet tal a, bliver c større, da maa det antal enheder, som bliver tilovers, blive c mindre; og naar det antal, som skal tages bort fra a, bliver c mindre, maa det, som bliver tilovers, blive c større.

Tillæg til 34 og 35. Naar man samtidig til baade minuenden og subtrahenden adderer eller fra dem begge subtraherer samme tal, bliver differensen uforandret.

$$\text{Er } a - b = d$$
$$\text{saa er } (a + c) - (b + c) = d$$
$$\text{og } (a - c) - (b - c) = d.$$

---

36. Forberedende sætninger for subtraktionen af flersifrede tal:

1⁰. *Naar man fra en af addenderne i en sum subtraherer et tal, maa samme tal ogsaa subtraheres fra summen.*

$$\text{Er } a + b + c + d = s$$

$$\text{saa er } a + (b - m) + c + d = s - m.$$

Herved bliver der nemlig til $a + c + d$ ikke som i betingelsen føiet b enheder men m enheder færre, hvorved ogsaa summen maa faa m enheder færre.

2⁰. *Naar man fra et tal skal subtrahere en sum af flere andre tal, kan dette ske derved, at man fra tallet først subtraherer den ene af addenderne, derpaa fra det udkomne den anden* o. s. v.

$$a - (b + c + d) = a - b - c - d.$$

Thi naar man fra a først borttager b enheder, derpaa fra det udkomne c og derpaa atter d, da har man fra a borttaget i alt saa mange enheder, som b, c og d har tilsammen.

3⁰. *Naar man fra en sum af flere tal skal subtrahere en sum af flere andre tal, kan man fra en af minuendens addender subtrahere en af subtrahendens, fra en anden af minuendens addender subtrahere en anden af subtrahendens* o. s. v. *og derpaa addere disse forskjellige differenser.*

$(a + b + c) - (d + e + f) = (a - d) + (b - e) + (c - f)$.

Thi ifølge 2⁰ er $(a + b + c) - (d + e + f) = (a + b + c) - d - e - f$.

Men naar man fra en sum, $a + b + c$, skal subtrahere et tal d, kan man ifølge 1⁰ med samme virkning subtrahere tallet fra en af addenderne, hvorved faaes $(a - d) + b + c$; herfra skal atter subtraheres tallet e, hvorved efter samme fremgangsmaade faaes $(a - d) + (b - e) + c$; herfra skal endelig subtraheres tallet f, hvorved paa samme maade faaes $(a - d) + (b - e) + (c - f)$. Altsaa er $(a + b + c) - (d + e + f) = (a - d) + (b - e) + (c - f)$.

37. *To flersifrede tal* subtraheres — overensstemmende med sætningen 3⁰ i 36 — derved, at man fra minuendens enere, tiere, hundreder . . . subtraherer subtrahendens enere, tiere, hundreder . . . og derpaa forener disse forskjellige differenser til et eneste flersifret tal.

Til dette øiemed er det bekvemmest at skrive subtrahenden under minuenden saaledes, at enhederne af samme orden kommer lige under hinanden.

F. eks. 8572 — 4321 = ?

```
  8572
  4321
 ------
  4251 er differensen.
```

Dersom minuenden indeholder færre enheder af nogen orden end subtrahenden, kan subtraktionen af denne art enheder ikke udføres, førend man i minuenden har taget en enhed af den nærmest høiere orden, omdannet denne til 10 enheder af den omhandlede lavere orden og forenet disse med de enheder, som minuenden før besidder af denne orden. Dette kalder man at „laane“ en enhed, og man maa ved subtraktionen af den næste ordens enheder erindre at borttage fra minuenden den laante enhed, førend man subtraherer.

1ste eksempel. 2485 — 791 = ?

```
  2485
   791
 ------
  1694 er differensen.
```

Man siger 1 (ener) fra 5 (enere) er 4 (enere); 9 (tiere) fra 8 (tiere) gaar ikke an, hvorfor man laaner et af minuendens fire hundreder og omdanner det til 10 tiere, hvilke sammen med de 8 tiere giver 18 tiere; 9 fra 18 er 9 (tiere); 7 (hundreder) fra 3 (hundreder) gaar heller ikke an, hvorfor man laaner det ene af minuendens to tusinder, omdanner dette til 10 hundreder og forener disse med de 3 hundreder, hvorved faaes 13 hundreder; 7 fra 13 er 6 (hundreder); minuendens ene tusinde nedflyttes.

2det eksempel. 8006 — 3728 = ?

$$\begin{array}{r} 8006 \\ 3728 \\ \hline 4278 \end{array}$$ er differensen.

Man maa her straks begynde med at laane; men da minuenden mangler baade tiere og hundreder, bliver det et af dens otte tusinder, som maa laanes; dette omgjøres til 10 hundreder; af disse laanes atter det ene, som omgjøres til 10 tiere; af disse laanes atter den ene, som omgjøres til 10 enere; disse forenes med minuendens 6 enere, hvorved faaes 16 enere. Minuenden er altsaa omdannet til 7 tusinder, 9 hundreder, 9 tiere og 16 enere. Derpaa subtraheres: 8 fra 16 er 8; 2 fra 9 er 7; 7 fra 9 er 2; 3 fra 7 er 4.

Man kan gjøre prøve paa subtraktionens rigtighed ved at addere subtrahenden og differensen og se efter, om summen bliver lig minuenden.

---

38. Differensen mellem to benævnte tal af samme benævning findes ved at subtrahere de tilsvarende ubenævnte tal som ovenfor forklaret og tilføie resultatet benævningen. (Sammenlign 29).

F. eks. 35 aar — 13 aar = 22 aar.

Kapitel II.

Addition og subtraktion med udvidet betydning.

39. *Definitioner.* Fra et sted, a, i talrækken at tælle frem i denne saa mange pladse, som et tal b angiver, kaldes at addere a og b. Den størrelse, ved hvilken tællingen standser, er summen af a og b og betegnes med a + b.

Fra et sted, a, i talrækken at tælle tilbage i denne saa mange pladse, som et tal b angiver, kaldes at subtrahere b

fra a. Den størrelse, ved hvilken tællingen standser, er differensen mellem a og b og betegnes med $a - b$; a er minuenden, b subtrahenden.

Anmærkning. At de her givne definitioner af addition og subtraktion ogsaa omfatter de i kapitel I med samme navne benævnte regningsarter, er før paavist. (Se kap. I, 26 og 31).

40. Af definitionerne fremgaar, at *minuenden er lig summen af differensen og subtrahenden.* (Sammenligu kap. I, 32).

$$\text{Er } a - b = d$$

$$\text{saa er } a = d + b.$$

At $a - b = d$, vil nemlig sige, at man ved at tælle fra a som udgangspunkt b pladse tilbage i talrækken kommer til d. Tæller man da fra d atter b pladse frem, kommer man selvfølgelig tilbage til udgangspunktet a. Altsaa $d + b = a$.

Tillæg. Dette ræsonnement indeholder ogsaa, at

$$a + b - b = a$$

$$\text{og } a - b + b = a,$$

hvilket udtales som i kap. I, 33.

41. At flere størrelser skal dels adderes dels subtraheres betegnes ved at skrive dem op fra venstre mod høire i den opgivne orden og forbinde dem med + eller —. Udregningen af en saadan forbindelse sker derved, at man fra den første størrelse som udgangspunkt udfører tællingerne frem eller tilbage i talrækken saadan som tegnene + og — bestemmer. Dersom nogle af størrelserne er indesluttede i parenthes, da udregnes først indholdet af denne, førend man tager fat paa udregningen af den hele forbindelse. (Se kap. I, tillæg til addition).

Eks. 1. $20 + 7 - 10 - 3 + 9 + 5 - 8 = ?$

Man regner: $20 + 7 = 27$; $27 - 10 = 17$; $17 - 3 = 14$; $14 + 9 = 23$; $23 + 5 = 28$; $28 - 8 = 20$, som er resultatet.

Eks. 2. Sættes i eks. 1 en parenthes om partiet $10 - 3 + 9$, faaes

$$20 + 7 - (10 - 3 + 9) + 5 - 8 = ?$$

Parenthesen udregnes: $10 - 3 + 9 = 16$; dernæst ud-

regnes forbindelsen forfra: $20 + 7 - 16 + 5 - 8 = 8$. Dette resultat er saaledes forskjelligt fra det, som fremkom i eks. 1, hvor der ingen parenthes forekom.

Den udvidede talrække og tællinger i denne.

42. Medens adgangen til at tælle frem i den naturlige talrække er ubegrændset, saa kan man ved tælling tilbage ikke komme ud over enheden. Denne kommer man til, hver gang subtrahenden er lig minuenden paa en enhed nær. Saaledes $5 - 4 = 1$ eller i almindelighed

$$k - (k - 1) = 1.$$

Er subtrahenden lig minuenden eller større, lader tællingen sig ikke udføre.

43. For at gjøre adgangen til at subtrahere lige saa uindskrænket som til at addere, udvides talrækken med pladse bag enheden. Umiddelbart bag 1 sættes 0 (nul, ingen); bag 0 udfyldes pladsene med de naturlige tal forsynede med mærket — (minus). Derved faaes den til begge sider ubegrændsede række

$$\cdots - k, \cdots\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots k, \cdots$$

hvor antallet af enheder paa en hvilkensomhelst plads tillige angiver dennes nummer regnet fra 0, og hvor mærket — adskiller pladsene tilvenstre for 0 fra dem tilhøire. k indtager den k^{ende} plads tilhøire, — k den k^{ende} plads tilvenstre for 0.

Et saadant med tegnet — mærket antal af enheder, som udfylder en bestemt plads bag (til venstre for) 0 i den udvidede talrække, kaldes en *negativ størrelse*. Antallet af enhederne, der tillige angiver pladsens nummer regnet fra 0, kaldes den negative størrelses *talværdi*, og tegnet — dens *fortegn*. I modsætning hertil kaldes de naturlige tal, som udfylder pladsene foran (til høire for) 0, *positive størrelser*. Ofte skrives foran disse tegnet +, som da kaldes deres fortegn, medens tallet alene kaldes talværdien i lighed med, hvad der finder sted ved de negative størrelser.

44. Af definitionerne af addition og subtraktion fremgaar nu følgende sætninger:

1⁰. Naar minuenden og subtrahenden er lige store, er differensen lig (0).

$$k - k = 0.$$

2⁰. Naar minuenden er 0, er differensen lig den negative størrelse, hvis talværdi er subtrahenden.

$$0 - k = - k.$$

3⁰. Naar minuenden er mindre end subtrahenden, er differensen den negative størrelse, hvis talværdi er differensen mellem subtrahenden og minuenden.

Er $a < b$ og $b - a = k$ eller $b = a + k$

saa er $a - b = - (b - a) = - k$.

Thi naar man fra a har tællet a pladse tilbage i talrækken, er man kommet til 0; og naar man herfra har tællet videre tilbage de resterende k pladse, standser man ved $- k$ eller $- (b - a)$.

4⁰. Naar man til 0 adderer et tal, bliver summen lig dette tal.

$$0 + a = a.$$

5⁰. Naar man til en negativ størrelse adderer et tal, bliver summen lig differensen mellem den største og mindste talværdi med den største talværdis fortegn.

Er $a > b$, saa er $- a + b = - (a - b)$;
men er $a < b$, saa er $- a + b = + (b - a)$.

Thi naar $a > b$, og man fra $- a$ tæller b pladse frem i talrækken, kommer man ikke saa langt frem som til 0, da der fra $- a$ er a pladse frem til 0; er saaledes $a = b + k$, saa er der fra det sted, hvor man standser, endnu k pladse igjen til 0. Altsaa $- a + b = - k$ eller $- (a - b)$.

Er derimod $a < b$, og man fra $- a$ tæller b pladse frem, kommer man forbi 0 og det saa mange pladse, som b indeholder flere enheder end a. Altsaa $- a + b = + (b - a)$.

F. eks. $- 5 + 2 = - (5 - 2) = - 3$
$- 5 + 8 = + (8 - 5) = + 3.$

6⁰. Naar man fra en negativ størrelse subtraherer et tal, bliver differensen den negative størrelse, hvis talværdi er summen af talværdierne.

$$-a-b=-(a+b).$$

Naar man nemlig fra $-a$, som staar a pladse foran 0, tæller b pladse videre tilbage, kommer man $a+b$ pladse bag 0 eller til $-(a+b)$.

---

45. Yderligere udvidet betydning af additionen og subtraktionen. (Definitioner).

1⁰. $a+o=a$ og $a-o=a$.

2⁰. Ved talemaaden: Til en størrelse at addere en negativ størrelse menes, at man fra størrelsen skal subtrahere den negatives talværdi.

$$a+(-b)=a-b.$$

Tillæg. Summen af flere negative størrelser er den negative størrelse, hvis talværdi er summen af addendernes talværdier.

$$(-a)+(-b)=-(a+b).$$

Thi $(-a)+(-b)=-a-b$, som ifølge 44, 6⁰ er lig $-(a+b)$.

3⁰. Ved talemaaden: Fra en størrelse at subtrahere en negativ størrelse menes, at man til størrelsen skal addere den negatives talværdi.

$$a-(-b)=a+b.$$

Tillæg. Ogsaa ved denne definition af subtraktion bliver sætningen, at differensen + subtrahenden er lig minuenden, staaende ved magt. Thi ifølge 2⁰ er $a+b+(-b)=a+b-b$, hvilket ifølge 40 tillæg er lig a.

46. Ved definitionen 2⁰ i 45 er opnaaet, at al tælling i talrækken saavel i den ene som i den anden retning kan sammenfattes under en benævnelse, addition, ligesom ogsaa under en betegnelse, $a+b$, naar a og b efter behag kan betyde enten positive eller negative størrelser. Er nemlig b positiv, betegner $a+b$ en tælling frem i talrækken; er derimod $b=-b'$, altsaa negativ, betegner $a+b$ en tælling tilbage, idet $a+b=a+(-b')=a-b'$.

Definitionen 3⁰ i 45 giver ogsaa adgang til at sammenfatte al tælling i talrækken under navnet subtraktion og under betegnelsen $a - b$. Er nemlig b positiv, betegner $a - b$ en tælling tilbage; er derimod b negativ og lig $-b'$, betegner $a - b$ en tælling frem, idet $a - b = a - (-b') = a + b'$.

Tagne i denne mest vidtstrakte betydning kaldes additionen og subtraktionen *algebraiske regningsarter.*

Den algebraiske addition.

47. *Læresætning: Den algebraiske sum bliver den samme, i hvilken orden man end tager addenderne.*

Forsaavidt addenderne er naturlige tal, er sætningens rigtighed givet fra kapitel I (se 27, 1⁰).

Er addenderne algebraiske størrelser (positive eller negative), falder beviset i flere partier:

1⁰. Summen har kun to addender. Der skal bevises, at

$$a + b = b + a.$$

Er én af addenderne 0, bliver summen lig den anden addend. Er saaledes $a = o$, da er $a + b = o + b = b$ (44, 4⁰), og $b + a = b + o = b$ (45, 1⁰). Altsaa $a + b = b + a$.

Er begge addender 0, bliver ogsaa begge summer 0.

Er begge addender negative, $a = -a'$ og $b = -b'$, da følger satsen af 45,2⁰ tillæg, idet $a + b = (-a') + (-b') = -(a' + b')$, og $b + a = (-b') + (-a') = -(b' + a') = -(a' + b')$. Altsaa $a + b = b + a$.

Er den ene addend positiv, den anden negativ, f. eks. a pos. og $b = -b'$ neg., da er $a + b = a + (-b') = \underline{a - b'}$, og $b + a = \underline{-b' + a}$; disse resultater falder stedse sammen, idet begge er lig den positive størrelse $+ (a - b')$, dersom $a > b'$, eller begge er lig den negative størrelse $-(b' - a)$, dersom $b' > a$. Altsaa $a + b = b + a$.

2⁰. Naar man fra et sted a i talrækken først skal tælle b pladse frem og derpaa c pladse tilbage,

bliver resultatet det samme, om man først tæller de c pladse tilbage og derpaa de b pladse frem.

Denne hjælpesats kan skrives:

$a + b - c = a - c + b$, hvor b og c er tal.

Thi: er $b = c$, bliver resultaterne af de to maader at tælle paa lig a.

Er $b > c$, kan vi sætte $b = c + k$ eller $c = b - k$. Resultatet af $a + b - c$ maa da blive $a + k$; thi tællingen $a + b$ fører frem til et sted, som ligger b pladse længere ude i talrækken end a, og naar man saa herfra tæller c pladse tilbage, hvilket er k pladse færre end b, maa man standse k pladse efter a, eller ved $a + k$. Men resultatet af $a - c + b$ maa ogsaa blive $a + k$; thi først skal der tælles c pladse tilbage fra a, og derpaa $b = c + k$ pladse frem, hvilket sidste bestaar i først at tælle c pladse frem, hvorved man erholder a som resultat, og derpaa videre k pladse frem, hvorved faaes $a + k$. Altsaa $a + b - c = a - c + b$.

Er $b < c$, kan vi sætte $c = b + k$ eller $b = c - k$ og føre væsentlig det samme ræsonnement som ovenfor.

3⁰. Naar man fra et sted a i talrækken først skal tælle b og derpaa videre c pladse tilbage, bliver resultatet det samme, om man fra a først tæller de c og derpaa de b pladse tilbage.

Denne hjælpesats kan skrives:

$a - b - c = a - c - b$, hvor b og c er tal.

Thi saavel $a - b - c$ som $a - c - b$ maa føre saa mange pladse tilbage fra a som tallene b og c indeholder enheder tilsammen.

4⁰. Summen har tre addender, $a + b + c$. Ifølge 1⁰ kan man stedse ombytte de to første addender, og ifølge 2⁰ og 3⁰ kan man ogsaa stedse ombytte de to sidste, da $a + b + c$ enten er $= a + b' + c'$ eller $= a + b' - c'$ eller $= a - b' + c'$ eller $= a - b' - c'$, hvor b' og c' er tal. Man faar da ved andenhver gang at ombytte de to første og de to sidste addender, at

$$a + b + c = b + a + c = b + c + a = c + b + a$$
$$= c + a + b = a + c + b.$$

5⁰. Summen har flere end tre addender, $a + b + c + d$. Man kan her stedse ombytte de to første og de to midterste; men man kan ogsaa ombytte de to sidste, idet man betragter summen af de to første som én addend, hvorved man kun har med tre addender at gjøre. Derved kan man efterhaanden faa udført alle mulige ombytninger af addenderne — hvilket skulde bevises.

Eks. $-20 + 7 + 15 - 6 = 7 - 20 + 15 - 6$
$= 7 + 15 - 20 - 6 = 15 - 20 + 7 - 6$ o. s. v. $= -4$.

Den algebraiske subtraktion.

Ved den algebraiske subtraktion finder man altid den størrelse, som adderet til subtrahenden giver en sum lig minuenden. (Se 32, 40, 45, 1⁰ og 45, 3⁰ tillæg).

48. Sætningerne i 34 om subtraktionen af naturlige tal, nemlig at den størrelse, som adderes til eller subtraheres fra minuenden, ogsaa bliver at addere til eller subtrahere fra differensen — gjælder ogsaa ved den algebraiske subtraktion.

Er $a - b = d$

saa er $(a + c) - b = d + c$ (I)
og $(a - c) - b = d - c$ (II).

Rigtigheden af disse satse er en ligefrem følge af læresætningen 47, at ordenen af addenderne i en algebraisk sum er ligegyldig.

$$a + c - b = a - b + c = d + c$$
$$\text{og } a - c - b = a - b - c = d - c.$$

49. Sætningerne i 35, at den størrelse, som adderes til eller subtraheres fra subtrahenden, maa — omvendt — subtraheres fra eller adderes til differensen, gjælder ogsaa ved den algebraiske subtraktion.

Er $a - b = d$

saa er $a - (b + c) = d - c$ (I)
og $a - (b - c) = d + c$ (II).

Beviset herfor falder i flere partier:

1⁰. Dersom b og c er tal, da bevises sats I saaledes: $a - (b + c)$ er efter 45, 2⁰ $= a + [-(b + c)]$ eller $= a + [(-b) + (-c)]$ ifølge 45, 2⁰ tillæg. Denne sidste sum er atter lig $(-b) + (-c) + a$ ifølge 47, og atter ifølge samme sætning lig $a + (-b) + (-c) = a - b - c = d - c$, da $a - b$ efter betingelsen er lig d. Altsaa er $a - (b + c) = d - c$, hvor a kan være enten positiv eller negativ.

2⁰. Sats II, som ifølge 35 er rigtig, naar a, b og c er tal og $b > c$ og $a > b$, bevises, hvis b og c er tal og $b < c$ og a enten positiv eller negativ, saaledes:

Da $b < c$, er $b - c$ negativ og $= -(c - b)$ ifølge 44, 3⁰. Man faar da:

$a - (b - c) = a - [-(c - b)] = a + (c - b)$ (45, 3⁰) $= c - b + a = a - b + c = d + c$. Altsaa $a - (b - c) = d + c$.

3⁰. Er b negativ og $= -b'$, men c som før et tal, da gaar betingelsen over til $a - (-b')$ eller $a + b' = d$.

Sats I bevises da saaledes: $a - (b + c) = a - (-b' + c) = a - (c - b')$, som ifølge 2⁰ er lig $a - c + b' = a + b' - c = d - c$.

Sats II bevises saaledes: $a - (b - c) = a - (-b' - c) = a - [-(b' + c)]$ (se 44, 6⁰) eller $= a + (b' + c) = b' + c + a = a + b' + c = d + c$.

4⁰. Er c negativ og $= -c'$, da gaar sats I og sats II over i hinanden, idet sats I bliver til $a - (b - c') = d + c'$ og sats II til $a - (b + c') = d - c'$, hvilke ligningers rigtighed er bevist i 1⁰, 2⁰ og 3⁰, idet c' er et tal.

Satsene I og II gjælder altsaa uden nogensomhelst indskrænkning, hv. sk. bev.

Monomer og Polynomer.

50. *Definitioner.* Naar en algebraisk størrelse (positiv eller negativ) forekommer flere gange som addend, betegner man

summen kortere ved at skrive størrelsen kun en gang og foran samme skrive det tal, som angiver, hvor mange gange størrelsen forekommer. Istedetfor $A + A + A$ skrives saaledes $3\,A$; istedetfor $-B - B - B$ skrives $-3\,B$; istedetfor $(x + y - z) + (x + y - z)$ skrives $2\,(x + y - z)$. En saadan størrelse som A eller $3\,A$ eller $-3\,B$ kaldes *et led* eller et *monom*. Tallet foran bogstavet kaldes leddets *koeficient*. Forekommer den algebraiske størrelse kun en gang, er leddets koeficient 1, som ikke skrives; $A = 1\,A$.

Monomer, der har samme bogstav, kaldes ensartede. F. eks. $2\,A$ og $3\,A$. En størrelse, som er sammensat af flere led eller monomer forbundne ved tegnene $+$ og $-$, kaldes et *polynom*. Er der kun 2 led, kaldes størrelsen ogsaa et *binom*; er der 3 led, kaldes den *trinom*.

Af sætning 47 følger, at i et polynom kan leddenes orden vilkaarlig forandres.

Eksempel. Hvilken størrelse betegner polynomet $3\,x - 2\,y + z - 10\,u$, naar $x = -5$, $y = 3$, $z = 7$ og $u = -2$?

Man har $3\,x = -15$, $2\,y = 6$, $10\,u = -20$; altsaa er

$$3\,x - 2\,y + z - 10\,u = -15 - 6 + 7 - (-20) =$$
$$= -15 - 6 + 7 + 20 = +6.$$

51. Ensartede leds addition:

1°. To ensartede led med samme fortegn kan sammendrages til ét derved, at man med bibehold af det fælles bogstav adderer deres koeficienter og beholder det fælles fortegn.

$3\,A + 2\,A = A + A + A + A + A = 5\,A$. $(5 = 3 + 2)$.
$2\,x + x = x + x + x = 3\,x$. $(3 = 2 + 1)$.
$-3\,y - 4\,y = -7\,y$.

2°. To ensartede led med modsatte fortegn kan sammendrages til ét derved, at man med bibehold af det fælles bogstav subtraherer den mindste koeficient fra den største og giver resultatet den største koeficients fortegn.

$$-5\,A + 2\,A = -3\,A, \text{ hvor } 5 - 2 = 3.$$

Thi $-5\,A + 2\,A = -A - A - A - A - A + A + A = +A - A + A - A - A - A - A$, idet leddenes orden kan forandres. Men her tilintetgjøres

de led, der har fortegnet + af et tilsvarende antal led med fortegnet —, idet + A — A = 0 og + A — A = 0, og som resultat faaes resten af leddene med —, eller — 3 A.

Ved hjælp af disse to regler kan et polynom, hvori der findes ensartede led, sammendrages til et nyt polynom med færre led.

Eks. $2x - y + 3x + 5z - 8y - 15z - 6u + 12y = ?$

Man kan ved forandring af leddenes orden skrive:

$$\underline{2x + 3x} \underline{- y - 8y + 12y} + \underline{5z - 15z} - 6u$$

$$\text{eller } 5x \qquad + 3y \qquad - 10x \quad - 6u.$$

52. Polynomers addition. Naar man til en størrelse skal addere et polynom, da er dette det samme som, at man til størrelsen føier det ene led i polynomet efter det andet med bibehold af leddenes fortegn.

$$P + (a - b + c) = P + a - b + c.$$

Thi $P + (a - b + c)$ er ifølge 47 $= (a - b + c) + P$. Men i det sidste udtryk er parenthesen overflødig, da skrivemaaden $a - b + c + P$ betegner netop de samme regninger. Altsaa faaes $P + (a - b + c) = a - b + c + P$ eller $= P + a - b + c$ ifølge 47; hv. sk. bev.

Tillæg. Denne sætning kan ogsaa udtales saaledes:

En parenthes med fortegnet + kan sløifes eller sættes efter behag.

At flere polynomer skal adderes betegnes ved at stille dem ved siden af hverandre i parentheser med + imellem. Additionen sker da ved at sløife parentheserne, forandre leddenes orden i det derved erholdte polynom saaledes, at de ensartede led kommer sammen, og endelig sammendrage disse efter reglerne i 51.

Mest hensigtsmæssigt er det at stille det ene polynom under det andet saaledes, at de ensartede led kommer lige under hverandre.

Eks. $(2x - 3y + z) + (5y - 8z - 3u) + (x - 2y - 3z + 4u) = ?$

$$\begin{array}{rrrr} 2x & - 3y & + z & \\ & + 5y & - 8z & - 3u \\ x & - 2y & - 3z & + 4u \\ \hline 3x & & - 10z & + u \end{array}$$ er summen.

53. Polynomers subtraktion. Naar man fra en størrelse skal subtrahere et polynom, da er dette det samme som til størrelsen at addere det polynom, som faaes ved at ombytte fortegnet foran ethvert led i det givne polynom, + med — og — med +.

$P - (a - b + c) = P + (-a + b - c)$ eller $= P - a + b - c$.

Denne sats er en ligefrem følge af sætn. 49, at den størrelse, som adderes til subtrahenden, bliver at subtrahere fra differensen, og den, som subtraheres fra subtrahenden, bliver at addere til differensen. Gaar vi nemlig ud fra ligningen

$$P - a = P - a$$

sluttes, at $P - (a - b) = P - a + b$

og heraf igjen, at $P - (a - b + c) = P - a + b - c$, hv. sk. bev.

Tillæg. Denne sætning kan ogsaa udtales saaledes:

En parenthes med fortegnet — kan sløifes, idet man overfører dette — paa parenthesens første led og lader ethvert af dens øvrige led skifte fortegn.

F. eks. $(2a + 3b) - (-2c + a - 3b) = 2a + 3b - (-2c) - a + 3b$ eller $= 2a + 3b + 2c - a + 3b$.

Omvendt kan man indeslutte flere led i en parenthes med fortegnet —, naar man samtidig giver de indesluttede led modsatte fortegn.

F. eks. $3m + n - 6m + 3n - 2p = 3m + n - (6m - 3n + 2p)$.

Subtraktionen af to polynomer udføres efter 53 ved at stille subtrahenden under minuenden saaledes, at de ensartede led kommer under hinanden, derpaa skifte fortegnene i subtrahenden og addere som i 52 forklaret.

F. eks. $2a + 3b) - (-2c + a - 3b) = ?$

$$\begin{array}{rrrr} 2a & + 3b & & \\ + a & - 3b & - 2c & \\ - & + & + & \\ \hline a & + 6b & + 2c & \end{array}$$

, som er differensen.

Udvidet brug af sammenligningsordene „lig“, „større“ og „mindre“.

54. Tagne med den i 14 angivne betydning kan disse sammenligningsord ikke komme til anvendelse paa algebraiske størrelser i almindelighed, da hverken nul eller de negative størrelser repræsenterer samlinger af enheder i samme forstand som de positive (de naturlige tal). Denne begrændsning af sammenligningsordenes anvendelse ophæves til fordel for algebraen ved at benytte dem med følgende mening: En størrelse siges at være lig, større eller mindre end en anden alt efter som differensen, tagen mellem den første som minuend og den anden som subtrahend, er nul, positiv eller negativ.

Er $a - b = 0$, siges a at være lig b ($a = b$).

Er $a - b = k =$ en positiv størrelse, siges a at være større end b ($a > b$).

Er $a - b = -k' =$ en negativ størrelse, siges a at være mindre end b ($a < b$).

Denne brug af sammenligningsordene falder sammen med den oprindelige i alle tilfælde, hvori denne kan anvendes. Hvis nemlig en størrelse indeholder lige mange enheder som en anden af samme art, da vil deres differents være nul; indeholder den første størrelse enheden flere eller færre gange end den anden, da vil deres differens i første tilfælde være positiv, i andet tilfælde negativ. Og omvendt, naar differensen er nul, indeholder minuenden og subtrahenden lige mange enheder, og naar differensen er positiv, indeholder minuenden enheden flere gange end subtrahenden.

Ved siden heraf medfører den nye brug af sammenligningsordene følgende udtryksmaader:

1⁰. En positiv størrelse er større end nul og større end enhver negativ.

Er nemlig a og k positive størrelser, da er ifølge 45, 1⁰ og 3⁰

$a - 0 = a =$ en positiv størrelse,

og $a - (-k) = a + k =$ en positiv størrelse.

2⁰. Nul er større end enhver negativ størrelse.
Thi $0 - (-k) = 0 + k = k =$ en positiv størrelse.

3⁰. Af to negative størrelser er den størst, hvis talværdi er mindst.

Er nemlig k og l de to talværdier og endvidere $k < l$, saa er $(-k) - (-l) = -k + l = l - k =$ en positiv størrelse, da $l > k$.

Den forestilling, at man kommer til større tal ved at flytte sig til høire i talrækken og til mindre ved at flytte sig til venstre, er herved blevet udbredt til hele rækken af de algebraiske størrelser:

$$\cdots, -k, \cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \cdots k \cdots$$

Tillæg. De i 20—24 anførte grundsætninger eller aksiomer udvider man til ogsaa at gjælde ved sammenligninger mellem algebraiske størrelser.

Om lighed og ulighed mellem to algebraiske summer og mellem to algebraiske differenser.

55.

1⁰. *Naar man til lige store størrelser adderer lige store størrelser, faaes lige store summer;* og

2⁰. *Naar man fra lige store størrelser subtraherer lige store størrelser, faaes lige store differenser.*

$$\begin{array}{rl} \text{Er} & a = b \\ \text{og} & c = d \\ \hline \text{saa er} & a + c = b + d \quad \text{(I)} \\ \text{og} & a - c = b - d \quad \text{(II).} \end{array}$$

Rigtigheden af begge disse satse følger ligefrem af de to aksiomer, at enhver størrelse er lig sig selv, og at man i stedet for en størrelse kan sætte en dermed lige stor. Ifølge den første af disse har man nemlig lighederne $a + c = a + c$ ligesom $a - c = a - c$, og naar man her paa høire side af lighedstegnene ombytter a med b og c med d (se betingelsen), erholdes de to satse.

56.

1⁰. *Naar man til ulige store størrelser adderer lige store størrelser, bliver den sum størst, hvis ene addend er den største af de to ulige store størrelser;* og

2⁰. *Naar man fra ulige store størrelser subtraherer lige store størrelser, bliver den differens størst, hvis minuend er størst.*

$$\begin{array}{rl} & \text{Er } a > b \\ & \text{og } c = d \\ \hline \text{saa} & \text{er } a + c > b + d \text{ (I)} \\ & \text{og } a - c > b - d \text{ (II).} \end{array}$$

Thi at $a > b$, betyder, at $a - b = k =$ en positiv størrelse. Heraf følger (se 32, 40 og 45, 1⁰ og 3⁰ tillæg), at

$a = b + k.$

Adderes $c = d$

faaes $a + c = b + k + d$ eller $= (b + d) + k$ (se 47).

Men naar man til $(b + d)$ maa addere den positive størrelse k for at opnaa lighed med $a + c$, da følger heraf, at differensen mellem $a + c$ og $b + d$ er den positive størrelse k (se 40, tillæg), eller at $a + c > b + d$, hvilket er sats (I).

Hvis man fra $a = b + k$

subtraherer $c = d$

faaes $a - c = b + k - d$ eller $= (b - d) + k$ (47), hvoraf paa samme maade som ovenfor fremgaar, at $a - c > b - d$, hvilket er sats (II).

57. *Naar man fra lige store størrelser subtraherer ulige store størrelser, bliver den differens mindst, hvis subtrahend er størst.*

$$\begin{array}{rl} & \text{Er } a = b \\ & \text{og } c > d \\ \hline \text{saa} & \text{er } a - c < b - d. \end{array}$$

Thi at $c > d$ vil sige, at $c - d = k =$ en positiv størrelse, og heraf følger, at $c = d + k$.

Ved fra $a = b$
at subtrahere $c = d + k$

faaes $a - c = b - (d + k)$ eller $= (b - d) - k$ (se 53, tillæg).
Subtraheres $b - d$ $= b - d$

faaes $(a - c) - (b - d) = -k =$ en negativ størrelse
eller $a - c < b - d$, hv. sk. bev.

58. *Naar man til den største af to størrelser adderer en større størrelse end til den mindste, bliver summen størst der, hvor addenderne er størst.*

Er $a > b$
og $c > d$

saa er $a + c > b + d$.

Thi ved til $a > b$ og ved til $b = b$
at addere $c = c$ at addere $c > d$

faaes $a + c > b + c$ (se 56) faaes $b + c > b + d$ (56),
hvoraf sluttes efter aksiomet i 24 at
$a + c > b + d$, hv. sk. bev.

59. *Naar man fra den største af to størrelser subtraherer en mindre størrelse end fra den mindste af dem, bliver differensen størst der, hvor minuenden er størst og subtrahenden er mindst.*

Er $a > b$
og $c < d$

saa er $a - c > b - d$.

Thi ved fra $a > b$ og ved fra $b = b$
at subtrahere $c = c$ at subtrahere $c < d$

faaes $a - c > b - c$ (se 56, 2°) faaes $b - c > b - d$ (se 57),
hvoraf følger, at $a - c > b - d$, hv. sk. bev.

De negative størrelsers nytte og realitet.

60. Den foregaaende fremstilling indeholder allerede flere prøver paa, af hvad art de fordele er, som søges opnaaede ved de negative størrelsers indførelse i mathematikken. Vi har seet,

hvordan definitionen af opgaven at subtrahere to naturlige tal a og b (a — b), hvilken oprindelig var underkastet den begrændsning, at a maatte være større end b, er blevet gjennem indførelsen af negativerne hævet ud over denne begrændsning, saa at a — b er blevet udtryk for en i alle tilfælder udførbar tælling. Samtidig har subtraktionen ligesom ogsaa den med navnet „addition" og med a + b betegnede opgave faaet en større rækkevidde derved, at den plads a, fra hvilken tællingen skal begynde, gjerne kan ligge bag 0, altsaa blandt negativerne. Fremdeles har saavel additionen, a + b, som subtraktionen, a — b, modtaget en end yderligere udvidet betydning, idet samtlige addender ligesom baade minuenden og subtrahenden kan være algebraiske størrelser i stedet for naturlige tal (se 44, 45 og 46). Endelig er de læresætninger, som ifølge kapitel I gjælder om additioner og subtraktioner med naturlige tal (se 27, 32, 33, 34, 35 og 36) hævede til almindelig gyldighed, idet de er bragte til at gjælde for algebraiske størrelser overhovedet (se 47, 48, 49 og 52). I den efterfølgende fremstilling af de øvrige regningsarter vil det paa samme maade som her vise sig, at de negative størrelser altid har denne ene og samme bestemmelse: at befrie definitioner og læresætninger fra de begrændsninger, hvormed de oprindelig er beheftede, og give dem almindelig anvendelighed.

61. Vi har indført de negative størrelser uden at knytte nogen forestilling om realitet til dem. Medens de positive størrelser (de naturlige tal) er mængder af enheder af en vis art, tænkte vi os de negative nærmest kun som nummere (mærkede med kjendetegnet —) paa en ubegrændset række pladse, som tilføies til talrækken bag 0. Vi skal nu vise, at der dog tilkommer de negative størrelser en lige saa fuldkommen realitet som de positive, og at hine lige som disse lader sig opfatte som mængder af virkelige enheder, kun af en anden art.

Naar en negativ størrelse fremkommer som resultatet af en tælling i talrækken — eller altsaa ved sumeringen af et polynom — da angiver dens talværdi ikke blot paa hvilket sted bag 0 tællingen standser, men ogsaa hvormange enheder summen af polynomets subtrahender indeholder flere end

summen af dets addender. Af dette princip fremgaar let for hvert enkelt tilfælde, hvilken reel mening den fremkomne negative størrelse har. Dette oplyses bedst i forbindelse med bestemte eksempler.

Inden vor begrebskreds mærke vi os en gruppe af kvantitative begreber, hvilke parvis ere af modsat art; saaledes: indtægt og udgift, — eiendom og gjæld, — indførsel og udførsel, — bevægelse i én retning og bevægelse i den modsatte retning, — o. s. v., alle betragtede med hensyn paa kvantiteten. Disse modsatte størrelser foranlediger en række af opgaver, hvori det gjælder at finde resultatet af visse forbindelser af dem, og som kan opstilles i form af et polynom — eller af en algebraisk sum, om man vælger at skrive subtrahenderne i form af negative addender —; det søgte resultat findes da ved at sumere dette polynom.

1ste eksempel. En forretning gav det første aar et udbytte af 800 kr., det andet aar et tab af 2000 kr. og det tredie aar et udbytte af 500 kr. Hvor stort var nettoudbyttet af de 3 aar?

Det søgte nettoudbytte erholdes ved at opføre de tjente beløb som addender og det tabte som subtrahend eller negativ addend og derpaa sumere. Altsaa:

$$\begin{aligned} &800 \text{ kr.} - 2000 \text{ kr.} + 500 \text{ kr.} \\ \text{eller } &800 \text{ kr.} + (-2000 \text{ kr.}) + 500 \text{ kr.} \end{aligned} = -700 \text{ kr.}$$

Som resultat har vi altsaa faaet, at nettoudbyttet er — 700 kr. Da den negative størrelse — 700 kr. angiver, at polynomets subtrahend ɔ: de tabte 1000 kr. er 700 kr. større end summen af dets addender ɔ: af de tjente beløb 800 kr. + 500 kr., saa forstaaes det heraf, at forretningen i de 3 aar saa langt fra at have givet noget udbytte tvertom har bragt et tab af 700 kr. Heraf følger, at et udbytte af — 700 kr. er ensbetydende med et tab af 700 kr. Saavel den negative sum — 700 kr. som den negative addend — 2000 kr. repræsenterer altsaa i denne opgave mængder af virkelige enheder nemlig af tabte kroner — i modsætning til de positive addender 800 kr. og 500 kr., hvilke er mængder af tjente kroner. — Det negative svar kunde være undgaaet, idet man paa forhaand forvissede sig om, at tabet ved forretningen var større end

gevinsten og overensstemmende hermed stillede spørgsmaalet i opgaven saaledes: Hvor stort tab bragte forretningen i de 3 aar? Fra de tabte 2000 kr. fik man da at subtrahere de tjente beløb 800 kr. og 500 kr.; altsaa:

$$2000 \text{ kr.} - 800 \text{ kr.} - 500 \text{ kr.} = 700 \text{ kr.}$$

2det eksempel. Et paa en ret linie bevægeligt punkt flytter sig fra udgangsstedet 0 først 4 cm til høire, derfra videre 2 cm til høire, saa 9 cm til venstre, saa 7 cm til høire og endelig 6 cm til venstre. Hvor langt til høire for udgangsstedet 0 befinder punktet sig herefter?

I overensstemmelse med dette spørgsmaal maa man opføre flytningerne mod høire som addender og flytningerne mod venstre som subtrahender eller negative addender; altsaa:

$$\begin{array}{l} 4^{\text{cm}} + 2^{\text{cm}} - 9^{\text{cm}} + 7^{\text{cm}} - 6^{\text{cm}} \\ \text{eller } 4^{\text{cm}} + 2^{\text{cm}} + (-9^{\text{cm}}) + 7^{\text{cm}} + (-6^{\text{cm}}) \end{array} = -2^{\text{cm}}.$$

Punktet skal altsaa ligge -2^{cm} til høire for udgangsstedet 0. Da den negative størrelse -2^{cm} angiver, at summen af subtrahenderne ɔ: af de til venstre flyttede længder er 2^{cm} større end summen af addenderne ɔ: af de til høire flyttede længder, saa forstaaes det heraf, at punktet maa være kommet 2^{cm} til venstre for udgangsstedet 0. Dette resultat vil ogsaa ligefrem erholdes, om man stiller spørgsmaalet i opgaven saaledes: Hvor langt til venstre for 0 ligger punktet efter flytningerne? Da maa flytningerne til venstre tages som addender og flytningerne til høire som subtrahender; altsaa:

$$9^{\text{cm}} + 6^{\text{cm}} - 4^{\text{cm}} - 2^{\text{cm}} - 7^{\text{cm}} = 2^{\text{cm}}.$$

Heraf fremgaar, at den Angivelse, at et punkt ligger $+2^{\text{cm}}$ til høire for et andet punkt 0, er ensbetydende med, at det ligger 2^{cm} til venstre for samme. Saavel det negative svar -2^{cm} som de negative addender -9^{cm} og -6^{cm} er her mængder af virkelige enheder nemlig af centimetere, som maales mod venstre, i modsæsning til de positive addender 4^{cm}, 2^{cm} og 7^{cm}, som er mængder af centimetere, som maales mod høire.

I de her behandlede opgaver har saaledes negativerne vist

sig at have fuld realitet, og vi har kun at tilføie, at den mathematiske erfaring i alle tilfælder finder dette bekræftet.

I de behandlede eksempler er vist, at det ikke er nogen nødvendighed at benytte negative størrelser i disse opgaver, idet man ved paa forhaand at forvisse sig om resultatets art og stille spørgsmaalet i opgaven i overensstemmelse hermed aldrig behøver at komme udenfor de naturlige tals omraade. Anvendelsen af algebraiske størrelser medfører dog som væsentlig fordel en enhed i behandlingsmaaden af denne slags opgaver, hvilken maa undværes, om man kun vil bruge de naturlige tal. I sidste tilfælde maa nemlig de „modsatte" kvantitative begreber — f. eks. gevinst og tab — holdes strengt adskilte; hertil svarer de to særskilte benævnelser paa dem, ligesom to adskilte talrækker over dem:

1 kr. gevinst, 2 kr. gev., 3 kr. gev., 4 kr. gev. . . . o. s. v. . .
1 kr. tab, 2 kr. tab, 3 kr. tab, 4 kr. tab, . . . o. s. v. . .

Og stiller man et almindeligt problem angaaende „modsatte størrelsers" indvirkning paa hinandan, — f. eks.: Hvordan findes resultatet af en gevinst af a kr. og et tab af b kr.? — da maa løsningen ligeledes fremstilles i to adskilte regler, nemlig: 1°. Er $a > b$, da bliver resultatet en gevinst saa stor som differensen mellem a og b; 2°. Er $a < b$, da bliver resultatet et tab saa stort som differensen mellem b og a.

Anvendes derimod algebraiske størrelser, da svarer dette til, at man i formen opfatter de to modsatte kvantitative begreber, — f. eks. gevinst og tab — som ét begreb og sammenfatter dem begge under én benævnelse, eksempelvis enten under navnet gevinst eller under navnet tab, og opfører dem i én talrække; saaledes:

— 3 kr. gev., — 2 kr. gev., — 1 kr. gev., 0 kr. gev., 1 kr. gev., 2 kr. gev.

Stilles nu atter det samme problem som ovenfor, da kan dets løsning angives i én enkelt regel: Man tager i alle tilfælder den algebraiske sum af den positive og negative fortjeneste, a kr. + (— b kr.) eller a kr. — b kr. —

Kapitel III.

Multiplikation.

62. *Definitioner.* Multiplikation kaldes den regningsart, som gaar ud paa at søge summen af to eller flere lige store addender. Den størrelse, som gjentages to eller flere gange som addend, kaldes *multiplikanden.* Det tal, som angiver, hvor mange gange multiplikanden skal gjentages som addend, kaldes *multiplikator.* Den udkomne sum kaldes *produkt.*

Multiplikationen betegnes ved at man skriver tegnet $\times$ eller · mellem multiplikanden og multiplikator, saaledes at den første staar foran tegnet. $A \times 3$ eller $A \cdot 3$ (læses A multipliceret med 3 eller A gange 3 eller produktet af A og 3) betegner saaledes summen $A + A + A$. Er multiplikator et bogstav, betegnes multiplikationen ved at skrive multiplikanden og multiplikator ved siden af hinanden uden noget tegn imellem; saaledes:

An betegner $A + A + A + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_n$.

Tillæg. Multiplikationen kræves af det daglige liv i alle saadanne opgaver, hvori det gjælder at bestemme værdien af en flerhed af enheder af en vis art, naar værdien af en enkelt enhed er bekjendt. Er saaledes prisen paa 1 meter 8 kr., og man vil vide prisen paa 4 meter, da maa man søge summen af 8 kr. + 8 kr. + 8 kr. + 8 kr. eller altsaa multiplicere 8 kr. med 4, hvorved faaes 32 kr. Fremdeles, da 1 meter er 100 cm., omgjøres f. eks. 3 meter til cm. ved at søge summen af 100 cm. + 100 cm. + 100 cm. = 100 cm. $\times$ 3 = 300 cm. o. s. v.

63. Af definitionen følger:

1⁰. Er multiplikanden lig 1, bliver produktet ligt multiplikator.

$$1 \times 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5.$$

2⁰. Er multiplikanden 0, bliver ogsaa produktet 0.

$$0 \times 3 = 0 + 0 + 0 = 0.$$

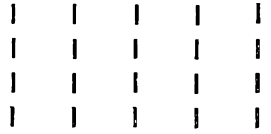
3⁰. Er multiplikanden en negativ størrelse, bliver ogsaa produktet en negativ størrelse, hvis talværdi er produktet af multiplikandens talværdi og multiplikator.

$$(-A) \cdot 4 = (-A) + (-A) + (-A) + (-A) = -(A + A + A + A) = -(A \times 4).$$

Denne sidste regel grunder sig altsaa paa regelen i 45, 2⁰ tillæg.

64. *Læresætning. Produktet af to tal bliver det samme, om multiplikator tages til multiplikand og multiplikanden til multiplikator.*

Produktet af 5×4 er saaledes ligt produktet af 4×5. Thi hvis man skriver op i en horisontal linie saa mange enheder, som der er i multiplikanden 5, og gjentager denne linie saa mange gange, som der er enheder i multiplikator 4, altsaa saaledes:



da tilveiebringes herved alle de enheder, som indeholdes i produktet af $5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5$. Men den samme mængde af enheder kan ogsaa grupperes saaledes, at der fremkommer $4 + 4 + 4 + 4 + 4$ eller produktet af 4×5, idet der er 5 vertikale kolonner, hver indeholdende 4 enheder. Følgelig er $5 \times 4 = 4 \times 5$.

Tillæg. Multiplikand og multiplikator kaldes med ét navn *faktorer*.

65. *Definitioner.* Anvendelsen af navnet „multiplikation" ligesom af betegnelsesmaaden a . n med den i 62 angivne betydning er begrændset derved, at multiplikator n maa være et naturligt tal og mindst lig 2, idet en sum maa have mindst 2 addender. Denne begrændsning ophæves ved de følgende definitioner.

1⁰. En størrelse multipliceret med enheden betegner størrelsen selv.

$$A \times 1 = A.$$

Tillæg. Da ifølge 63, 1⁰ $1 \times A = A$, forudsat at A er et naturligt tal, saa er ved definitionen i 1⁰ opnaaet, at læresætningen 64 er gjort anvendelig ogsaa da, naar multiplikator er 1. (Nødvendigheden af den forudsætning,

at A er et naturligt tal, ophæves gjennem de efterfølgende definitioner).

2⁰. En størrelse multipliceret med 0 betegner 0.

$$A \times 0 = 0.$$

Tillæg. Da ifølge 63, 2⁰ $0 \times A = 0$, forudsat at A er et naturligt tal, saa er ved definitionen i 2⁰ læresætningen 64 bragt til at gjælde ogsaa da, naar multiplikator er 0.

3⁰. En størrelse multipliceret med en negativ størrelse betegner produktet af den første størrelse taget med fortegnet — gange den negative størrelses talværdi.

$$A \,.\, (-k) = (-A) \,.\, k.$$

Tillæg I. Ved denne definition er læresætningen 64 bragt til at gjælde ogsaa da, naar en af faktorerne er negativ.

Tillæg II. Produktet af to negative størrelser betegner det positive produkt af deres talværdier.

Thi ifølge 3⁰ er:

$$(-A) \,.\, (-k) = (-(-A)) \,.\, k = (+A) \,.\, k = +Ak.$$

Tillæg. Da saavel $(-A) \,.\, (-k)$ som $(-k) \,.\, (-A)$ er lig $+Ak$ eller $+(kA)$, saa gjælder følgelig læresætningen 64 ogsaa da, naar begge faktorer er negative.

66. Af det foregaaende kan uddrages følgende regel om algebraiske størrelsers multiplikation:

Naar multiplikand og multiplikator har samme fortegn, er deres produkt positivt; naar de har modsat fortegn, er deres produkt negativt.

Thi $(+k) \,.\, (+l) = +kl$ ifølge 62
$(-k) \,.\, (-l) = +kl$ „ 65, 3⁰, tillæg II.
$(-k) \quad (+l) = -kl$ „ 63, 3⁰
$(+k) \quad (-l) = -kl$ „ 65, 3⁰.

---

67. Af definitionen af multiplikation følger, at et leds koeficient kan regnes som den ene faktor i et produkt, hvis anden faktor er den bogstavstørrelse, hvortil koeficienten er knyttet. Ifølge 50 betegner saaledes 3 A summen $A + A + A$;

men dette er tillige produktet af A $\times$ 3 eller af 3 $\times$ A, da faktorernes orden er ligegyldig.

Produkter af flere end to faktorer.

68. Ved produktet af flere faktorer, a b c d . . . forstaaes det resultat, som erholdes ved at multiplicere den første faktor a med den anden b, derpaa det saaledes erholdte produkt a b med den tredie faktor c, derpaa dette nye produkt a b c med den fjerde faktor d o. s. v.

69. *Læresætning. I et produkt af flere faktorer kan man paa en hvilkensomhelst maade forandre ordenen af faktorerne.*

Ifølge 64 og 65 gjælder sætningen i tilfælde af to faktorer. Beviset for, at den gjælder for et hvilketsomhelst antal faktorer falder i fire partier; i de tre første af disse er forudsætningen den, at samtlige faktorer er naturlige tal.

1°. I et produkt af tre tal kan man ombytte de to sidste faktorer.

Saaledes er de to produkter 6 $\times$ 5 $\times$ 4 og 6 $\times$ 4 $\times$ 5 lige store.

Thi opskrives i en horisontal linie tallet 6 5 gange og gjentages denne linie 4 gange, altsaa saaledes:

6	6	6	6	6
6	6	6	6	6
6	6	6	6	6
6	6	6	6	6

da er summen af tallene i en og samme horisontale linie lig produktet af 6 $\times$ 5, og da der er 4 horisontale linier, saa er summen af samtlige tal lig produktet af 6 $\times$ 5 $\times$ 4. Men anderledes betragtet ser man, at summen af tallene i en og samme vertikale kolonne er lig produktet af 6 $\times$ 4, og da der er 5 vertikale kolonner, saa bliver summen af samtlige tal ogsaa lig produktet 6 $\times$ 4 $\times$ 5. Følgelig er 6 $\times$ 5 $\times$ 4 = 6 $\times$ 4 $\times$ 5.

Regelen gjælder fremdeles, om den ene af de to sidste

faktorer er 1, idet begge produkter da bliver lig produktet af de to andre faktorer. Saaledes er $6 \times 5 \times 1 = 6 \times 1 \times 5$, idet begge er lig 6×5. (Se 63, 1⁰ og 65, 1⁰).

Endvidere gjælder regelen, om den ene af de to sidste faktorer er 0, idet begge produkter da bliver 0. Saaledes er $6 \times 5 \times 0 = 6 \times 0 \times 5 = 0$. (Se 63, 2⁰ og 65, 2⁰).

2⁰. I et produkt af tre tal kan man paa en hvilkensomhelst maade ombytte faktorerne.

Thi ifølge 64 kan man ombytte de to første faktorer, og vi har netop seet, at man kan ombytte de to sidste. Udføres disse ombytninger turvis, faaes

$$6 \times 5 \times 4 = 5 \times 6 \times 4 = 5 \times 4 \times 6 = 4 \times 5 \times 6 = 4 \times 6 \times 5 = 6 \times 4 \times 5,$$

hvilket er alle ombytninger, som er mulige med tre faktorer.

3⁰. Har produktet flere end tre faktorer, f. eks. abcd, saa kan man stedse ombytte den første og anden faktor og den anden og tredie faktor; men man kan ogsaa ombytte den tredie og fjerde, idet man kan betragte produktet af de to første faktorer som én faktor, hvorved man kun faar med tre faktorer at gjøre, og da har man lov til at ombytte. Paa denne maade kan man efterhaanden faa udført alle mulige ombytninger af faktorerne.

4⁰. Er faktorerne algebraiske størrelser, saa gjælder sætningen fremdeles.

Thi ifølge det foregaaende forandres ikke produktets talværdi, om man forandrer ordenen af faktorerne, da denne talværdi er lig produktet af faktorernes talværdier. Men heller ikke produktets fortegn forandres; thi ifølge 66 maa dette altid være +, naar antallet af de negative faktorer er 2, 4, 6 o. s. v., men —, naar antallet af de negative faktorer er 1, 3, 5 o. s. v.; og eftersom altsaa fortegnet alene beror paa de negative faktorers antal og ikke paa deres plads, er det følgelig uafhængigt af faktorernes orden.

Tillæg I. Istedetfor at multiplicere en størrelse med et produkt af flere faktorer kan man

multiplicere størrelsen først med den ene af disse faktorer, derpaa det udkomne med den anden o. s. v.

$$A \,.\, (m\, n\, p) = A \,.\, m \,.\, n \,.\, p.$$

Thi ifølge læresætningen er $A \,.\, (m\, n\, p) = (m\, n\, p) \,.\, A$; men istedetfor dette sidste produkt kan man med samme betydning skrive $m\, n\, p\, A$, hvilket ifølge læresætningen atter er ligt $A \,.\, m \,.\, n \,.\, p$.

Tillæg II. I et produkt af flere faktorer kan man erstatte et hvilketsomhelst antal faktorer med disses udregnede produkt.

$$a\, b\, c\, d\, e\, f = a\, (b\, c\, d) \,.\, e\, f = a\, (b\, c) \,.\, (d\, e\, f) \text{ o. s. v.}$$

Man kan nemlig stille de faktorer, hvis produkt man vil regne som én faktor, først, og da er tilladeligheden heraf øiensynlig.

Saaledes er $a\, b\, c\, d\, e\, f = b\, c\, d\, a\, e\, f = (b\, c\, d)\, a\, e\, f = a\, (b\, c\, d)\, e\, f$ eller

$a\, b\, c\, d\, e\, f = b\, c\, a\, d\, e\, f = (b\, c)\, a\, d\, e\, f = (d\, e\, f)\, (b\, c) \,.\, a = a\, (b\, c) \,.\, (d\, e\, f)$.

Tillæg III. Naar man multiplicerer én af faktorerne i et produkt med en størrelse, saa bliver produktet selv multipliceret med denne størrelse.

Er $a\, b\, c\, d = p$

saa er $(a\, n) \,.\, b\, c\, d = a\, (b\, n)\, c\, d = a\, b\, (c\, n)\, d = a\, b\, c\, (d\, n) = p\, n$.

Thi man har ligefrem, at $a\, b\, c\, d\, n = p\, n$; men ifølge læresætningen samt tillæg II kan man istedetfor $a\, b\, c\, d\, n$ sætte enten $(a\, n)\, b\, c\, d$ eller $a\, (b\, n)\, c\, d$ eller $a\, b\, (c\, n)\, d$ eller $a\, b\, c\, (d\, n)$; hermed er satsen bevist.

70. *Definitioner.* Et produkt, hvori alle faktorer er en og samme størrelse, kaldes *en potens* af denne størrelse. Den faktor, som saaledes gjentages flere gange, kaldes *roden*. Faktorernes antal kaldes *eksponenten*. $a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a$ kaldes saaledes femte potens af a; og i almindelighed: $a \,.\, a \,.\, a \,.\, .\, .\, a_n$ kaldes n^{te} potens af a. a er roden, og n eksponenten. Istedet-

for n^{te} potens af a siger man ogsaa „a ophøiet i n^{te} potens“ eller blot „a i n^{te}“.

En potens betegnes derved, at man skriver roden kun én gang og ovenfor og til høire for samme skriver eksponenten. Istedetfor 5te potens af a eller a . a . a . a . a skrives saaledes a^5, og i almindelighed: $a \cdot a \cdot a \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot a_n = a^n$.

2^{den} potens af en størrelse kaldes ogsaa *kvadratet* af størrelsen, og 3^{die} potens *kuben* af størrelsen. $8^2 = 8 \times 8 = 64$ kaldes kvadratet af 8, og $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ kaldes kuben af 2.

Uagtet et produkt mindst maa have to faktorer, er det dog hensigtsmæssigt at bruge talemaaden „1ste potens“ af en størrelse og herved forstaa størrelsen selv. Altsaa $a = a^1$. Eksponenten 1 skrives dog aldrig.

71. Af tillæg I til sætn. 69 fremgaar følgende regel:

Produktet af to potenser af samme rod er en ny potens af denne rod, hvis eksponent er summen af faktorernes eksponenter.

Saaledes er $a^4 \cdot a^3 = a^{4+3} = a^7$.

Thi a^4 er et produkt af 4 faktorer, hver lig a. Naar nu dette produkt skal multipliceres med a^3, som er et produkt af 3 faktorer, hver lig a, saa sker dette ved at multiplicere først a^4 med a, saa det udkomne med a og saa atter det udkomne med a. Men herved erholdes et produkt, som indeholder a saa mange gange som faktor, som eksponenterne 4 og 3 tilsammen angiver. Altsaa $a^4 a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7 = a^{3+4}$.

Regelen gjælder ogsaa, om den ene eller begge eksponenter er 1. Thi $a^4 \cdot a^1 = a^4 \cdot a = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5 = a^{4+1}$. Ligesaa $a^1 \cdot a^1 = a \cdot a = a^2 = a^{1+1}$.

Regelen gjælder endvidere, om man har flere end to potenser. Har man saaledes $a^4 \times a^3 \times a^5$, da skal man først multiplicere a^4 med a^3, hvorved faaes a^{4+3}; dernæst skal dette resultat multipliceres med a^5, hvorved faaes a^{4+3+5}, idet vi her kun har regnet med to potenser ad gangen.

I almindelighed har man altsaa, at

$$a^n \cdot a^p \cdot a^q \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = a^{n+p+q+\cdots}$$

hvor n, p, q, · · · er hvilkesomhelst naturlige tal.

72. *Monomers multiplikation.* Ifølge 67 er et monom et produkt af koeficienten og bogstavstørrelsen. Denne sidste kan ogsaa være et produkt af flere faktorer. F. eks. $3\,a\,b = a\,b + a\,b + a\,b = a\,b\,.\,3 = 3\,a\,.\,b$; $2\,m^3\,n^2\,p = m^3\,n^2\,p + m^3\,n^2\,p = m^3\,n^2\,p\,.\,2 = 2\,.\,m\,.\,m\,.\,m\,.\,n\,.\,n\,.\,p$.

Produktet af 2 monomer dannes ved at anvende sætningen 69 samt dennes tillæg I og II. Har vi saaledes produktet

$$2\,a^3\,b^2 \times 4\,a\,b^3\,c,$$

saa kan vi multiplicere det første monom med 4, derpaa det udkomne med a, derpaa det udkomne med b^3 og endelig atter det udkomne med c. Herved faaes $2 \times a^3 \times b^2 \times 4 \times a \times b^3 \times c$. Omordnes her faktorerne, saaledes at koeficienterne følger efter hinanden, og potenserne af samme rod kommer ved siden af hverandre, faaes $2 \times 4 \times a^3 \times a \times b^2 \times b^3 \times c$. Endelig kan vi ombytte to eller flere særskilte faktorer med sammes produkt, nemlig $2 \times 4 = 8$, $a^3\,.\,a = a^4$ og $b^2\,.\,b^3 = b^5$. Altsaa bliver resultatet:

$$2\,a^3\,b^2 \times 4\,a\,b^3\,c = 8\,a^4\,b^5\,c.$$

Paa samme maade faaes:

$5\,m\,n\,.\,2\,m\,p\,q = 10\,m^2\,n\,p\,q.$

$3\,a^3\,x\,.\,a^2\,y\,.\,4\,x^3\,y = 3\,a^5\,x\,y\,.\,4\,x^3\,y = 12\,a^5\,x^4\,y^2.$

Polynomers multiplikation.

73. *Læresætning. Et polynom multipliceres med en størrelse ved at multiplicere hvert led i polynomet med størrelsen med bibehold af leddenes fortegn.*

Sats: $(A + B - C)\,.\,n = A\,n + B\,n - C\,n.$

Thi $(A + B - C)\,.\,n$ betegner, naar n er et naturligt tal, at polynomet skal tages n gange som addend; men derved kommer ogsaa hvert enkelt led til at forekomme n gange som addend.

$(A + B - C)\,.\,n = (A + B - C) + (A + B - C) + (A + B - C) + \cdots\cdots + (A + B - C)_n = A + B - C + A + B - C + A + B - C + \cdots\cdots + A_n + B_n - C_n,$

idet parentheser med fortegnet + kan sløifes (se 52 tillæg)

Ved at omordne leddene og paa ny sætte parentheser faaes videre (ifølge 47 og 53 tillæg):

$(A + A + A + \ldots\ldots + A_n) + (B + B + B + \ldots\ldots + B_n)$
$- (C + C + C + \ldots\ldots + C_n)$ eller $A \,.\, n + B \,.\, n - C \,.\, n$.

Satsen er ogsaa rigtig, naar $n = 1$, idet saavel den til venstre som den til høire for lighedstegnet staaende størrelse i saa fald er lig $A + B - C$.

Satsen gjælder fremdeles, naar $n = 0$, idet saavel venstre som høire side da er 0.

Endelig gjælder satsen ogsaa, naar n er negativ. Thi sættes $n = - n'$, da haves ifølge 65, 3°:

$$(A + B - C) \,.\, n = (A + B - C) \,.\, (- n') = [- (A + B - C)] \,.\, n' = - [(A + B - C) \,.\, n'] =$$
$$= - (A n' + B n' - C n') = - A n' - B n' + C n' =$$
$$= A (- n') + B (- n') - C (- n') = A n + B n - C n.$$

Eksempel. $(x^3 - 3 x^2 y + 3 x y^2 - y^3) \; 2 x^2 y^3 = x^3 \,.\, 2 x^2 y^3 - 3 x^2 y \,.\, 2 x^2 y^3 + 3 x y^2 \,.\, 2 x^2 y^3 - y^3 \,.\, 2 x^2 y^3 = 2 x^5 y^3 - 6 x^4 y^4 + 6 x^3 y^5 - 2 x^2 y^6$.

Tillæg I. Beviset for det tilfælde, at $n = - n'$, indeholder følgende ligning:

$$(A + B - C) \,.\, (- n') = - A n' - B n' + C n'.$$

Betragtes her polynomet $A + B - C$ som en algebraisk sum af de tre led $+ A$, $+ B$ og $- C$, og multipliceres hver af disse med den negative størrelse $- n'$, under iagttagelse af fortegnsformlerne i 66, fremkommer netop de tre led, som danner høire side af den anførte ligning; $(+ A) (- n')$ giver nemlig $- A n'$; $(+ B) (- n')$ giver $- B n'$, og $(- C) (- n')$ giver $+ C n'$. Man kan altsaa ogsaa udtale læresætningen saaledes:

Produktet af en algebraisk sum og en størrelse erholdes ved at multiplicere hver af summens addender med størrelsen overensstemmende med reglerne i 66.

Eksempel. $(- 2 a^2 + a b - 3 b^2) \,.\, (- a b c) = + 2 a^3 b c - a^2 b^2 c + 3 a b^3 c$.

Tillæg II. Lader man i læresætningens sats størrelsen til venstre og størrelsen til høire for lighedstegnet bytte plads, faaes ligningen:

$$An + Bn - Cn = (A + B - C) \,.\, n. \quad \text{ɔ:}$$

Et polynom, hvis led indeholder en fælles faktor, er ligt produktet af denne faktor og det polynom, som med bibehold af fortegnene dannes af de øvrige faktorer.

Eksempel. $2x^2y + 3xy^2 - xy = 2x \,.\, xy + 3y \,.\, xy - 1 \,.\, xy = (2x + 3y - 1) \,.\, xy.$

Denne regel indbefatter i sig de i 51 givne regler om ensartede monomers sumering. Saaledes:

$$2A + 3A - A = (2 + 3 - 1) \,.\, A = 4A.$$

$$x^2yz - 4x^2yz + 7x^2yz = (1 - 4 + 7)\, x^2yz = 4x^2yz.$$

74. *Læresætning. Naar begge faktorer er polynomer, dannes produktet derved, at man multiplicerer hvert led i det ene polynom med hvert led i det andet og* — overensstemmende med reglerne i 66 — *giver de produkter, som fremkomme af to led med lige fortegn, fortegnet* + *og de produkter, som fremkomme af to led med ulige fortegn, fortegnet* —.

Sats: $(a - b - c + d)\,(m + n - p) = am + an - ap - bm - bn + bp - cm - cn + cp + dm + dn - dp.$

Thi sættes et af polynomerne, f. eks. $m + n - p$, ligt Q, da faaes ifølge 73:

$$(a - b - c + d)\, Q = aQ - bQ - cQ + dQ. \quad \text{(I)}$$

Men ifølge samme sætn. 73 haves videre, at

$$aQ = a\,(m + n - p) = am + an - ap$$
$$bQ = b\,(m + n - p) = bm + bn - bp$$
$$cQ = c\,(m + n - p) = cm + cn - cp$$
$$dQ = d\,(m + n - p) = dm + dn - dp.$$

Indsættes disse værdier i ligning (I) og ombyttes samtidig paa venstre side Q med $m + n - p$, faaes

$$(a - b - c + d)\,(m + n - p) = [am + an - ap] - [bm + bn - bp] - [cm + cn - cp] + [dm + dn - dp].$$

Opløses parentheserne til høire, faaes som fuldt udviklet resultat:

$$am + an - ap - bm - bn + bp - cm - cn + cp + dm + dn - dp,$$ hvilket skulde bevises.

75. Eksempler. Naar to polynomer skal multipliceres, er det hensigtsmæssigt at stille det ene polynom under det andet

og ligeledes stille de ensartede produkter under hverandre, saaledes som de efterfølgende eksempler viser. Endvidere bruger man at ordne leddene efter bogstavernes alfabetiske orden, og hvis flere led indeholder potenser af det samme bogstav med forskjellige eksponenter, tager man ved ordningen ogsaa hensyn til disse eksponenters størrelse enten saaledes, at de falder, eller at de stiger.

1ste eks $(3x^2 + 3 - 2x) \cdot (4 - 2x^2 + 6x) = ?$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 3 & - & 2x & + & 3x^2 \\
 & & 4 & + & 6x & - & 2x^2 \\
\hline
 & & 12 & - & 8x & + & 12x^2 \\
 & & & + & 18x & - & 12x^2 + 18x^3 \\
 & & & & & - & 6x^2 + 4x^3 - 6x^4 \\
\hline
= & & 12 & + & 10x & - & 6x^2 + 22x^3 - 6x^4.
\end{array}$$

2det eks. $(3a^2b^2 - 2ab^3 - 2a^3b + a^4 + b^4)(a^2 + b^2 + 2ab) = ?$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
 & & & & a^4 & - & 2a^3b & + & 3a^2b^2 & - & 2ab^3 & + b^4 \\
 & & & & & & & & a^2 & + & 2ab & + b^2 \\
\hline
 & a^6 & - & 2a^5b & & + & 3a^4b^2 & - & 2a^3b^3 & + & a^2b^4 & \\
 & & + & 2a^5b & & - & 4a^4b^2 & + & 6a^3b^3 & - & 4a^2b^4 & + 2ab^5 \\
 & & & & & + & a^4b^2 & - & 2a^3b^3 & + & 3a^2b^4 & - 2ab^5 + b^6 \\
\hline
= & a^6 & & & & & & + & 2a^3b^3 & & & + b^6.
\end{array}$$

76. Produkterne af følgende multiplikationer fortjener særlig at mærkes:

$$\begin{array}{rrrr}
 & a & + & b \\
 & a & + & b \\
\hline
 & a^2 & + & ab \\
 & & + & ab + b^2 \\
\hline
 & a^2 & + & 2ab + b^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
 & a & - & b \\
 & a & - & b \\
\hline
 & a^2 & - & ab \\
 & & - & ab + b^2 \\
\hline
 & a^2 & - & 2ab + b^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
 & a & + & b \\
 & a & - & b \\
\hline
 & a^2 & + & ab \\
 & & - & ab - b^2 \\
\hline
 & a^2 & & - b^2.
\end{array}$$

Man har altsaa følgende ligninger:

$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{(I)}$$
$$(a - b)(a - b) = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{(II)}$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2, \quad \text{(III)}$$

hvilke udtales saaledes:

I. Kvadratet af to størrelsers sum er ligt kvadratet af den første størrelse plus det dobbelte produkt af begge størrelser plus kvadratet af den anden størrelse.

II. Kvadratet af to størrelsers differens er ligt kvadratet af den første størrelse minus det dobbelte produkt af begge størrelser plus kvadratet af den sidste størrelse.

III. Produktet af summen og differensen af to størrelser er ligt differensen mellem disses kvadrater.

Tillæg. Tages bogstaverne a og b i algebraisk betydning, da er regel II indbefattet i regel I. Thi ligningen

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

gaar, naar b sættes $= -b'$, over til

$$(a + (-b'))^2 = a^2 + 2a(-b') + (-b')^2$$

eller $(a - b')^2 = a^2 - 2ab' + b'^2$, hvilket er regel II.

Omvendt kan ogsaa regel I siges at være indbefattet i regel II. Thi ligningen

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

gaar, naar b sættes $= -b'$, over til

$$(a - (-b'))^2 = a^2 - 2a(-b') + (-b')^2$$

eller $(a + b')^2 = a^2 + 2ab' + b'^2$, hvilket er regel I.

77. Kvadratet af en algebraisk sum af et hvilketsomhelst antal addender er en algebraisk sum, som dannes af kvadraterne af hver enkelt addend og af det dobbelte af alle de produkter, som erholdes ved at multiplicere hver enkelt addend med hver enkelt af de efterfølgende addender.

En sum af tre addender, $a + b + c$, kan nemlig opfattes som en sum af to addender $(a + b) + c$, og man faar da ifølge 76 tillæg:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 = ((a + b) + c)^2 &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) + (2ac + 2bc) + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.\end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist i tilfælde af tre addender.

En sum af fire addender, $a + b + c + d$, kan ogsaa

opfattes som en sum af to addender $(a + b + c) + d$, og man faar paa samme maade:

$(a + b + c + d)_2 = ((a + b + c) + d)^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2$

$= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) + (2ad + 2bd + 2cd) + d^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$

Paa samme maade kan beviset fortsættes for fem, seks addender o. s. v.

Eksempel. $(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3)^2 =$

$(x^3)^2 + (-3x^2y)^2 + (3xy^2)^2 + (-y^3)^2 + 2x^3(-3x^2y) + 2x^3 . 3xy^2 + 2x^3(-y^3) + 2(-3x^2y) . 3xy^2 + 2(-3x^2y)(-y^3) + 2 . 3xy^2(-y^3) =$

$x^6 + 9x^4y^2 + 9x^2y^4 + y^6 - 6x^5y + 6x^4y^2 - 2x^3y^3 - 18x^3y^3 + 6x^2y^4 - 6xy^5 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6.$

(Resten af stykket om multiplikationen medtages ikke af hensyn til pladsen).

Skoleefterretninger for 1883—84.

I. Afgang til universitetet 1883.

Til klassisk examen artium*) anmeldtes 8 elever af latingymnasiets øverste klasse, nemlig:

1. Bing, Just Johan, f. $^{24}/_{4}$ 66, søn af sorenskriver Bing, Eidsberg, elev af skolen i 6 aar.
2. Dedichen, Hagbart Emil Waldemar, f. $^{15}/_{10}$ 65, søn af læge Dedichen, Modum, elev af skolen i 7 aar.
3. Fjeld, Peter Nicolaus, f. $^{4}/_{12}$ 64, søn af lensmand Fjeld, Jevnaker, elev af skolen i 5 aar.
4. Gjertsen, Peder Egeberg, f. $^{5}/_{3}$ 65, søn af skolebestyrer Gjertsen, Kristiania, elev af skolen i 11 aar.
5. Lie, Michael Strøm, f. $^{20}/_{12}$ 62, søn af digteren Jonas Lie, Kristiania, elev af skolen i 14 aar.
6. Onsum, Olaf, f. $^{29}/_{5}$ 65, søn af foged Onsum, Jarlsberg, elev af skolen i 10 aar.
7. Solum, Engebret Sebjørnsen, f. $^{14}/_{9}$ 63, søn af gaardbruger Solum, Sande, elev af skolen i 6 aar.
8. Waage, Fredrik Ludvig Michael, f. $^{1}/_{4}$ 65, søn af skibsreder Waage, Skudesnæshavn, elev af skolen i 5 aar.

Disse bestod examen med følgende karakterer:

	Modersmaal.	Lat. oversæt.	Math. skr.	Religion.	Oldnorsk.	Lat. mdtl.	Do.	Græsk.	Do.	Fransk.	Engelsk.	Historie.	Math. mdtl.	Sum.	Antal fag.	
Bing	3	2	1	1	1	2	1	1	1	1	-	1	1	16	12	Laudabilis præ ceteris.
Dedichen. . .	4	2	2	3	1	1	1	1	1	3	-	2	1	22	12	Laudabilis.
Fjeld	3	3	2	2	1	2	2	1	2	3	-	1	1	23	12	do.
Gjertsen . . .	3	3	3	2	2	2	2	1	2	2	-	2	1	25	12	do.
Lie	4	3	3	3	2	2	2	2	2	3	-	2	1	29	12	do.
Onsum	3	3	3	2	1	2	2	1	2	2	-	1	2	24	12	do.
Solum	4	3	2	2	2	2	3	2	3	2	-	2	3	30	12	do.
Waage	3	3	2	3	1	3	2	2	3	2	-	2	3	29	12	do.

*) Fra skolens realgymnasium fandt ingen afgang sted til universitetet, da den øverste klasse ikke var i virksomhed i skoleaaret 1882—1883.

Klassens øvrige 4 disciple fremstillede sig efter egen anmeldelse, og bestod alle examen, 2 med karakteren laudabilis, 2 med haud illaud.

---

2. Middelskolens afgangsexamen 1883.

Kommissionen for afholdelse af middelskolens afgangsexamen ved de kommunale og private skoler i Kristiania bestod i 1883 af skolebestyrer Gjertsen (formand), skolebestyrer Hofgaard, skolebestyrer Anderssen, cand. phil. Larsen, skolebestyrer Jespersen, skolebestyrer Pauss.

Efter kommissionens forslag beskikkede kirkedepartementet følgende herrer til censorer ved denne skole:

I religion: pastor Eliassen.
- norsk: cand. mag Norby og cand mag. V. Aubert.
- tysk: cand. phil. Hj. Lyche.
- latin: inspektør Lowum.
- engelsk: cand mag. Wesenberg.
- fransk: cand. mag. Hermanstorff.
- historie: cand. mag. Søraas.
- geografi: cand. real. Schulerud.
- mathem.: inspektør O. Johannesen.
- naturfag: cand. real. Henrichsen.
- skrivning: sekretær Thorsen.
- tegning: tegnelærer Haslund.

Opgaverne til de skriftlige prøver blev tilstillede skolerne fra kirkedepartementet.

Af skolens elever fremstillede sig til middelskolens afgangsexamen 44. Af disse tilhørte 20 engelsklinjen, hvoraf 19 bestod examen, 24 latinlinjen, hvoraf 22 bestod examen. Examens udfald var følgende:

Engelsklinjen:	Hovedkarakter:
1. Bentzen, F.	Meget godt (2.47)
2. Bjørn, B.	Meget godt (2.17)
3. Eyde, S.	Meget godt (1.90)

4. Haagensen, R. . . . . Meget godt (2.27)
5. Hoffmann, H. . . . . Udmerket godt (1.43)
6. Holter, Kr. . . . . Godt (2.53)
7. Johannesen, H. . . . . Meget godt (2.50)
8. Lund, H. . . . . Udmerket godt (1.47)
9. Lund, T. . . . . Meget godt (2.33)
10. Lædel, H. . . . . Meget godt (2.32)
11. Løvenskiold, H. . . . . Godt (2.97)
12. Moestue, F. . . . . Meget godt (1.87)
13. Nannestad, J. . . . . Godt (2.54)
14. Nygaard, E . . . . . Godt (2.82)
15. Olsen, G. . . . . Meget godt (2.33)
16. Oppegaard, A . . . . . Godt (2.54)
17. Pay, O. . . . . Godt (2.53)
18. Reiss, P. . . . . Udmerket godt (1.37)
19. Zwilgmeyer, K. . . . . Meget godt (1.83)

Latinlinjen:

1. Andresen, G. . . . . Meget godt (2.50)
2. Arneberg, M. . . . . Godt (3.04)
3. Bergh, J. . . . . Meget godt (1.54)
4. Bidenkap, V. . . . . Meget godt (1.57)
5. Faye, N. . . . . Meget godt (2.36)
6. Fjeld, Hagbart . . . . . Meget godt (1 96)
7. Fretheim, T. . . . . Meget godt (2 31)
8. Grüner, C. . . . . Godt (2 57)
9. Gulbrandsen, J. . . . . Meget godt (1.75)
10. Hansen, E. . . . . Meget godt (2.21)
11. Heffermehl, J. . . . . Godt (2.77)
12. Heltberg, C. . . . . Meget godt (2.46)
13. Homann, K. . . . . Udmerket godt (1.14)
14. Lie, B. . . . . Meget godt (2.21)
15. Lunde, H. . . . . Meget godt (2.50)
16. Løken, A. . . . . Meget godt (2.50)
17. Malling, Peter . . . . . Godt (2.89)
18. Midsem, A. . . . . Udmerket godt (1 29)
19. Otterbech, J. . . . . Meget godt (1.89)

20. Sørensen, G. . . . . Meget godt (2.11)
21. Thesen, O. . . . . Godt (3.11)
22. Widerberg, C. . . . . Udmerket godt (1 25)

Af privatister fremstillede sig 2 paa engelsklinjen, 7 paa latinlinjen Af disse bestod 6 examen.

---

3. Discipeltal i skoleaaret 1883—84.

Skolen havde ved skoleaarets begyndelse i august maaned 472 disciple; ved programmets udgivelse i mai er discipeltallet 467, fordelt paa 21 klasser, altsaa i gjennemsnit 22 i hver klasse. Af de 21 klasser er 7 parallelklasser.

---

4. Examen artium 1884.

Ved kgl. resol. af 11te februar 1884 blev der tilstaaet denne skoles bestyrelse ret til at afholde examen artium med samme virkning som de offentlige skoler.

I overensstemmelse hermed er den skriftlige examen afholdt den 21de, 23de, 24de, 26de og 27de mai.

Til denne examen fremstillede sig samtlige disciple af 3dje klasse saavel i latin- som realgymnasiet resp. 18 og 15. Desuden 10 privatister.

---

5. Skolens lærerpersonale.

Af skolens tidligere lærerpersonale fratraadte i februar maaned cand. phil. Bekkevold. Hans timer er til skoleaarets udgang overtagne af stud. theol. Y. Brun og stud. philol. B. Smith.

Ved skoleaarets slutning fratræder cand. phil. Bruenech og cand theol. Fuhr; midlertidig ligeledes cand. mag. B. Gundersen.

Som nye lærere er ansatte cand. real. B. Kaalaas, cand. theol. H. Domaas, stud. theol. Y. Brun, stud. philol. Ludv. Brinchmann og cand. mag. H. Rønneberg.

Skolens lærerpersonale vil i skoleaaret 1884—85 komme til at bestaa af følgende lærere og lærerinder:

1. *Fr. Gjertsen*, bestyrer, cand. mag., f. 1831 } lærere siden
2. *M. Gjør*, bestyrer, cand. mag., f. 1840 } skolens opret-
3. *E. Johanssen*, cand. philos., f. 1843 } telse i 1869.
4. *N. J. Steffens*, premierløitnant, f. 1843, lærer siden 1872.
5. *Alb. Brock*, inspektør, cand. mag., f. 1848 } lærere siden
6. *A. Eliassen*, cand. philos., f. 1853 } 1873.
7. *H. Nielsen*, premierløitnant, f. 1844 } lærere siden
8. *J. Schram*, cand. mag., f. 1847 } 1874.
9. *H. Siewers*, cand. philos., f. 1821 }
10. *L. Bratt*, cand. philos., f. 1851, lærer siden 1875.
11. *A. Nærup*, inspektør, cand. real., f. 1851, lærer siden 1876.
12. *C. Christensen*, cand. mag., f. 1846 } lærere siden
13. *V. Lonnevig*, premierløitnant, f. 1845 } 1877.
14. *J. Gjør*, prest, f. 1839 } lærere siden
15. *Chr. Schive*, adjunkt, f. 1839 } 1878.
16. *A. Holt*, cand. real., f. 1856 } lærere siden
17 *O. Grøndahl*, cand. philos., f. 1847 } 1880.
18. *B. Bomhoff*, prest, f. 1848, lærer siden 1881.
19. Dr. *Alf Torp*, univ. stip., cand. mag., f. 1853, lærer siden 1882.
20. *H. Wesenberg*, cand. mag., f. 1848, lærer siden 1883.
21. *Y. Brun*, stud. theol., f. 1862.
22. *H. Domaas*, cand. theol., f. 1859.
23. *B. B. L. Kaalaas*, cand. real., f. 1851.
24. *L. Brinchmann*, stud. philol., f. 1862.
25. *H. Rønneberg*, cand. mag., f. 1859.

---

1. Frøken *J. Heyerdahl*, f. 1849, lærerinde siden 1869.
2. — *P. Larsen*, f. 1850, — „ 1870.
3. — *B. Bomhoff*, f. 1850, — „ 1871.
4. — *J. Aubert*, f. 1846, — „ 1874.
5. — *E. Heyerdahl*, f. 1858, — „ 1877.
6. Fru *S. Borchgrevink*, f. 1846, — „ 1879.

---

6. Skolepenge og fripladse.

1. Skolepengene udgjør:

for 1ste smaaklasse	4	kroner	maanedlig*)
„ 2den —	8	„	—
„ 3dje —	12	„	—
„ 1ste, 2den og 3dje middelklasse .	16	„	—
i de høiere klasser	20	„	—

For den nederste af 2 brødre fragaar en trediedel. Af 3 brødre gaar den nederste frit, de 2 andre betaler helt ud. Af 4 brødre gaar den næstnederste frit, og for den nederste fragaar en trediedel.**) Yderligere nedsættelse finder ikke sted.

2. Skolepengene erlægges forskudsvis og indbetales den første læsedag i hver maaned paa skolens kontor til kassereren. Disciplene modtager af denne en kvitteringsbog, som forældre eller værger bør lade sig forevise strax efter hver betaling.

3. Skolepengene beregnes altid for hele maaneder, nemlig fra begyndelsen af den maaned, hvori en discipel kommer ind, til slutningen af den maaned, hvori han gaar ud. Naar altsaa en discipel indmeldes til et skoleaars begyndelse, betaler han skolepenge fra 1ste august.

4. Naar en discipel skal forlade skolen, maa anmeldelse ske 2 maaneder forud. Hvis nogen udmeldelse sker med kortere varsel, erlægges dog skolepengene, indtil den bestemte udmeldelsestid er forløben. Fra denne regel undtages de disciple, som gaar ud efter skolens raad eller ønske.

5. Naar skolepenge ikke er betalte for 2 maaneder, kan bestyrelsen negte vedkommende discipel adgang til skolen.

6. Fripladse eller nedsættelse i skolepengene tilstaaes kun trængende disciple, der viser god opførsel og gjør god fremgang i skolen, og som har været skolens disciple i mindst et par aar og i denne tid har betalt sine skolepenge.

7. Naar en af to eller flere brødre faar friplads, bortfalder

---

*) For denne klasse beregnes ikke skolepenge for august maaned.

**) Dog afrundes altid til femmere af øre, saa at der f. ex. istedenfor $33\frac{1}{3}$ betales 35 og $66\frac{2}{3}$ betales 65 øre.

moderationen for de øvrige, hvis ikke anderledes udtrykkelig bestemmes.

Ansøgninger om fripladse for det kommende skoleaar indleveres hvert aar inden den 1ste juni; de, som tidligere har friplads, maa søge paany, hvis de ønsker at beholde den.*)

I indeværende skoleaar er der uddelt fripladse til et beløb af omtr. 6000 kroner.

---

*) Til veiledning for dem, der agter at søge fripladse, bedes bemerket: 1) at friplads kun undtagelsesvis tildeles i smaaskolen; 2) at friplads fortrinsvis tilstaaes disciple, hvis økonomiske vilkaar er forværrede under skolegangen.

Examen 1884.

Den daglige undervisning slutter:

For 6te middelkl. lørdag 7de juni.
„ gymnasiernes klasser, 5te og 4de middelklasse lørdag 14de juni.
„ 3dje, 2den og 1ste middelklasse torsdag 26de juni.
„ 3dje og 2den smaaklasse torsdag 3dje juli.
„ 1ste smaaklasse torsdag 10de juli.

Examen i gymnastik, skrivning og tegning (undtagen for 6te middelklasse) er tidligere afholdt.

For 1ste smaaklasse holdes ingen examen, men disciplenes forældre og foresatte indbydes til at overvære undervisningen de to sidste læsedage (9de og 10de juli) for at gjøre sig bekjendt med det standpunkt, klassen har naaet.

Examen begynder, hvor ikke andet er bemerket, om formiddagen **kl. 9** og om eftermiddagen **kl. 4½**. Hvor ikke andet er bemerket, examineres hver klasse i sit klasseværelse.

Examenstegningerne og prøveskrifterne er udstillede i tegnesalen torsdag 26de, fredag 27de og lørdag 28de juni kl. 11—1.

Skolepengene indbetales hver dag indtil 11te juli kl. 12—2.

Sangprøver afholdes i gymnastiksalen onsdag 2den, lørdag 5te, torsdag 10de, alle dage kl. 1.

Mandag 16de juni.

Formiddag.

		Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage:		Bruenech.
6 M. 1.	Norsk stil i 6 M. b.,	inspektion kl.	9—11:	Bruenech.
		do.	- 11—1:	Tornøe.
6 M. 2.	Norsk stil i 6 M. a.,	do.	- 9—11:	Johanssen.
		do.	- 11—1:	Eliassen.
6 M. 3.	Norsk stil i 5 M. b.,	do.	- 9—11:	Holt.
		do.	- 11—1:	Schram.

Tirsdag 17de juni.

Formiddag.

		Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage:		Torp.
6 M. 1.	Tysk stil i 6 M. b.,	inspektion kl.	9—11:	Bratt.
		do.	- 11—1:	Bomhoff.
6 M. 2.	Tysk stil i 6 M. a.,	do.	- 9—11:	Johanssen.
		do.	- 11—1:	Wesenberg.
6 M. 3.	Tysk stil i 5 M. b.,	do.	- 9—11:	Torp.
		do.	- 11—1:	Schram.

Onsdag 18de juni.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage: J. Gjør.

6 M. 1.	Latinsk el. eng. stil i 6 M. b.,	inspek. kl.	9—11:	Siewers.
		do.	- 11—1:	Johanssen.
6 M. 2.	Latinsk el. eng. stil i 6 M. a.,	do.	- 9—11:	J. Gjør.
		do.	- 11—1:	Holt.
6 M. 3.	Latinsk el. eng. stil i 5 M. b.,	do.	- 9—11:	Torp.
		do.	- 11—1:	Schram.

Torsdag 19de juni.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage: Eliassen.

6 M. 1.	Mathem. skr. i 6 M. b.,	inspektion kl.	9—11:	Holt.
		do.	- 11—1:	Tornøe.
6 M. 2.	Mathem. skr. i 6 M. a.,	do.	- 9—11:	Eliassen.
		do.	- 11—1:	Johanssen.
6 M. 3.	Mathem. skr. i 5 M. b.,	do.	- 9—11:	Wesenberg.
		do.	- 11—1:	Schram.

Fredag 20de juni.

Formiddag.

	Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage:			Lonnevig.
			i tegnesalen:	Holt.
6 M. a.	Tegning i tegnesalen, inspektion		kl. 9—11:	Holt.
		do.	- 11—1:	Schram.
6 M. b.	Tegning i klasseværelset	do.	- 9—11:	Nielsen.
		do.	- 11—1:	Tornøe.

Eftermiddag kl. 4.

	Inspektion kl. $3^3/_4$—4 i tegnesalen:			Lonnevig.
6 M. a.	Tegning i tegnesalen, inspektion:			Lonnevig.

Lordag 21de juni.

Formiddag.

	Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage:			Johanssen.
			i 2 etage:	Schram.
2 L. G.	Norsk stil } i 2 L. G.	inspek.	kl. 9—11:	Steffens.
2 R. G.	Norsk stil } i 2 L. G.	do.	- 11—2:	Holt.
1 L. G.	Norsk stil } i 1 L. G.	do.	- 9—11:	Fuhr.
1 R. G.	Norsk stil } i 1 L. G.	do.	- 11—2:	Eliassen.
6 M. a.	Skrivning i tegnesalen	do.	. . . . .	Nielsen.
6 M. b.	Skrivning i klasseværelset	do.	. . . . .	Lonnevig.
5 M. a.	Tysk stil	do.	. . . . .	Schram.
5 M. b.	Tysk stil	do.	. . . . .	Tornøe.
4 M. a.	Tysk stil	do.	. . . . .	Bruenech.
4 M. b.	Tysk stil	do.	. . . . .	Wesenberg.

Mandag 23de juni.

Formiddag.

Inspektion kl. 8¾—9 i 3 etage: Schram.
i 2 etage: Smith.

Ex art. L. 1. Fransk (kontoret i 3 et.): . . Gjertsen (censor Ottesen).
— R. 1. Naturfag i 3 L. G: . Tornøe og Holt (censor Friis).
— R 2. Geografi i 2 L. G.: . M. Gjør og Nærup (censor Henrichsen).

2 L. G.	Latinsk stil	i nr. 12	kl. 9—12:	Schram.
2 R. G.	Engelsk stil		- 12—2:	Steffens.
1 R. G.	Engelsk stil	i 1 L. G.	- 9—11:	Torp.
1 L. G.	Latinsk stil		- 11—2:	Wesenberg.

6 M. a. 2.	Norsk	Johanssen (censor Norby).	
6 M. b. 3.	Mathematik . . .	Eliassen (censor Johannesen).	
5 M. a.	Norsk stil . . .	Smith.	
5 M. b.	Norsk stil kl. 9—10	Christensen.	
	- 10—1	Fuhr.	

Eftermiddag.

Inspektion kl. 4¼—4½ i 3 etage: Bomhoff.
i 2 etage: Brun.

6 M. b. 1.	Religion	Bomhoff (censor Eliassen).
6 M. b. 2.	Tysk (i 6 M. a.) . .	Bratt (censor Gundersen).
4 M. a.	Norsk stil	Brun.
4 M. b.	Norsk stil	Wesenberg.

Tirsdag 24de juni.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^{1}/_{4}$—9 i 3 etage: Lonnevig.
2 etage: Bruenech.

Ex. art. L. 2.	Græsk i 3 L. G.		Torp (censor Aars).
— R. 1.	Norsk og oldnorsk i 2 L. G.		M. Gjør (censor Schive).
2 L. G.	Mathem. skr.	i nr. 12	kl. 9—12: Lonnevig.
2 R. G.	Mathem. skr.	i nr. 12	- 12—2: Steffens.
1 L. G.	Mathem. skr.	i 1 L. G.	- 9—10: Holt.
		i 1 L. G.	- 10—12: Grøndahl.
1 R. G.	Mathem. skr.	i 1 L. G.	- 12—2: Nielsen.
6 M. a. 1.	Tysk		Johanssen (censor Gundersen).
6 M. b. 3.	Norsk		Brock (censor Norby).
5 M. a.	Engelsk stil / Latinsk stil . .		Smith.
5 M. b.	Latinsk stil . . .		Bruenech.
4 M. a.	Engelsk stil . . .		Wesenberg.
4 M. b.	Latinsk stil . . .		Bratt.

Eftermiddag.

Inspektion kl. $4^{1}/_{4}$—$4^{1}/_{2}$ i 3 etage: Siewers.

6 M. b. 2.	Geografi	Siewers (censor Schulerud).

Onsdag 25de juni.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage: Schram.
i 2 etage: Johanssen.

Ex. art. L. 2.	Historie i 3 L. G. .		Johanssen (censor Brock).	
2 L. G.	Latinsk overs.	i nr. 12	kl. 9—11:	Schram.
2 R. G.	Fysik skr.		- 11—2:	Wesenberg.
1 L. G.	Græsk skr.	i 1 L. G.	- 9—11:	Torp.
1 R. G.	Fysik skr.		- 11—2:	Grøndahl.

Eftermiddag.

Inspektion kl. $3^3/_4$ –4 i 3 etage: Tornøe.
i 2 etage: Bruenech.
- $4^1/_4$ – $4^1/_2$ i 3 etage: Eliassen.

6 M. a. 2.	Religion	J. Gjør (censor Eliassen).
6 M. b. 1.	Mathematik . .	Eliassen (censor Johannesen).
6 M. b. 2.	Fransk i 1 L. G.	Wesenberg (censor Hermanstorff).
5 M. a.	Mathem. skr. (kl. 4)	Brun.
5 M. b.	Mathem. skr. (kl. 4)	Tornøe.
4 M. a.	Mathem. skr. (kl. 4)	Bruenech.
4 M. b.	Mathem. skr. (kl. 4)	Lonnevig.

Torsdag 26de juni.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage: Torp.
i 2 etage: Brock.

Ex. art. L. 1.	Norsk og oldnorsk i 3. L. G.:	Gjertsen og Gundersen (censor Lassen).
— R. 2.	Engelsk i 2 L. G. . . .	Schram (censor E. Nicolaysen og prof. Storm).
2 L. G. 2.	Græsk i nr. 12	Torp.
6 M. a. 1.	Historie	Brock (censor Ræder).

Eftermiddag.

Inspektion kl. $4^1/_4$—$4^1/_2$ i 3 etage: Gundersen.
i 2 etage: Eliassen.

2 L. G. 1.	Norsk i 1 L. G.	Gundersen.
1 R. G.	Mathem. i 5 M. b.	Nærup.
6 M. b. 3.	Fransk	Wesenberg (censor Hermanstorff).
5 M. a.	Norsk	Johanssen.
4 M. a.	Latin	Bruuneeh.
4 M. b.	Mathematik . .	Eliassen.

Fredag 27de juni.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage: Gundersen.
i 2 etage: Brun.

Ex. art. R. 1.	Religion i 2 L. G.	J. Gjør (censor Odland).
2 L. G. 2.	Norsk i nr. 12 . .	Gundersen.
6 M. a. 2	Engelsk	Schram (censor Grüner).
6 M. b. 1.	Historie	Johanssen (censor Ræder).
6 M. b. 2.	Naturfag i 1 L. G.	Holt (censor Hamilton).
5 M. b.	Geografi	Siewers.
3 M. a.	Norsk skr. . . .	Brun.
3 M. b.	Norsk skr. . . .	Christensen.
2 M. a.	Regning skr. . .	Fuhr.
2 M. b.	Regning skr. . . .	Lonnevig.
1 M.	Norsk skr. . . .	frk. J. Heyerdahl.

Eftermiddag.

Inspektion kl. $4^1/_4$—$4^1/_2$ i 3 etage: Bomhoff.
i 2 etage: Tornøe.

2 R. G.	Geografi i nr. 12 .	Nærup og Johanssen.
1 L. G.	Religion	Bomhoff.
6 M. a. 1.	Naturfag	Holt (censor Hamilton).
5 M. a.	Naturfag	Tornøe.

Lørdag 28de juni.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage: Schram.
i 2 etage: Fuhr.

Ex. art. L. 2.	Mathem. i 3 L. G. .	Eliassen (censor Nærup).
— R. 2.	Historie i 2 L. G. .	Brock (censor Wallem).
2 L. G.	Tysk i nr. 12 . .	Schram.
1 R. G.	Naturfag i 5 M. a. .	Holt og Tornøe.
4 M. a.	Geografi	Siewers.
3 M. a.	Tysk skr.	Brun.
3 M. b.	Tysk skr.	Wesenberg.
2 M. a.	Norsk skr.	Fuhr.
2 M. b.	Norsk skr.	Christensen.
1 M.	Tysk skr.	frk. J. Heyerdahl.

Eftermiddag.

Inspektion kl. $4^1/_4$—$4^1/_2$ i 3 etage: Smith.
i 2 etage: Wesenberg.

2 R. G.	Fransk i nr. 12 .	Smith.
6 M. b. 3.	Religion	Bomhoff (censor Eliassen).
5 M. b.	Religion	Fuhr.
4 M. b.	Norsk	Wesenberg.

Mandag 30te juni.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage: Bratt.
i 2 etage: Christensen.

Ex. art. R. 2.	Naturfag i 2 L. G.	Tornøe og Holt (censor Friis og rektor Horn).
2 L. G. 1.	Religion i nr. 12	Bomhoff.
1 R. G.	Religion i 3 M. a.	J. Gjør.
6 M. a. 1.	Mathematik . .	Nærup (censor Johannesen).
5 M. a.	Tysk	Schram.
5 M. b.	Tysk	Bratt.
4 M. a.	Religion . . .	Fuhr.
4 M. b.	Geografi . . .	Siewers.
2 M. a.	Tysk skr. . . .	Brun.
2 M. b.	Tysk skr. . . .	Christensen.
1 M.	Regning skr. . .	frk. Heyerdahl.

Eftermiddag.

Inspektion kl. $4^1/_4$—$4^1/_2$ i 3 etage: Bruenech.
i 2 etage: Holt.

2 L. G. 2.	Latin i nr. 12 .	Bratt.
2 R. G.	Oldnorsk i 5 M. a.	Wesenberg.
1 L. G.	Græsk	Bruenech.
6 M. a. 2.	Tysk	Johanssen (censor Gundersen).
6 M. b. 1.	Norsk	Brock (censor Norby).
3 M. a.	Regning skr. . .	Holt.
3 M. b.	Regning skr. . .	Brun.

Tirsdag 1ste juli.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage: Torp.
i 2 etage: Christensen.

Ex. art. L. 1.	Mathematik i 3 L. G.	Eliassen (censor Nærup og rektor Horn).
— L. 2.	Fransk i 2 L. G. . .	Gjertsen (censor Ottesen)
2 L. G. 1.	Græsk i nr. 12 . .	Torp.
1 R. G.	Tysk i 5 M a. . .	Christensen.
6 M. b. 2.	Historie	Johanssen (censor Ræder).
2 M. a.	Historie (kl. 8) . .	Siewers.
2 M. b.	Geografi (kl. 11) i 2 M. a.	Siewers.
1 M.	Religion	frk. J. Heyerdahl.

Eftermiddag.

Inspektion kl. $4^1/_4$—$4^1/_2$ i 3 etage: Schram.
i 2 etage: Holt.

6 M. a. 1.	Fransk	Schram (censor Hermanstorff).
6 M. b. 3.	Latin (kl. 4) . .	M. Gjør (censor Lowum).
4 M. a.	Mathematik (kl. 4)	Holt.
3 M. a.	Regning (kl. 6) .	Holt.

Onsdag 2den juli.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$ – 9 i 3 etage: Johanssen.
i 2 etage: Christensen.

Ex. art. R. 1.	Historie i 3 L. G. .	Brock (censor Wallem).
— R. 2.	Mathem. i 2 L. G.	Nærup (censor Holst).
2 L. G. 1.	Historie i nr. 12 .	Johanssen.
2 L. G. 2.	Fransk i 5 M. a. .	Gjertsen.
6 M. a. 2.	Fransk	Schram (censor Hermanstorff).
6 M. b 1	Tysk	Bratt (censor Gundersen).
5 M. b.	Fransk	Christensen.
3 M. b.	Geografi (kl. 9) i 1 M.	Siewers.
1 M.	Geografi (kl. 11) .	Siewers.

Eftermiddag.

Inspektion kl. $4^1/_4$—$4^1/_2$ i 3 etage: Wesenberg.
2 etage: Bratt.

2 R. G.	Engelsk i nr. 12 .	Schram.
1 L. G.	Fransk	Wesenberg.
6 M. b. 3.	Naturfag	Holt (censor Hamilton).
5 M. a.	Mathematik . . .	Eliassen.
4 M. a.	Norsk	Bruenech.
4 M. b.	Tysk	Bratt.
2 M. a.	Tysk	Brun.

Torsdag 3die juli.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage: Tornøe.
i 2 etage: Lonnevig.

Ex. art. L. 2.	Religion i 3 L. G. .	Bomhoff (censor J. Gjør).
— R. 1.	Mathematik i 2 L. G.	Nærup (censor Holst).
5 M. b.	Naturfag	Tornøe.
3 M. a.	Historie (kl. 8) . .	Siewers.
3 M. b.	Regning . . .	Lonnevig.
2 M. b.	Norsk	Christensen.
1 M.	Tysk	frk. J. Heyerdahl.

Eftermiddag.

Inspektion kl. $4^1/_4$—$4^1/_2$ i 3 etage: Brock.
i 2 etage: Schram.

2 L. G. 2.	Historie i nr. 12 .	Johanssen.
1 R. G.	Fransk i 1 L. G.	Wesenberg.
6 M. a. 1.	Geografi	Siewers (censor Schulerud).
6 M. a. 2.	Historie i 6 M. b.	Brock (censor Ræder).
5 M. a.	Historie	Bruenech.
4 M. a.	Tysk	Schram.

Fredag 4de juli.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage: J. Gjør.
i 2 etage: Brun.

Ex. art. L 1.	Historie i 3 L. G. . .	Johanssen (censor Brock).
2 R G.	Religion i nr. 12 . .	J. Gjør.
3 M. a.	Norsk	Brun.
3 M. b.	Historie (kl. 11) . .	Siewers.
2 M. a	Geografi (kl. 9) . . .	Siewers.
2 M. b.	Tysk	Christensen.
3 S.	Norsk skr.	frk. Bomhoff.
2 S. a.	Norsk skr.	frk. Aubert.
2 S. b.	Norsk skr.	frk. Larsen.

Eftermiddag.

Inspektion kl. $4^1/_4$—$4^1/_2$ i 3 etage: Bratt.
i 2 etage: Nærup.

2 L. G. 1.	Latin i nr. 12 . . .	Bratt.
1 L. G.	Historie	Brock.
1 R. G.	Engelsk i 5 M. a. . .	Wesenberg.
6 M b. 1.	Latin (kl. 4) 6 M. a. .	M. Gjør (censor Lowum).
6 M. b. 2.	Religion	Bomhoff (censor Eliassen).
5 M. b.	Mathematik	Nærup.
4 M. b.	Naturfag	Holt.

Lørdag 5te juli.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage: Nærup.
i 2 etage: Tornøe.

Ex. art. R. 1.	Geografi i 3. L. G.	M. Gjør og Nærup (censor Henrichsen).
— R. 2.	Religion i 2 L. G.	J. Gjør (censor Odland).
2 R. G.	Naturfag i nr. 12	Tornøe.
6 M. a. 1.	Norsk	Johanssen (censor Norby).
6 M. a. 2.	Naturfag i 6 M. b.	Holt (censor Hamilton).
6 M. b. 3.	Tysk i 5 M. b.	Bratt (censor Gundersen).
5 M. a.	Geografi . . .	Siewers.
4 M. a.	Engelsk . . .	Wesenberg.
3 M. b.	Norsk	Christensen.
2 M. b.	Religion . . .	Fuhr.
1 M.	Norsk	frk. Heyerdahl.
3 S.	Norsk	frk. Bomhoff.
2 S. a.	Norsk	frk. Aubert.
2 S. b.	Norsk	frk. Larsen.

Eftermiddag.

Inspektion kl. $4^1/_4$—$4^1/_2$ i 3 etage: Brock.
i 2 etage: Fuhr.

6 M. b. 1.	Fransk i 6 M. a.	Wesenberg (censor Hermanstorff).
6 M. b. 2.	Mathematik . .	Eliassen (censor Johannesen).
3 M. a.	Religion . . .	Fuhr.
2 M. a.	Naturfag . . .	Tornøe.

Mandag 7de juli.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage: Eliassen.
i 2 etage: Christensen.

Ex. art. L. 1.	Latin i 3 L. G. . .	Bratt (censor M. Gjør).
— R. 2.	Fransk i 2 L. G. . .	Smith (censor Wesenberg).
2 L. G. 1.	Fransk i nr. 12 . .	Gjertsen.
2 L. G. 2.	Mathematik i 6 M. a.	Eliassen.
6 M. b. 1.	Naturfag	Holt (censor Hamilton).
5 M. a.	Engelsk	Christensen.
4 M. b.	Latin	Torp.
3 M. a.	Geografi (kl. 8) i 2 M. a.	Siewers.
3 M. b.	Religion	Fuhr.
2 M. b.	Historie (kl. 11) i 2 M. a.	Siewers.
3 S.	Historie	frk. Bomhoff.
2 S. a.	Religion	frk. Aubert.
2 S. b.	Religion	frk. Larsen.

Eftermiddag.

Inspektion kl. $4^1/_4$—$4^1/_2$ i 3 etage: Holt.
i 2 etage: Bruenech.

2 R. G.	Norsk og tysk i nr. 12	M. Gjør.
1 L. G.	Mathematik	Holt.
1 R. G.	Geografi i 6 M. a. .	Nærup og Johanssen.
5 M. a.	Latin	Bruenech.
5 M. b.	Latin	Brock.
2 M. a.	Regning	Fuhr.

Tirsdag 8de juli.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage: Schram.
i 2 etage: Holt.

Ex. art. L. 2.	Norsk og oldnorsk i 3 L G.	Gjertsen og Gundersen (censor Lassen).
— R 1.	Fransk i 2 L. G. . . .	Smith (cens. Wesenberg).
6 M. a. 1.	Engelsk	Schram (cens. Grüner).
6 M. b. 3.	Geografi	Siewers (cens. Schulerud).
4 M. a.	Naturfag	Holt.
1 M.	Historie	frk. Heyerdahl.
3 S.	Regning	frk. Bomhoff.
2 S. a.	Geografi	frk. Aubert.
2 S. b.	Regning	frk. Larsen.

Eftermiddag.

Inspektion kl. $4^1/_4$—$4^1/_2$ i 3 etage: Bratt.
i 2 etage: Schram.

2 L. G.	Oldnorsk i nr. 12 . .	Bratt.
2 R. G.	Historie (kl. 4) i 4 M b.	Johanssen
1 L. G.	Norsk	Brock.
1 R. G.	Historie (kl 6) i 4 M. b.	Johanssen.
6 M. a. 2.	Mathematik	Nærup (censor Johannesen).
6 M. b. 2.	Latin (kl. 4) . . .	M. Gjør (censor Lowum).
5 M. a.	Fransk	Schram.
3 M. b.	Naturfag	Holt.
2 M. b.	Regning	Fuhr.

Onsdag 9de juli.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage: Brock.
i 2 etage: Brun.

Ex. art. L. 1.	Græsk i 3 L. G. .	Torp (censor Aars).
— R. 2.	Norsk og oldnorsk i 2 L. G.	M. Gjør (censor Schive).
6 M. b 1.	Geografi	Siewers (censor Schulerud).
5 M. b.	Historie	Brock.
3 M. a.	Naturfag	Eliassen.
2 M. a.	Norsk	Brun.
3 S. .	Religion	frk. Bomhoff.
2 S. a.	Regning	frk. Aubert.
2 S. b.	Geografi	frk. Larsen.

Eftermiddag.

Inspektion kl. $4^1/_4$—$4^1/_2$ i 3 etage: Schive.
i 2 etage: Fuhr.

2 L. G. 1.	Mathematik i nr. 12	Eliassen
2 R. G.	Mathematik og Naturfag i 6 M. a. .	Holt.
1 L. G.	Latin	Schive.
1 R. G.	Norsk i 6 M. b.	Johanssen.
4 M. b.	Religion	Fuhr.

Torsdag 10de juli.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 3 etage: Bomhoff.
i 2 etage: Brun.

Ex. art. L. 1.	Engelsk i 3 L. G. .	Schram (censor Sommerfelt).
— L. 2.	Latin i 2 L. G. .	Bratt (censor M. Gjør).
2 L. G. 2.	Religion i nr. 12 .	Bomhoff.
6 M. a. 2.	Geografi	Siewers (censor Schulerud).
6 M. b. 2.	Norsk	Brock (censor Norby).
6 M. b. 3.	Historie i 5 M. a.	Johanssen (censor Ræder).
5 M. b.	Norsk	Christensen.
3 M. a.	Tysk	Brun.
2 M. a.	Religion	Fuhr.
1 M.	Regning	frk. Heyerdahl.
3 S.	Geografi	frk. Bomhoff.

Eftermiddag.

Inspektion kl. $4^1/_4$—$4^1/_2$ i 3 etage: Bruenech.
i 2 etage: Tornøe.

1 L. G.	Tysk	Bruenech.
6 M. a. 1.	Religion	J. Gjør (censor Eliassen).
5 M. a.	Religion	Fuhr.
4 M. a.	Historie	Brun.
4 M. b.	Historie	Johanssen.
3 M. b.	Tysk	Wesenberg.
2 M. b.	Naturfag	Tornøe.

Fredag 11te juli.

Formiddag.

Inspektion kl. $8^3/_4$—9 i 2 etage: Schram.

Ex. art. L. 1.	Religion i 3 L. G.	Bomhoff (censor J. Gjør).
— R. 1.	Engelsk i 2 L. G.	Schram (censor E. Nicolaysen).

Udlevering af karaktersedlerne foregaar for smaaklasserne fredag 11te juli kl. 11, for de øvrige klasser ved skolens aarsfest, som holdes lørdag 12te juli kl. 11 i gymnastiklokalet; indgang fra St. Olafsgade.

Disciplene møder kl. $10^1/_2$ i sine klasseværelser.

Ferierne varer til mandag 25de august kl. 12 formiddag.

De til 1ste smaaklasse indmeldte disciple møder mandag 1ste september kl. 10. De øvrige nye disciple møder til optagelsesprøve mandag 25de august kl. 8 formiddag.

Til at overvære examens mundtlige del samt aarsfesten tillader vi os paa egne og medlæreres vegne at indbyde disciplenes forældre og verger og enhver anden, hvem skolens gjerning maatte interessere.

Kristiania i mai 1884.

Fr. Gjertsen. M. Gjør.

GJERTSENS SKOLE
ET PUERIS PALMAE