Danskernes Historie Online
Danske Slægtsforskeres Bibliotek

Dette værk er downloadet fra Danskernes Historie Online

Danskernes Historie Online er Danmarks største digitaliseringsprojekt af litteratur inden for emner som personalhistorie, lokalhistorie og slægtsforskning. Biblioteket hører under den almennyttige forening Danske Slægtsforskere. Vi bevarer vores fælles kulturarv, digitaliserer den og stiller den til rådighed for alle interesserede.

Støt Danskernes Historie Online - Bliv sponsor
Som sponsor i biblioteket opnår du en række fordele. Læs mere om fordele og sponsorat her: https://slaegtsbibliotek.dk/sponsorat

Ophavsret
Biblioteket indeholder værker både med og uden ophavsret. For værker, som er omfattet af ophavsret, må PDF-filen kun benyttes til personligt brug.

Links
Slægtsforskernes Bibliotek: https://slaegtsbibliotek.dk
Danske Slægtsforskere: https://slaegt.dk

LEDETRAAD

VED DEN FORBEREDENDE UNDERVISNING

I

PLANGEOMETRI.

INDBYDELSESSKRIFT TIL DEN OFFENTLIGE EXAMEN I CHRISTIANIA KATHEDRALSKOLE 1867.

AF

P. G. O. DÖRUM,

ADJUNKT.

CHRISTIANIA.

TRYKT I DET STEENSKE BOGTRYKKERI.

1867.

LEDETRAAD

VED DEN FORBEREDENDE UNDERVISNING

I

PLANGEOMETRI.

INDBYDELSESSKRIFT TIL DEN OFFENTLIGE EXAMEN I CHRISTIANIA KATHEDRALSKOLE 1867.

AF

P. G. O. DÖRUM,

ADJUNKT.

CHRISTIANIA.

TRYKT I DET STEENSKE BOGTRYKKERI.

1867.

Forord.

Nærværende lille Afhandling er bestemt til i Christiania Kathedralskole (og tillige i andre Skoler), hvor det er vedtaget at indlede Mathematik-Undervisningen ved at bibringe Disciplene Færdighed i de vigtigste arithmetiske og geometriske Operationer, for Geometriens Vedkommende at tjene som Hjælpemiddel dertil. At Bogen tillige kunde være tjenlig f. Ex. i Tegne- eller Søndagsskoler haaber jeg, men dette er dog kun et underordnet Hensyn. Skjønt jeg har ladet Beviserne for Opgavernes rigtige Opløsning hovedsagelig bero paa Induktion, hvilket ifølge den lagte Plan især gjælder for Grund-Operationernes Vedkommende, som rette Liniers Halvering, rette Vinklers Konstruktion o. s. v., er der dog ved Henvisninger og paa anden Maade sørget for, at Disciplene saavidt muligt kunne lære at kjende, hvad der ligger til Grund for Konstruktionerne. Det er ikke min Mening, at ved denne Bog Disciplenes Lektie-Læsning skal forøges; men den kunde maaske være Læreren tjenlig som Ledetraad og Disciplene som Haandbog, hvori de kunne finde Rede paa, hvad deres Hukommelse ikke har kunnet fastholde. Foruden de Opgaver, hvis Opløsning findes angiven, ere ogsaa ved hvert Afsnit endel dertil hørende Opgaver fremsatte uden Opløsning, hvilke Disciplene til Övelse og fastere Indprentning af hvad de have lært skulle opløse, dels uden, dels med Lærerens Bistand, eftersom denne maatte finde det nødvendigt eller hensigtsmæssigt. Blandt disse Opgaver ere der nogle, som med Hensyn til de givne Maal referere sig til

visse i Bogen indtrykte Figurer. Dette er saaledes anordnet, for at Læreren, idet Disciplene til Konstruktionen skulle benytte de samme Dimensioner, skal have lettere for at kontrollere deres Arbeide, ikke alene med Hensyn til Fremgangsmaadens Rigtighed, men ogsaa til Udførelsens Nøiagtighed. Forøvrigt bemærkes, at der forud for eller ved Siden af et saadant Forberedelseskursus i Geometri er forudsat at gaa et lignende i Arithmetik, hvorved Disciplene gjøres bekjendte med Begreberne: Positivt og Negativt, med Decimalbrøk, Uddragning af Kvadratrod og de 3 første Regningsarter med Bogstavstørrelser.

Christiania den 15de Juni 1867.

P. G. O. Dörum.

1ste Afsnit.

Definitioner eller Forklaringer.

§ 1. Legeme, Flade, Linie og Punkt. 1. Et Legeme er en begrændset Del af Rummet. Der tages her kun Hensyn til Størrelse og Skikkelse (Form), men ikke til det Stof, der udfylder Legemet. — Tænke vi os saaledes tvende ligestore Kugler, den ene af Træ og den anden af Jern, saa se vi i den rene Geometri bort fra (abstrahere fra) den Forskjel imellem dem, der finder Sted paa Grund af det ulige Stof, hvoraf de ere forfærdigede, og betragte dem som aldeles lige. — Legemets Dele ere ogsaa Legemer.

2. Et Legemes Grændse kaldes dets Overflade. Denne selv og enhver Del deraf benævnes en Flade.

3. En Flades Grændse kaldes dens Omkreds. Denne selv og enhver Del deraf benævnes en Linie.

4. Naar en Linie deles, kaldes Grændsen imellem dens Dele et Punkt. — Et saadant kan ikke deles.

5. Et Legeme har 3 Dimensioner (Udstrækninger), nemlig Længde, Bredde og Høide (ogsaa ofte kaldet Dybde eller Tykkelse); en Flade kun 2, nemlig Længde og Bredde, en Linie har kun 1 Udstrækning; Længde; et Punkt har ingen Udstrækning.

6. At konstruere er ved Hjælp af Tegning at fremstille for Øiet Legemers, Fladers eller Liniers Størrelse, Form og gjensidige Stilling.*)

7. En Linie fremstilles paa Papiret ved en Streg. Da en Linie har hverken Tykkelse eller Bredde, saa afgiver Stregen et saameget mere fuldkomment Billede af en geometrisk Linie, jo finere den med Blyant eller Tusk (ved Hjælp af Ridsefjæren) bliver dragen. — Et Punkt, der ogsaa egentlig skulde være usynligt, anskueliggjøres ved to hinanden krydsende Linier, idet Punktet er det Sted, hvor Linierne støde sammen. For at skjelne imellem flere Punkter betegnes og benævnes de ved Bogstaver, der skrives i Nærheden af dem; f. Ex. Punktet B. Fig. 4 (Side 5), Punktet D. Fig. 16 (Side 13). En Linies Retning betegnes ved to eller flere Bogstaver, stillede langs henad Linien og tæt ved denne f. Ex. Linien AD. Fig. 6 (Side 6). — Har Linien en bestemt Længde, saa betegnes den ved Bogstaver, der anbringes ved dens Endepunkter, f. Ex. Linien AB Fig. 15; (Side 11); eller ogsaa ved et lidet Bogstav, stillet omtrent ved Midten af Linien, f. Ex. Linien b Fig. 15.

8. To Størrelser (Linier, Flader eller Legemer) siges at være kongruente, naar de kunne tænkes lagte saaledes paa hinanden, at de fuldstændigen dække hinanden. Man skriver da følgende Tegn $\cong$ imellem Størrelserne; f. Ex. i Fig. 1 ab $\cong$ AB, der læses: Linien ab er kongruent med Linien AB.

---

*) Idet Læreren gjennemgaar det 1ste Afsnit for Disciplene, bør disse paa Papir udføre de simple Konstruktioner, for at vænne sig til at haandtere Instrumenterne.

§ 2. Ret Linie, Plan. 9. Fra et Punkt til et andet kan man altid tænke sig en ret Linie dragen, og udenfor Punkterne forlænget i begge Retninger saa langt man vil. For paa Papiret at drage en ret Linie betjener man sig af en Lineal. Man maa undersøge, hvorvidt Linealen virkelig danner en ret Linie. I den Hensigt trækker man langs Kanten imellem Endepunkterne a og b (Fig. 1) en Linie AB eller A'B', idet Linealen først lægges i Stillingen 1. Dernæst dreies den om den omtalte Kant, idet dens Endepunkter fremdeles forblive liggende over Endepunkterne af den dragne Linie: (a paa A' og b paa B'); efter denne Omdreining indtager Linealen Stillingen 2. Hvis Linealkanten nu er en ret Linie, saa maa ogsaa, naar Linealen indtager Stillingen 2, dens Kant ab i sin hele Udstrækning falde sammen med den først dragne Linie AB eller A'B'. — Hvorledes dette ikke vilde finde Sted, hvis Linealkanten ab ikke danner en ret Linie, sees af Fig. 2. —En Linie, hvoraf ingen Del er ret, kaldes en krum Linie. — En brækket Linie er sammensat af flere sammenstødende Linier, hvoraf alle eller nogle kunne være rette. — Naar ingen Misforstaaelse deraf kan opstaa, kaldes en ret Linie ofte simpelthen en Linie.

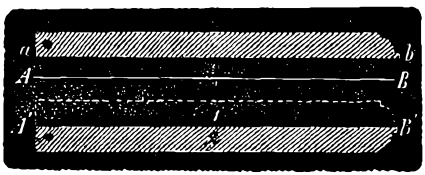

Fig. 1.

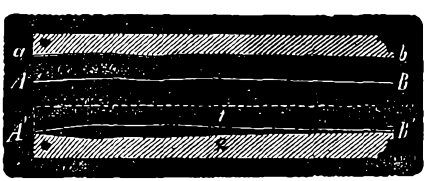

Fig. 2.

10. Den rette Linie imellem to Punkter er den kor-

teste Linie, der kan drages imellem dem, og den kaldes deres Afstand.

11. Et Plan er en Flade, i hvilken man gjennem hvilkesomhelst to Punkter kan drage en ret Linie, der fuldstændig ligger i Fladen. — Man undersøger derfor om en Flade er et Plan ved i forskjellige Retninger at holde Kanten af en prøvet Lineal (paatværs) mod Fladen. — Har Fladen hverken Forhøininger eller Fordybninger, saa er den et Plan. Papiret, hvorpaa vi tegne, bør danne et Plan. En Figur, der ligger i et Plan, kaldes en plan Figur.

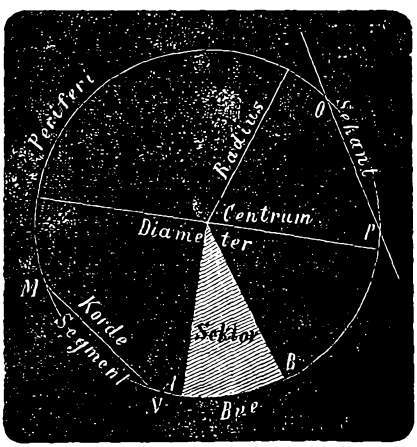

Fig. 3.

§ 3. Cirkel. 12. En Cirkel (Cirkelflade, Fig. 3) er en plan Figur, indesluttet af en krum Linie, i hvilken ethvert Punkt har samme Afstand fra et Punkt i Planet, der kaldes Cirkelens Centrum. Afstanden fra Centrum til et Punkt i den krumme Linie kaldes Radius. Den Cirkelfladen omsluttende Linie hedder Periferi, men kaldes ogsaa ofte Cirkellinie eller blot Cirkel. En Del af Periferien kaldes en Bue. Foran de Bogstaver, hvormed Buen benævnes, sættes Buetegnet ⌒; f. Ex. ⌒ AB (læs Buen AB). — En Sekant er en ret Linie, der gjennemskjærer Cirkelen; den Del af en Sekant, der ligger indenfor Periferien, hedder en Korde. — Den største Korde

man kan drage i en Cirkel er den, der gaar igjennem Centret; den kaldes en Diameter, og er dobbelt saa stor som en Radius. — Til ligestore Buer i en Cirkel høre ligestore Korder: Er ⌒ MN = ⌒ OP, saa er ogsaa Korden MN = Korden OP.

13 Til at frembringe en Cirkel benyttes en Passer, hvilket Instrument ogsaa overhovedet bruges til at afsætte ligestore Afstande. — Skal Passeren anvendes i det førstnævnte Øiemed, saa ombyttes dens ene Ben med det saakaldte Blyantknæ eller med en Ridsefjær. — Til Passerens Brugbarhed udfordres især: 1) at dens Bens Endepunkter løbe ud i en Spids, der paa Papiret efterlade et Indtryk, saavidt muligt svarende til et Punkt; 2) at den, engang sat i en vis Stilling, bevarer denne uforandret, indtil man med Forsæt aabner eller lukker den mere.

14. En Del af Cirkelfladen, der begrændses af en Bue og to Radier, kaldes en Sektor. — En Del af Cirkelfladen, der begrændses af en Bue og dens tilhørende Korde, hedder et Segment.

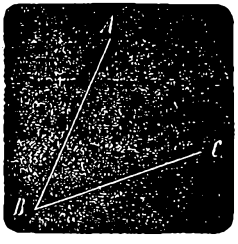

Fig. 4.

§ 4. Vinkel. 15. Naar to rette Linier støde sammen, fremkommer en Vinkel (Fig. 4). Vinkelen bliver den samme, enten Linierne ere lange eller korte, idet Vinkelens Størrelse kun beror paa, hvormeget Linierne hælde ud fra hinanden. De to Linier, der danne Vinkelen, kaldes dens Ben, og det Punkt, hvorfra de begge gaa ud, dens Toppunkt. — En Vinkel betegnes ved 3 Bogstaver, hvoraf et sættes ved Toppunktet og et ved hvert af Benene i vilkaarlig Afstand fra Toppunktet. Ved Vinkelens Benævnelse maa man

iagttage, at Bogstavet ved Toppunktet sættes imellem de to andre; tillige skrives foran Bogstaverne Vinkeltegnet $<$. Saaledes kan Vinkelen i Fig. 4 benævnes $<$ ABC eller $<$ CBA, men ikke $<$ BAC eller ACB osv. — Støde i et Punkt ikke mere end to Linier sammen, saa kan man ogsaa benævne den fremkomne Vinkel alene ved Bogstavet i Toppunktet; hin Vinkel kan derfor ogsaa kaldes $<$ B. — En saadan Benævnelse lader sig derimod ikke anvende hvor, som i Fig. 5, mere end to Linier løbe ud fra et Punkt. — Her maa de fremkomne Vinkler enten benævnes ved 3 Bogstaver, som $<$ABC og $<$CBD, eller der maa anbringes ved hver af dem imellem deres Ben og nær ved Toppunktet et lidet Bogstav, hvorved Vinklerne benævnes, nemlig som $<$ o og $<$ p. — To saadanne Vinkler, der have fælles Toppunkt og et fælles Ben, kaldes Sidevinkler.

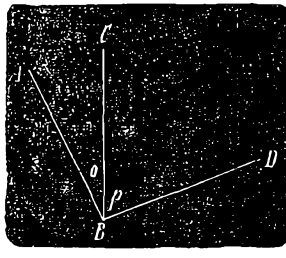

Fig. 5.

16. Ligge so Sidevinklers ikke sammenfaldende Ben paa hver Side af Toppunktet udstrakte i en ret Linie, saa kaldes Vinklerne Nabovinkler; f. Ex. $<$ o og $<$ p Fig. 6.

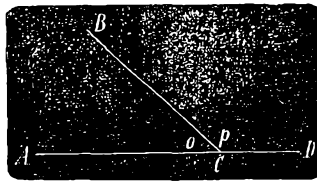

Fig. 6.

§ 5. Foreløbigt om Vinklers Størrelse, ret Vinkel osv. 17. I Fig. 7 er fremstillet en Vinkel $<$ ACB. — Slaar man med vilkaarlig Radius CA en Cirkel om Toppunktet C, og tænker man sig først Linierne CA og CB at hælde meget lidet ud fra hinanden eller $<$ ACB at være meget liden, saa vil Buen

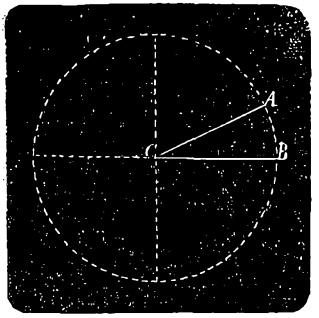

Fig. 7.

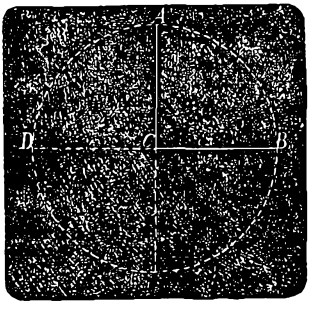

Fig. 8.

AB imellem Liniernes Skjæringspunkter med Cirklen blive liden. — Lader man nu det ene Ben CB ligge stille, medens man tænker sig det andet Ben CA dreiet opad om C, saa voxer Vinkelen ACB og i samme Forhold ogsaa Buen AB. — Man kan derfor bruge Buen som Maal for Vinkelen. — Forlænges som i Fig. 8 det ene Ben BC paa den anden Side af Toppunktet til D, og dreies, ligesom ovenfor, det andet Ben CA opad indtil $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AD}$, saa er ogsaa $\angle ACB = \angle ACD$ og hver af disse Vinkler kaldes da en ret Vinkel. — Ifølge 16 ere Vinklerne ACB og ACD Nabovinkler, og man kan derfor sige, at en ret Vinkel er en Vinkel, der er saa stor som sin Nabovinkel. En ret Vinkel betegnes med Bogstavet R, og om de to Linier, der med hinanden danne en ret Vinkel, siger man, at den ene staar perpendikulær eller lodret paa den anden, hvilket antydes ved følgende Tegn $\perp$, sat imellem de Bogstaver, der betegne Linierne. Saaledes er i Fig. 8 $\angle ACB = R$ [Vinkelen ACB er en ret Vinkel] og $AC \perp CB$, [Linien AC er lodret paa Linien CB].

18. En Vinkel, som ikke er ret, kaldes skjæv. Er den mindre, end en ret Vinkel som $\angle ACB$, Fig. 7., kaldes den en spids Vinkel; en Vinkel, der som

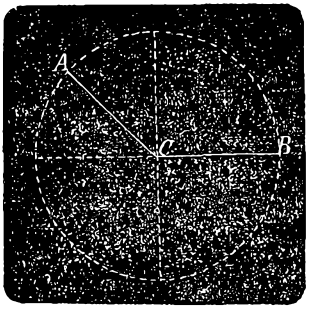

Fig. 9.

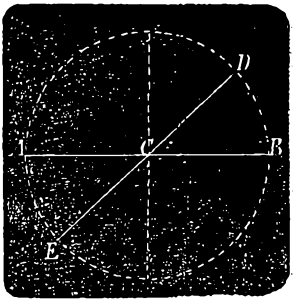

Fig. 10.

$<$ ACB, Fig. 9, er større end en ret Vinkel, kaldes en stump Vinkel. — Ligger, som ved $<$ ACB Fig. 10, begge Ben CA og CB paa hver sin Side af Toppunktet udstrakte i en ret Linie, saa kaldes Vinkelen en lige Vinkel, og denne er dobbelt saa stor som en ret Vinkel ($<$ ACB $=$ 2 R). En Vinkel, som er mindre end en lige Vinkel, kaldes konkav, hvorimod en Vinkel, der er større end en lige Vinkel, kaldes konvex.

19. Af Figur 10 sees, at to Nabovinklers Sum udgjør en lige Vinkel eller to rette Vinkler: ($<$ACD $+$ $<$DCB $=$ 2 R). Overhovedet er Summen af alle de Vinkler, som have et fælles Toppunkt og ligge paa samme Side af en ret Linie $=$ 2 R; — altsaa Summen af alle Vinkler i et Plan, naar de have fælles Toppunkt, $=$ 4 R.

20. Naar to rette Linier skjære hinanden, fremkomme 4 Par Nabovinkler, saaledes i Fig. 10 af Linierne AB og DC, der skjære hinanden i C: 1) $<$ ACD og og $<$ DCB; 2) $<$ DCB og $<$ BCE; 3) $<$ BCE og $<$ ECA, og 4) $<$ ECA og $<$ ACD; og tillige 2 Par Vinkler, der vel ligesom hine have fælles Top-

punkt, men intet fælles Ben, nemlig: 1) < ACD og < ECB, og 2) < ACE og < DCB. — Saadanne Vinkler kaldes Topvinkler, og de til samme Par hørende Topvinkler ere ligestore. Saaledes er < DCB = < ACE. Thi da < ACE + < ECB = < ECB + < BCD, nemlig = 2 R (se 19), saa faar man, naar man fra hver af de ligestore Summer borttager < ECB, at < ACE = < DCB.

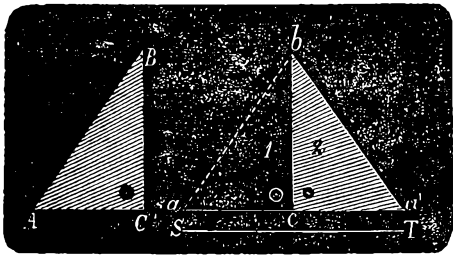

Fig. 11.

21. Hvorledes man konstruerer en ret ret Vinkel eller en Linie lodret paa en anden, skal blive vist i det Følgende. — Foreløbigt bemærkes, at man ofte som Hjælpemiddel hertil benytter en Vinkelhage af Træ eller Messing ACB Fig. 11. Dens to Kanter CA og CB skulle danne en ret Vinkel. Hvorvidt dette er Tilfældet, undersøger man saaledes: Man drager en ret Linie ST. Langs henad denne og ganske tæt ved den lægges den ene af Vinkelhagens kortere Kanter f. Ex. AC, saaledes at Vinkelhagen indtager Stillingen 1, hvorefter man drager en fin Streg langs den anden af Vinkelhagens kortere Kanter CB. Denne fine Streg er paa Figuren betegnet med cb. Om Kanten CB dreies dernæst Vinkelhagen saaledes, at den indtager Stillingen 2, idet man atter sørger for, at Kanten AC kommer til at ligge langs den først dragne Linie. — Er da Vinkelhagen retvinklet, saa maa ogsaa i denne Stilling, Kanten CB følge langs den dragne Linie cb. — Thi de to rette

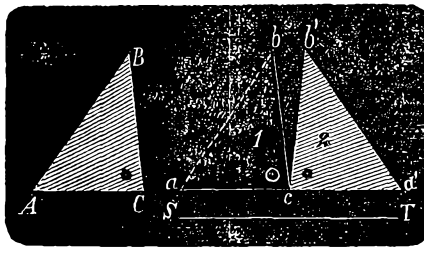

Fig. 12.

Vinkler bca og bca' skulle efter 18 tilsammen danne en lige Vinkel. — Hvorledes ved hin Prøve de i Vinkelhagens tvende forskjellige Stillinger langs Kanten CB dragne Linier cb og cb' ikke falde sammen, naar $\angle$ ACB er lidt spids, sees i Fig. 12; er Vinkelen stump, saa vil denne Feil paa samme Maade lige saa let lægges for Dagen.

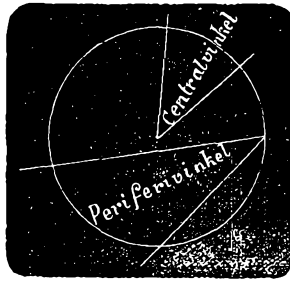

Fig. 13.

22. En Vinkel, hvis Toppunkt er en Cirkels Centrum, siges i denne Cirkel at være en Centralvinkel, ligger det i Periferien, en Periferivinkel; se Fig. 13.

2det Afsnit.

Foreløbigt om rette Linier, hvis Størrelse eller Retning afhænger af andre rette Liniers.

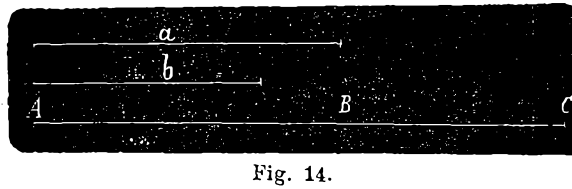

Fig. 14.

§ 1. Addition, Subtraktion og Halvering af rette Linier. 23. 1ste Opgave. Skulle Linierne a og b (Fig.

14) adderes, saa drager man en ret Linie og afsætter ved Hjælp af Passeren (uden Blyantknæ eller Ridsefjær) fra et vilkaarligt Punkt A et Stykke AB = a, og dernæst fra B i samme Retning BC = b, saa er AC = a + b.

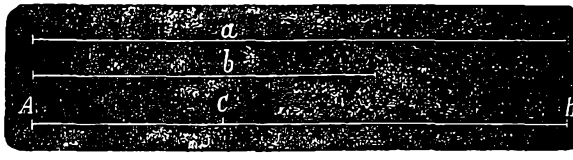

Fig. 15.

24. 2den Opgave. Fig. 15. Skal man fra Linien a subtrahere b, saa drages en ret Linie, hvorpaa man fra et vilkaarligt Punkt A afsætter AB = a (nemlig Minuenden); dernæst fra B tilbage eller i modsat Retning BC = b; da er AC = a — b.

25. Baade ved Addition og Subtraktion af rette Linier maatte man saaledes begynde med at drage en ret Linie og paa samme vælge et Udgangspunkt. Fra dette Punkt betragtes Udstrækningen i den ene Retning som positiv og betegnes med +, Udstrækningen i den modsatte Retning som negativ og betegnes med —. Naar ved Additionen, som ovenfor, begge Linier afsættes i samme Retning, altsaa begge ere positive, eller begge negative, saa bliver deres Sum i første Tilfælde positiv, i sidste negativ. Summen af to positive Linier er positiv, af to negative Linier, negativ. Naar saaledes f. Ex. i Fig. 14 (Side 10) A er Udgangspunktet og Retningen tilhøire betegnes med +, saa er AB = + a og BC = + b og Summen a + b = + AC; betegnes derimod Retningen tilhøire med —, saa er AB = — a og BC = — b og Summen (— a) + (— b) = — AC. — Skal

den ene af Linierne f. Ex. a betragtes som positiv, den anden b som negativ, og ville vi, idet vi betegne Retningen tilhøire med +, addere disse Linier, saa maa vi først afsætte a mod Høire (fordi a'er positiv) fra A til B (Fig. 15), dernæst fra B afsætte b mod Venstre (fordi b er negativ) og vi kommer derved til B. Der udkommer saaledes som Sum AC, der ligger paa høire Side af A. Summen er altsaa + AC. — Men aldeles paa samme Maade gik vi ovenfor frem og fik ogsaa samme Resultat, da vi subtraherede b fra a. — At addere en positiv og en negativ Linie er altsaa det samme som at subtrahere denne fra hin. — I dette Exempel var den positive Linie større end den negative. — For at se, hvad Resultat man vilde faa, hvis den negative Linie var størst, ville vi antage, at a var negativ og b positiv. Tillige ville vi nu betegne Retningen fra A mod Høire med —, Retningen mod Venstre med +. Fra A maa vi da afsætte AB mod Høire (fordi a er negativ), og BC mod Venstre (fordi b er positiv). Man faar da, ligesom før, Summen AC. men som, da AC ligger tilhøire for A, bliver negativ. Altsaa er b — a = — AC, medens a — b var = + AC. — Summen af en positiv og en negativ Linie findes derfor ved at subtrahere den mindre fra den større; det Udkomne faar +, hvis den største Linie har +, i modsat Fald —. Vare begge Linier ligestore, saa maatte man maale lige langt frem og tilbage; naar man subtraherer to ligestore Linier fra hinanden bliver Differentsen 0.

26. 3die Opgave. At halvere en ret Linie. Linien være AB Fig. 16. Med en Radius AD = AE, der forøvrigt er vilkaarlig, men dog efter Øiemaal større end

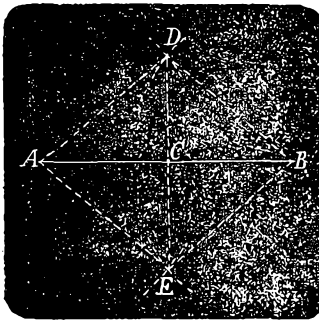

Fig. 16.

den givne Linies Halvdel*) slaaes paa begge Sider af den givne Linie et Par Smaabuer fra Liniens ene Endepunkt A (d. e. med A som Centrum); med samme Radius slaaes et Par lignende Buer fra det andet Endepunkt B. Igjennem Punkterne D og E, hvor de sidste Buer skjære de første, drages en ret Linie DC, der skjærer AB i C. Da er AC = CB = $\frac{1}{2}$ AB.

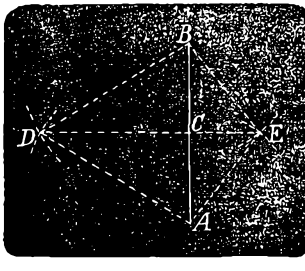

Fig. 17.

27. Det er ikke nødvendigt at alle Buerne sre slagne med samme Radius, men det ene Par Buer kan være slaget med en, det andet Par med en anden Radius, som i Fig. 17, hvor AB er halveret i C, idet AD = BD og AE = BE, medens AD og AE ikke ere ligestore, eller i Fig. 18 (Side 14), hvor AD = BE og AE = BD, medens AD og BD ikke ere ligestore. — Det er heller ikke nødvendigt, at de hinanden krydsende Smaabuer (Krydsbuerne) ligge paa modsatte Sider af den Linie, der skal deles. I

---

*) Under Konstruktionen med Blyant drages alle andre Linier helt ud, hvorimod under den paafølgende Optrækning med Tusk kun de givne og søgte Linier drages ud, men alle Hjælpelinier fremstilles ved korte Streger, saaledes som det sees paa Figuren i Bogen.

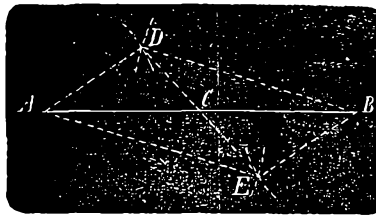

Fig. 18.

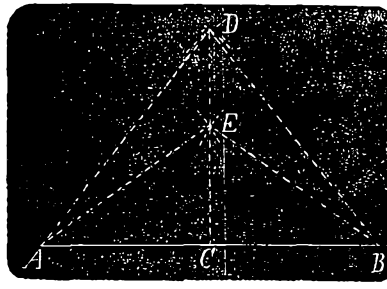

Fig. 19.

Fig. 19 er AB halveret i C, idet Krydsbuerne ere slagne med Radierne AD = BD og AE = BE.

28. Opgaver. Med Linierne a, b og c, Fig. 20, at udføre følgende Konstruktioner: 1) At finde en Linie = 2 a (d. e. dobbelt saa stor som a); 2) a + b — c; 3) 2 a + b — 3 c; 4) $\frac{1}{4}$ a; 5) $\frac{1}{8}$ a; 7) 3 a — b + $\frac{3}{4}$ c; 8) $\frac{3\,a + c}{4}$; 9) $\frac{3\,a - b}{2}$; 10) $1\frac{1}{2}$ (a + b) — $\frac{3}{4}$ (a + c).

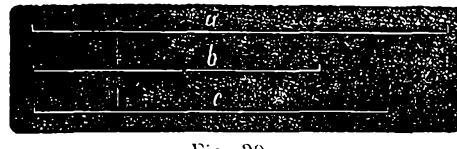

Fig. 20.

§ 2. Addition, Subtraktion og Halvering af Vinkler.

29. 1ste Opgave. At afsætte en Vinkel saa stor som en given. — Den givne Vinkel være ACB Fig. 21 (Side 15). Den søgte Vinkels Toppunkt c og dens ene Ben cb ere givne eller vælges efter eget Tykke. Med en vilkaarlig Radius CA slaaes to Cirkelbuer, den ene om C, den anden om c. Dernæst aabner man Passeren imellem den ene Bues Skjæringspunkter med den givne Vinkels Ben, altsaa fra A til B; beholdende denne Passeraabning sætter man Passerens

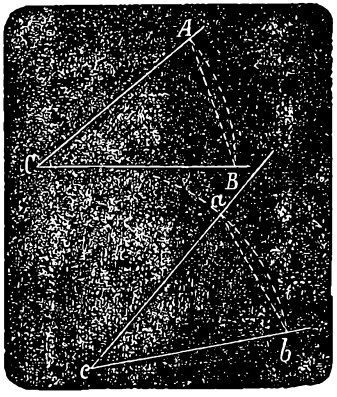

Fig. 21.

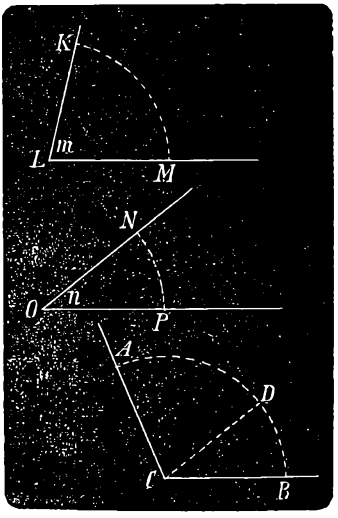

Fig. 22.

ene Spids i b, hvor den søgte Vinkels ene Ben skjæres af den over samme dragne Bue, og den anden Passerspids paa den samme Bue i a. Naar da ca drages, saa er $<$ acb $=$ $<$ ACB.

30. 2den Opgave. At addere to Vinkler. Den ene Vinkel $=$ $<$ m Fig. 22, den anden $<$ n. — Man drager en Linie CB som den søgte Vinkels ene Ben, og vælger et Punkt C i samme Linie til dens Toppunkt. Med vilkaarlig men ens Radius slaaes 3 Buer om Toppunkterne L, O og C, nemlig $\frown$ KM, $\frown$ NP og (af vilkaarlig Længde) $\frown$ AB. — Fra B til D afsættes BD $=$ NP og i samme Retning fra D til A afmaales DA $=$ MK. Drages nu en Linie fra C igjennem A, saa er $<$ ACB $=$ $<$ n $+$ $<$ m , (da efter 29 DCB $=$ $<$ n og $<$ ACD $=$ m).

31. 3die Opgave. Fra en Vinkel at subtrahere en anden. Fra $<$ m, Fig. 23 (Side 15), skal subtraheres

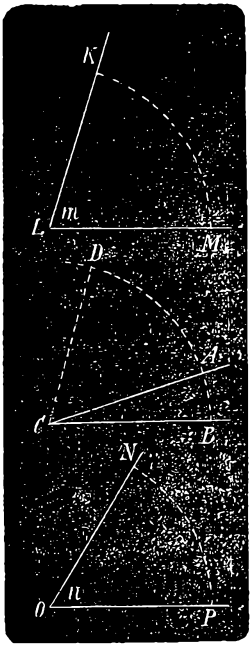

Fig. 23.

< n. — Efter til den søgte Vinkel at have valgt Toppunktet C og det ene Ben CB, slaar man med vilkaarlig, men ens Radius de tre Buer KM, NP og (af vilkaarlig Længde) DB; dernæst afmaaler man Minuendens Bue MK fra B til D, og Subtraktors Bue NP i modsat Retning fra D til A. — Naar nu CA drages, saa faaes < ACB = < m — < n (idet < DCB = < m og < DCA = < n).

32. Baade ved Addition og ved Subtraktion maatte man begynde med at vælge for den søgte Vinkel dens Toppunkt og dens ene Ben, samt slaa de omtalte Buer. — Idet man gaar ud fra det Punkt B (i Fig. 22 og 23), hvor Buen BD skjærer den søgte Vinkels ene Ben, ansees den ene Retning (f. Ex. opad) for positiv, og de i denne Retning afskaarne Buer eller deres tilhørende Vinkler betegnes med +, den modsatte Retning betragtes som negativ, idet de i denne Retning afskaarne Buer eller deres tilhørende Vinkler betegnes med —. Skulle to positive Vinkler adderes, saa føies de sammen som ovenfor vist, og man faar som Sum en positiv Vinkel (< m + < n = + < ACB Fig. 22). Ligeledes faar man, hvis begge Vinkler, der skulle adderes, ere negative, deres Sum ved paa samme Maade at føie dem sammen (idet begge afsættes i ens Retning), men den fremkomne Vinkel er da ne-

gativ. Betragtes saaledes i Fig. 22 (Side 15) de to Vinkler m og n som negative, og Retningen langs BD opad fra B som negativ, saa bliver $-\angle m + -\angle n = -\angle$ ACB. — Naar to Vinkler, som enten begge ere positive eller begge negative, skulle adderes, saa afsættes deres Buer ved Siden af hinanden i samme Retning, og den fremkomne Vinkel bliver i første Tilfælde positiv, i sidste negativ. Vi ville nu undersøge, hvorledes man skal finde Summen af en positiv og en negativ Vinkel (Fig. 23, Side 16). — m være positiv og n negativ; man skal altsaa finde $\angle m + -\angle n$. Lader os betragte Retningen opad fra B som positiv. Først afsættes $\frown BD = \frown MK$ opad (da $\angle m$ er positiv), derpaa $\frown DA = \frown NP$ nedad (da $\angle n$ er negativ) til A, og man faar $\angle m + -\angle n = +\angle$ ACB (positiv, fordi A ligger i Retningen opad fra B). — Men aldeles paa samme Maade og med samme Resultat blev i 31 $\angle n$ subtraheret fra $\angle m$. — Til en positiv Vinkel at addere en negativ er saaledes fuldkommen det samme som fra hin at subtrahere denne, naar begge betragtes som positive. I dette Exempel var den positive Vinkel størst. — For at betragte det omvendte Tilfælde ville vi, idet vi betragte $\angle m$ som negativ og $\angle n$ som positiv, tillige anse Retningen opad fra B som negativ. — Man afsætter $\frown KM$ opad (da $\angle m$ er negativ) fra B til D, og $\frown NP$ nedad (da $\angle n$ er positiv) fra D til A. — Man faar saaledes atter ud $\angle$ ACB, men som negativ (da A ligger i Retningen opad fra B). — Man erholdt altsaa $\angle n + -\angle m = -\angle$ ACB, medens ovenfor fandtes $\angle m + -\angle n = +\angle$ ACB. — Naar saaledes to Vinkler skulle adderes, hvoraf den ene er posi-

tiv, den anden negativ, saa subtraheres den mindre Vinkel fra den større (efter 31) og den udkomne Vinkel faar +, hvis den største Vinkel har +, i modsat Fald —. Ere Vinklerne i dette Tilfælde ligestore, saa bliver det Udkomne = o.

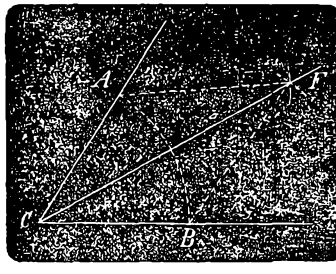

Fig. 24.

33. 4de Opgave. At halvere en Vinkel. Vinkelen være ABC Fig. 24. — Med vilkaarlig Radius CA slaar man om dens Toppunkt en Bue AB, og fra Punkterne A og B, hvor denne Bue skjærer Vinkelens Ben, med ligeledes vilkaarlig men ligestor Radius de smaa Buer, der skjære hinanden i F. Drages Linien FC, saa er $\angle$ ACF = $\angle$ FCB = $\frac{1}{2}$ $\angle$ ACB. Hvorledes en Vinkel skal halveres, naar man paa Papiret ikke kan forlænge dens Ben til deres Skjæringspunkt, skal senere vises.

34. Opgaver. Fig. 22 (Side 15). (1,) 2. $\angle$ m. (2) 3. $\angle$ n. (3) $\frac{1}{4}$. $\angle$ m. (4) $\frac{3}{4}$. $\angle$ n. (5). $\frac{3}{4}$. $\angle$ m + 2. $\angle$ n (6) $\frac{3}{4}$. $\angle$ m + $\frac{5}{6}$. $\angle$ n. (7). $\frac{3}{4}$. $\angle$ n — $\frac{3}{8}$. $\angle$ m. — (8). $\frac{3\,(m+n)}{2}$ — $\frac{5\,(m-n)}{4}$.

§ 3. Linier, perpendikulære paa hinanden. Tangenter til Cirkler. 35. 1ste Opgave. Fra et Punkt i en Linie at opreise en perpendikulær paa denne. Linien være AB Fig. 25 (Side 19), det givne Punkt i samme være C. Man afsætter E og F i ligestore Afstande fra C, aabner derpaa Passeren mere, og slaar med en Radius ED = FD, de to smaa Buer, der skjære hinanden i D. Drages nu DC, saa er DC $\perp$ AB.

36. En anden Fremgangsmaade, der især kommer til Anvendelse, naar man skal opreise en Perpendikulær paa en ret Linie i eller nærved dens Endepunkt, og man ikke paa Papiret kan forlænge Linien, er følgende (Fig. 26.) — Linien være AB, og Punktet B. Man sætter Passerspidsen i B og slaar med en vilkaarlig Radius en Bue. I et

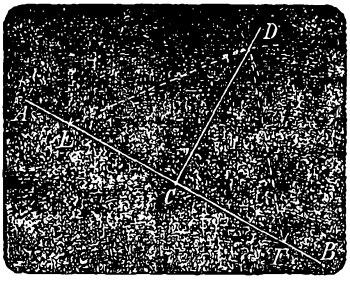

Fig. 25.

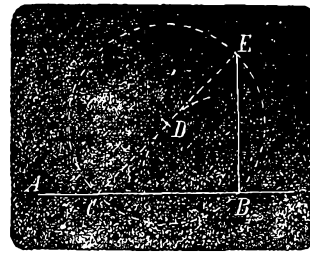

Fig. 26.

vilkaarligt Punkt af denne Bue, f. Ex. i D, (der dog bør vælges saaledes efter Øiemaal, at en Linie, som man tænker sig dragen fra D til B, danner med AB omtrent Halvdelen af en ret Vinkel) sætter man nu Passerspidsen, lader Passerens Aabning uforandret og slaar en Cirkel, der da maa gaa igjennem B og tillige skjære den rette Linie i et andet Punkt C. Fra dette drages Diameteren CE, og fra E drages EB, saa er $\angle$ EBC = R eller EB $\perp$ AB. — Hvorledes man kan udføre Konstruktionen ved Hjælp af Linealen og Vinkelhagen, skal senere vises.

37. En ret Linie, der kun har 1 Punkt tilfælles med en Cirkel, kaldes en Tangent eller Berøringslinie til denne, og hint Punkt kaldes Berøringspunktet. — En Tangent til et Punkt i en Cirkel maa staa lodret paa Radien til Punktet. 2den Opgave. At drage en Tangent til et Punkt i en Cirkel. Fig. 27 (p. f. S.) En Radius drages til det givne Punkt (A eller B) og paa en af de

nys angivne Maader opreises EA ⊥ CA eller GB ⊥ CB, saa er EA saavelsom GB Tangenter til den givne Cirkel.

38. 3die Opgave. Fra et Punkt udenfor en ret Linie at nedfælde en Perpendikulær paa denne. Det givne Punkt være C, Fig. 28, og den givne Linie AB.

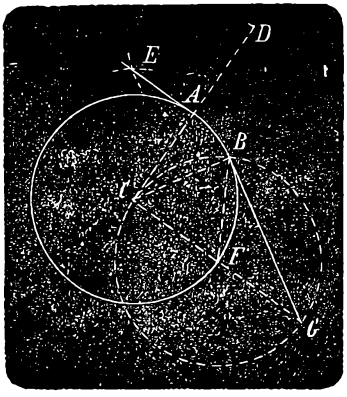

Fig. 27.

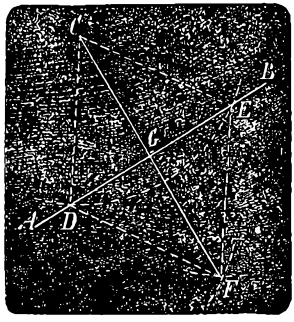

Fig. 28.

— Med Radius CD = CE (vilkaarlig) afsættes Punkterne D og E. Med vilkaarlig men ligestor Radius fra D og E slaaes de smaa Buer, der skjære hinanden i F, hvilket Punkt forbindes med C ved Linien CF. Da er CG ⊥ AB.

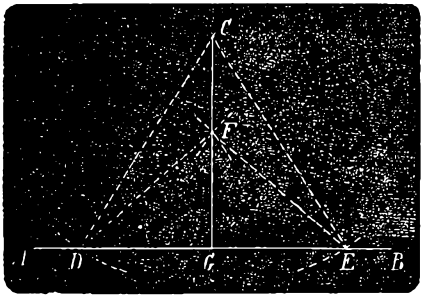

Fig. 29.

39. De hinanden krydsende Buer kunne ogsaa ligge paa samme Side af den rette Linie, paa hvilken det givne Punkt ligger, saaledes som det vises i Fig. 29, hvor CD = CE og DF = EF, hvorved CG er bleven ⊥ AB.

40. Ligger det givne Punkt næsten lodret over den givne Linies ene Endepunkt, og kan man paa Papiret ikke forlænge denne, saa gaar man frem paa følgende Maade:

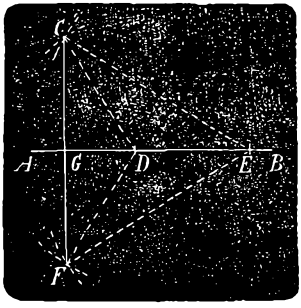

Fig. 30.

Linien være AB. Fig. 30, og Punktet C. Man vælger i Linien to Punkter D og E; slaar med Radius EC en Cirkel fra E som Centrum tversover Linien AB; ligeledes med Radius DC en Cirkel fra D, hvilken sidste Cirkel skjærer hin i et Punkt F, hvorfra man drager Linien FC; da er CG ⊥ AB. — Hvorledes man ved Hjælp af Vinkelhagen og Linealen fra et Punkt kan nedfælde en Perpendikulær paa en Linie, skal senere vises.

41. Den korteste Linie, man fra et Punkt kan drage hen til en ret Linie, er den fra Punktet paa Linien nedfældte Perpendikulær, hvilken kaldes Punktets Afstand fra Linien. Enhver Linie, som man fra C, Fig. 28 (Side 20), vilde drage til et Punkt hvorsomhelst i Linien AB vilde blive længere end CG.

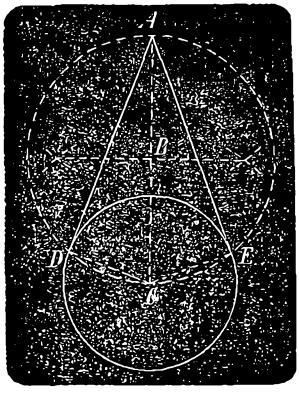

Fig. 31.

42. 4de Opgave. Fra et Punkt udenfor en Cirkel at drage en Tangent til samme. Fig. 31. Den givne Cirkel er Periferien om C, og Tangenten skal drages fra A. — Man drage AC, der halveres (26, Side 13) i B; med Radius BC slaaes en Cirkel om B, der skjæ-

rer den givne Cirkel i to Punkter D og E. Til hvilketsomhelst af disse Punkter f. Ex. til D drages en ret Linie fra A, saa er AD en Tangent; thi CD er ⊥ AD. (Sml. 37 Fig. 27).

§ 4. Parallelle Linier. 43. To rette Linier siges at convergere eller løbe sammen i den Retning, i hvilken deres Skjæringspunkt ligger, at divergere eller løbe ud fra hinanden i den modsatte Retning. — Dersom to rette Linier ikke divergere eller convergere, altsaa aldeles ikke skjære hinanden, kaldes de parallelle Linier. — At to Linier ere paralelle betegnes med Tegnet ∥ (f. Ex. AB ∥ DE, AB parallel med DE, Fig. 32.

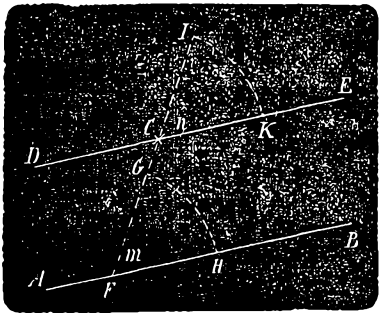

Fig. 32.

44. 1ste Opgave. Igjennem et givet Punkt at drage en Linie parallel med en given ret Linie. — Punktet være C, Fig. 32, og Linien AB. — Igjennem C drager man en Linie CF hen til et hvilketsomhelst Punkt i AB, f. Ex. til F. — Dernæst afsætter man efter 29 $\angle m = \angle n$, idet CI og FG, der høre til samme Linie, danner Vinklernes ene Par Ben, AB og CK det andet Par. CK eller Forlængelsen DE er da ∥ AB.

45. Blandt de flere andre Maader, paa hvilke man kan drage parallelle Linier, ere følgende de, man hyppigst kan anvende. I Fig. 33 (paa følgende Side) være AB en given Linie, med hvilken man igjennem C skal

drage en Parallel. — Man drager en Linie fra C til et vilkaarligt Punkt F i Linien AB, og afsætter $\angle m = \angle n$ (paa modsat Side af EF og i modsat Retning); CK eller DE er da ‡ AB.

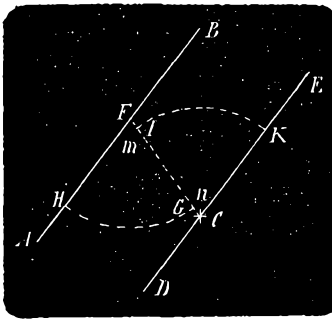

Fig. 33.

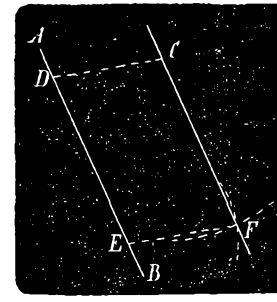

Fig. 34.

46, Parallel med AB, Fig, 34 skal drages en Linie igjennem C. Man afsætter to vilkaarlige Punkter D og E i Linien AB, tager deres Afstand DE til Radius i en Cirkel fra C som Centrum, hvorved man faar en Bue (ved F); dernæst sætter man Passerens Staalspids i C, og aabner Passeren, indtil Blyantspidsen gaar igjennem D, beholder denne Passeraabning uforandret, sætter Staalspidsen i E og afskjærer den forhen dragne Bue i F. — Forbindes nu C og F med en ret Linie, saa er CF ‡ AB.

47. Ved Hjælp af Lineal og Vinkelhage kan man paa følgende Maade udføre Konstruktionen*). — Den givne Linie være AB, Fig. 35, (Side 24) og det givne Punkt C. — Vinkelhagens tre Hjørner ere i dens 1ste Stilling betegnende med HFG, i dens 2den Stilling med IKL. — Først lægges den saaledes, at en af dens Sider, f. Ex, FG,

*) De i 47—49 anførte Konstruktioner udføres af Disciplene, men naturligvis uden at Instrumenterne behøve at tegnes.

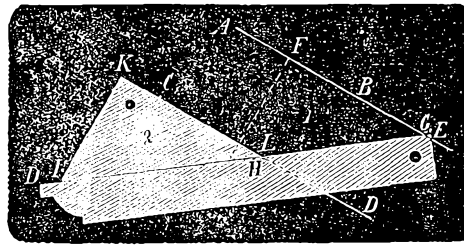

Fig. 35.

falder sammen med den givne Linie AB. — Den holdes nu fast, medens man skyder Linealen hen til den, saaledes at en anden Side af Vinkelhagen, f. Ex. HG, støder tæt til Linealkanten DE. — Dernæst holdes Linealen fast, medens man lader Vinkelhagen glide hen langs Linealkanten, indtil den indtager Stillingen 2 saaledes, at dens Side FG, der før laa langs AB, gaar igjennem C. Drages nu KL, saa er KL ∥ AB.

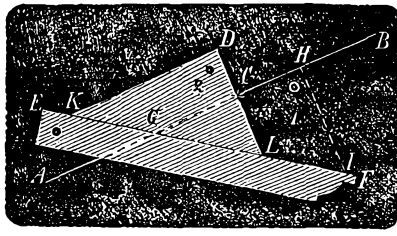

Fig. 36.

48. Ved Hjælp af de samme Instrumenter kan man ogsaa fra givne Punkter opreise eller nedfælde Perpendikulærer paa en ret Linie. I Fig. 36 er AB en given Linie, og man skal fra Punktet C opreise en Perpendikulær paa samme. Vinkelhagens Hjörner ere i dens 1ste Stilling betegnede med GHI og i dens anden Stilling med KDL. Først lægges den saaledes, at en af de korte Sider (den rette Vinkels Ben) f. Ex. GH falder sammen med den rette Linie. Den fastholdes nu og Linealkanten EF bringes til fuldstændigen at støde sammen med Vinkelhagens længste

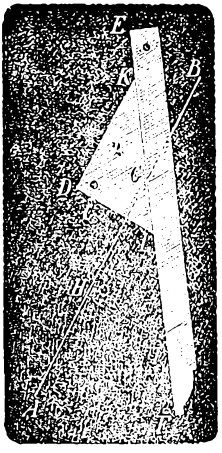

Fig. 37.

Side GI. Dernæst fastholdes Linealen, medens man lader Vinkelhagen, ligesom ovenfor, glide langs EF, indtil den kommer i Stillingen 2, saaledes at dens anden korte Side HI gaar igjen Punktet C, hvorpaa DL drages. Denne Linie er da ⊥ AB.

49. Aldeles samme Fremgangsmaade benytter man, naar man, som i Fig. 37 fra et Punkt C skal nedfælde en Perpendikulær paa en ret Linie AB.

3die Afsnit.

Foreløbigt om Fladerum, omsluttede af rette Linier.

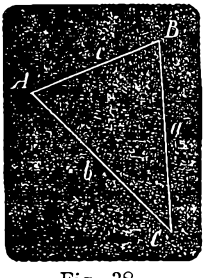

Fig. 38.

§ 1. Triangler. 50. Et Triangel, Fig. 38, begrændses af 3 rette Linier AB, BC og AC, der støde sammen i Hjørnerne B, C og A, hvilke danne Vinklerne ABC eller B, BCA eller C og CAB eller A. — Tegnet for et Triangel er △ foran Bogstaverne ved dets Hjørner. Saaledes betegnes Trianglet i Fig. 38: △ ABC. Naar en Side er en Vinkels ene Ben, saa siges Siden at være hosliggende til denne Vinkel, og ligeledes Vinkelen at være hosliggende til Siden. — Den Vinkel, der er hosliggende til to Sider, kaldes disses

mellemliggende Vinkel, og den tredie Sides modstaaende Vinkel. Saaledes er $\angle$ A hosliggende Vinkel til Siderne AB og AC, altsaa disses mellemliggende Vinkel, og den er modstaaende Vinkel til Siden BC o. s. v. — I et Triangel ligger ligeoverfor hver Side en Vinkel og omvendt. Naar Trianglets Vinkler betegnes med store Bogstaver, betegnes ofte deres modstaaende Sider med de tilsvarende smaa Bogstaver. (Imod $\angle$ C staar Siden c eller AB o. s. v.)

51. Drages igjennem C i $\triangle$ ACB, Fig. 39, efter 45 CE eller CD $\parallel$ AB, saa er $\angle z = \angle B$ og $\angle x = \angle A$; altsaa er $\angle A + \angle ACB + \angle B = \angle x + \angle y + \angle z = 2$ R (se 19). Summen af alle tre Vinkler i et Triangel er saaledes = 2 rette Vinkler.

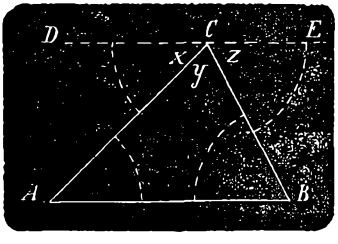

Fig. 39.

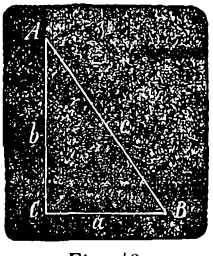

Fig. 40.

52. Er i et Triangel en Vinkel ret, saa maa derfor de to øvrige være spidse. Et saadant Triangel, der kaldes et retvinklet Triangel, er fremstillet i Fig. 40. Den Side AB, der staar ligeoverfor den rette Vinkel C, kaldes Hypothenusen, de to øvrige Katheterne. Hypothenusen er den største Side i det retvinklede Triangel. (41).

53. Er i et Triangel en Vinkel stump, som C i $\triangle$ ACB, Fig. 41, (p. f. S.), saa indsees ligeledes let, at de to øvrige maa være spidse.

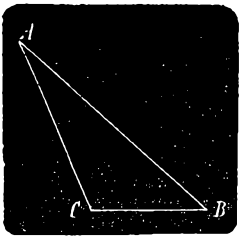

Fig. 41.

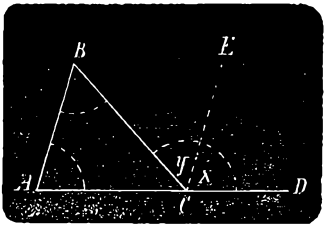

Fig. 42.

54. Forlænges en Side i et Triangel, saa danner Forlængelsen med den tilstødende Side en Vinkel, der kaldes en udvendig Vinkel til Trianglet. — Saaledes er til $\triangle$ ABC, Fig. 42, $<$ BCD en udvendig Vinkel. $<$ BCA er den udvendige Vinkels Naboovinkel; og den udvendige Vinkel er lig Summen af de to øvrige Vinkler i Trianglet. Thi er CE dragen $\parallel$ AB, saa er $\angle$ x $=$ $\angle$ A (44) og $\angle$ y $=$ $<$ B (45); altsaa $<$ x $+$ $<$ y $=$ $<$ BCD $=$ $\angle$ A $\angle$ $+$ B.

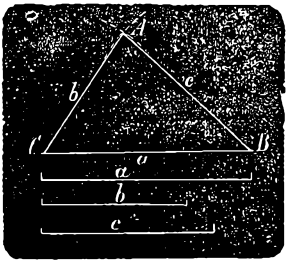

Fig. 43.

55. 1ste Opgave. At konstruere et Triangel, naar alle dets Sider ere givne Fig. 43. De givne Sider ere a, b og c. — Drag en ret Linie og afsæt BC $=$ a; om B som Centrum slaa med Radius BA $=$ c en Bue, og om C med Radius CA $=$ b en Lignende, der skjærer hin i A, saa er $\triangle$ ABC det forlangte Triangel.

56. De to Sider kunne være ligestore, som AB og AB', Fig. 44 (Side 28), af hvilke enhver er lig b. — Et saadant Triangel kaldes et ligebenet Triangel; de to ligestore Sider kaldes dets Ben, det Punkt A, hvor de støde sammen, kaldes dets Toppunkt, og den tredie Side Grundlinien. — Vinklerne ved Grundlinien i et

ligebenet Triangel ere ligestore. B = B'. Slaar man nemlig med samme Radius fra B og B' de i E hinanden krydsende Smaabuer og drager AE, saa finder man, at derved < BAB' er halveret (33) og at AC ⊥ B'B (38). Da saaledes i Trianglerne ABC og AB'C < x = < y, og < o = < p (= R), saa maa efter 51 ogsaa < B være = < B'.

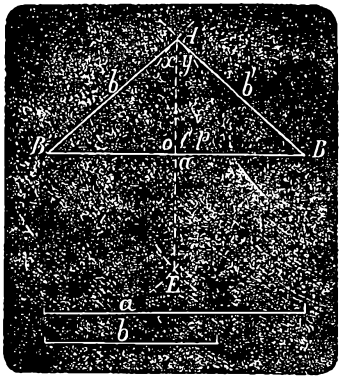

Fig. 44.

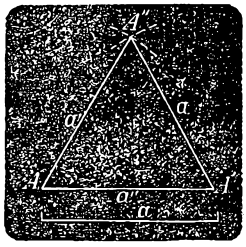

Fig. 45.

57. Alle tre Sider i et Triangel kunne være ligestore, som i Fig. 45. Trianglet kaldes da et ligesidet Triangel, og da dette kan betragtes som et ligebenet Triangel med hvilkensomhelst af Siderne til Grundlinie, saa maa efter foregaaende Sætning i et ligebenet Triangel alle Vinkler være ligestore. — Da de tilsammen udgjøre 2 R (51), saa bliver hver af dem ,A = A' = A" = $\frac{2}{3}$ R.

58. 2den Opgave. At konstruere et Triangel, hvori to Sider og deres mellemliggende Vinkel er given. Fig. 46 (Side 29). — De givne Størrelser ere a, b og < m. Drag en ret Linie, afsæt en af Siderne CB = a; dernæst med B til Toppunkt < ABC = m (29),

endelig afmaal BA = b og drag AC, saa er △ ACB det søgte Triangel.

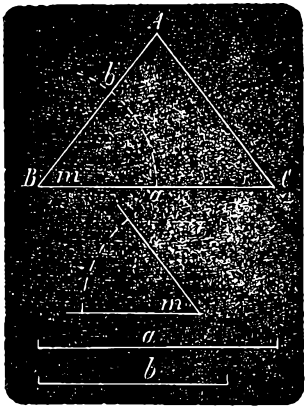

Fig. 46.

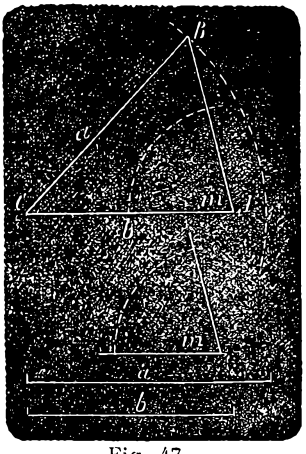

Fig. 47.

59. 3die Opgave. At konstruere et Triangel, hvori to Sider og den størstes modstaaende Vinkel ere givne. Fig. 47. — De givne Størrelser ere a, b og ∠ m. Drag en ret Linie, afsæt den mindste af Siderne b fra A til C; gjør dernæst ∠ BAC = m; slaa med Radius CB = a en Cirkel om C, saa skjærer denne Linien AB kun i et Punkt paa den Side af CA, hvor Vinkelen m ligger. Dette Punkt B forbindes med A, saa fremkommer det forlangte Triangel ABC.

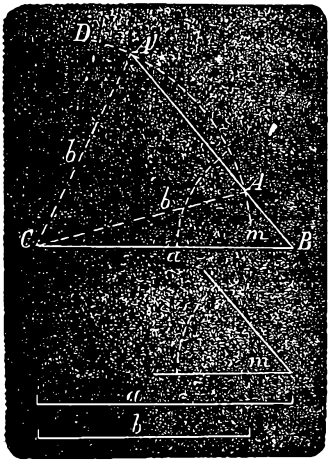

Fig. 48.

60. Skulde man som i Fig. 48 konstruere et Trian-

gel, hvori to Sider a og b, og den mindstes modstaaende Vinkel, nemlig m, ere givne, saa maatte man, efterat have draget en ret Linie, paa denne afsætte den største Linie a = CB, gjøre ∠ ABC = ∠ m, og med Radius CD = b slaa en Cirkel om C; denne vil da i Almindelighed skjære DB i to Punkter paa den Side af CB, hvor Vinkelen m ligger, nemlig i A og A'. Forbindes begge disse Punkter med C, saa kan man ikke vide, enten △ ACB eller △ A'CB er det forlangte Triangel.

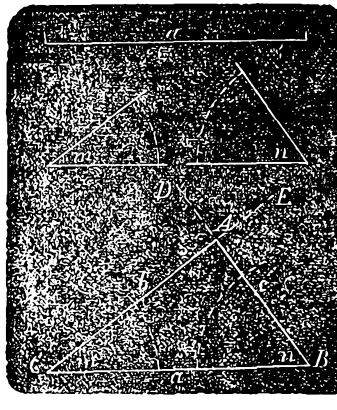

Fig. 49.

61. 4de Opgave. At konstruere et Triangel, hvori en Side og dens hosliggende Vinkler ere givne. Fig. 49. — De givne Størrelser ere Linien a og Vinklerne ∠ m og ∠ n. — Paa en ret Linie afsættes CB = a. I C gjøres ∠ ECB = ∠ m og i B ∠ DBC = n. Det forlangte Triangel er da △ ABC.

62. 5te Opgave. At konstruere et Triangel, naar en Side a, dens ene hosliggende Vinkel m og dens modstaaende Vinkel n ere givne. Fig. 50 (p. f. S.) Man gjør ∠ p = ∠ m + ∠ n (30). — Forlænges ∠ p' s Bue, saa er dens Nabovinkel ∠ o = 2 R — (m + n). — Paa en ret Linie afsættes a = BC. I B afsættes ∠ ABC = ∠ o og i C den givne hosliggende Vinkel m = DCB, saa bliver ved A ∠ BAC = ∠ n, (saasom i et Triangel alle tre Vinklers Sum = 2 R); — △ ABC er det forlangte Triangel.

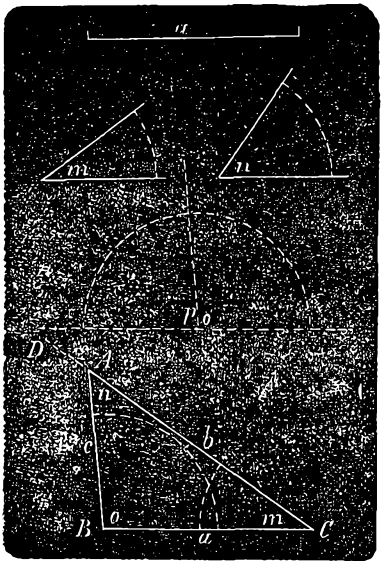

Fig. 50.

63. Af Opløsningerne paa ovenstaaende 5 Opgaver ser man, at naar man ved hvilkensomhelst af dem med de samme givne Størrelser, konstruerede flere Triangler, saa vilde alle disse blive kongruente. — Man ser endvidere, at der til at konstruere et Triangel af bestemt Form og Størrelse udfordres, at af de 3 Sider og 3 Vinkler, hvilke høre til Trianglet, 3 Størrelser ere givne, hvoriblandt mindst 1 Side.

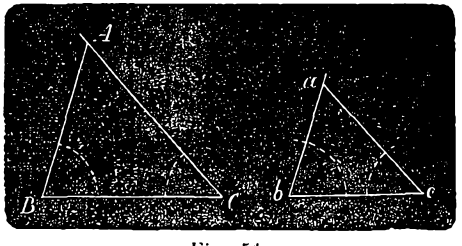

Fig. 51.

64. I to Triangler △ ABC og △ abc, Fig. 51, hvis 2 Par Vinkler ere ligestore B = b og C = c, maa ogsaa det 3die Par være af samme Størrelse: C = c, (da A + B + C = a + b + c = 2 R). — To saadanne Triangler siges at være ligedannede, og overhovedet siges alle Udstrækninger, der have samme Form, (men ikke nødvendigvis samme Størrelse) at være ligedannede. Til at betegne denne Egenskab benyttes Tegnet ∾ f. Ex. △ ABC ∾ △ abc d. e. Trianglet ABC er ligedannet med Trianglet abc.

§ 1. Polyoner. 65. Overhovedet kaldes enhver i et Plan liggende Figur, der begrændses af rette Linier en Polygon. Et Triangel er et Polygon, begrændset af det mindst mulige Antal Linier. — Begrændsningslinierne kaldes Polygonens Sider, og den bestemmes nærmere ved Angivelse af disses Antal, som 5kant, 6kant osv. Summen af Siderne kaldes Polygonens Omkreds eller Perimeter. — De Vinkler, som Siderne uden at forlænges, danne indad mod Polygonen, kaldes Polygonens Vinkler. —

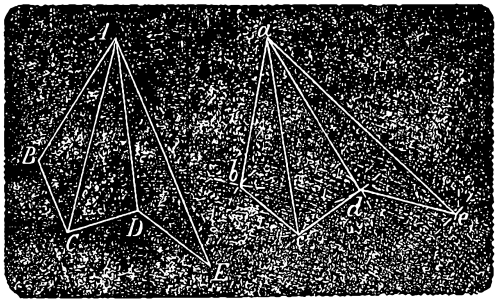

Fig. 52.

ABCDE, Fig. 52. er en Polygon (nemlig en Femkant) AB, BC osv. ere dens Sider; AB + BC + CD + DE + EA dens Omkreds, B, BAE, E, den convexe Vinkel EDC osv. dens Vinkler. — Vinklernes Toppunkter A, B, C osv. kaldes Polygonens Hjørner og rette Linier mellem to saadanne, som AC og AD, hedde Diagonaler.

66. Man vil let overbevise sig om, at Antallet af Diagonaler, man i en Polygon fra et Hjørne kan drage, er 3 mindre end Sidernes Antal; (i en 3kant ingen, i en 4kant 1, i 5kanten ABCDE 2, i 6kanten (Fig. 54, Side 34, 3 Diagonaler osv.); og at Antallet af de herved fremkomne Triangler er 2 mindre end Sidernes Antal; (i en 4kant 2, i 5kanten ABCDE 3, i 6kanten Fig. 54 4 Tri-

angler o. s. v. — Da i hvert Triangel Summen af alle Vinkler = 2 R, saa kan man ved at multiplicere 2 R med de fremkomne Trianglers Antal finde Summen af alle Polygonens Vinkler. I en Firkant bliver Summen af alle Vinkler 2 R × (4—2) = 4 R.
i en Femkant 2 R × (5—2) = 6 R.
i en Sexkant 2 R × (6—2) = 8 R o. s. v.

67. Naar to Polygoner ABCDE og abcde, Fig. 52, ere kongruente, saa kan man fra et Hjørne i hver af dem (A og a) drage ligemange Diagonaler saaledes, at de fremkomne Trianglerblive kongruente. — De Hjørner, Vinkler, Sider og Diagonaler, som samtidig kunne dække hinanden, kaldes ensbeliggende Hjørner, Vinkler, Sider og Diagonaler.—De ere paa Figurerne betegnede med ens Bogstaver, kun af forskjellig Alfabetart.

68. 1ste Opgave. At konstruere en Polygon kongruent med en given, ABCDE Fig. 52. — Man konstruerer bekvemmest efter 55 [△ abc ≅ △ ABC; dernæst paa samme Maade △ acd ≅ △ ACD; endelig △ ade ≅ △ ADE.

69. En anden Konstruktionsmaade er følgende, Fig. 53 (paa følgende Side.)] — Man drage to rette Linier, OP og op, den ene i Nærheden af den givne Polygon ABCDE. — I disse Linier afmærkes vilkaarligen to Punkter O og o. Fra Hjørnerne A, B, C, D og E nedfældes Perpendikulærer paa OP (38 eller 49). Paa op afsættes fra o: os = OS, ot = OT, ou = OU, ov = OV, ox = OX. Dernæst opreises Perpendikulærer paa op fra Punkterne s, t, u, v og x (35 eller 48), og man afsætter sb = SB, ta = TA, uc = UC, vd = VD og xe = XE. De saaledes fundne Punkter a, b, c, d

og e forbindes med rette Linier, hvorved fremkommer Polyg. abcde ≅ Polyg. ABCDE.

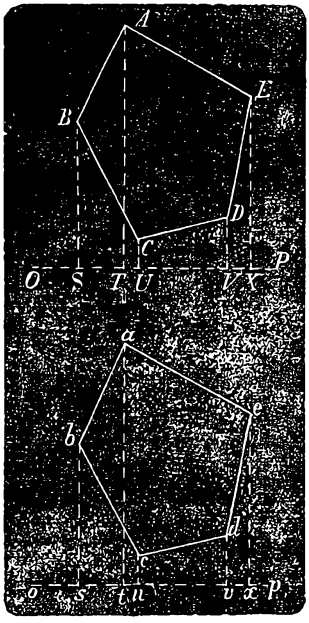

Fig. 53.

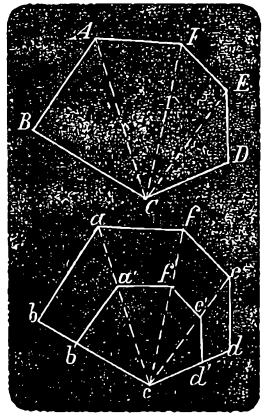

Fig. 54.

70. En tredie Fremgangsmaade er vist i Fig. 54, hvor den givne Polygon er 6kanten ABCDEF. Igjennem et vilkaarligt Punkt c drages en Linie cb ∥ CB (44 eller 47); ligeledes ca ∥ CA, cf ∥ CF, ce ∥ CE og cd ∥ CD. — Man maaler cb = CB, ca = CA, cf = CF, ce = CE og cd = CD, og drager Linierne ba, af, fe og ed; — eller

71. Man kunde istedetfor at afsætte cb = CB, ca = CA, cf = CF o. s. v., blot afmaale den første af disse Linier cb = CB, dernæst igjennem b drage ba ∥ Ba, af ∥ AF, fe ∥ FE o. s. v. — Man finder Polyg. abcdef ≅ Polyg ABCDEF.

72. 2den Opgave. At konstruere en Polygon ligedannet med en given. Den givne Polygon er ABCDEF, Fig. 54 (Side 34). — Man gaar frem aldeles paa samme Maade som i 71, kun at b'c ikke gjøres = BC. men Punktet b' har i Linien bc en vilkaarlig Beliggenhed. Man faar Polyg. a'b'c'd'e'f' ∾ Polyg. ABCDEF.

§ 3. Parallellogrammer. 73. Et Parallellogram er en Firkant, hvori to og to Sider ere parallelle. Et Trapez er en Firkant, hvori kun to Sider ere parallelle.

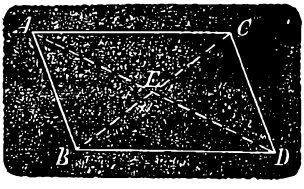

Fig. 55.

74. 1ste Opgave. At konstruere et Parallellogram, Fig. 55. Man gjør AB ‡ CD og AC ‡ BD, — saa er ABCD et Parallellogram, der betegnes □ AD eller □ BC.

75. En Diagonal i et Parallellogram deler dette i to kongruente Triangler. Fig. 55. — △ ABC ≅ △ DCB; ligeledes er △ ABD ≅ △ DCA. — Altsaa maa AB være = CD og AC = BD.

76. Derfor, naar man drager AC ‡ BD og gjør AC = BD, samt forbinder A med B og C med D, fremkommer ogsaa et Parallellogram ABCD. — En Firkant er altsaa et Parallellogram, naar to Sider i den ere baade parallelle og ligestore.

77. Drages AC, og i vilkaarlig Retning AB, og slaar man med Radius AC en Cirkel om B, med Radius AB en Cirkel om C, samt forbinder tilsidst disse Cirklers Skjæringspunkt D med B og C, saa fremkommer ligeledes et Parallellogram ABCD, idet AB = CD og AC = BD

(75; saml. 46). — To og to modstaaende Sider i et Parallellogram ere ligestore.

78. Da $\triangle$ ABC er $\cong$ $\triangle$ DCB, saa er $\angle$ BAC = $\angle$ CDB, og da $\triangle$ ADB er $\cong$ $\triangle$ DAC, saa er $\angle$ ABD = $\angle$ ACD, To og to modstaaende Vinkler i et Parallellogram ere ligestore.

79. Diagonalerne i et Parallellogram halvere hinanden (Fig. 55) AE = ED og BE = EC (saml, 27. Fig. 18, Side 14). — Derfor kan man konstruere et Parallellogram ABCD ved at drage to hinanden skjærende Linier AD og BC, og fra Skjæringspunktet E afsætte paa den ene Linie EA = ED og paa den anden EB = EC, samt forbinde de saaledes bestemte Punkter B, A, C og D med hinanden ved rette Linier.

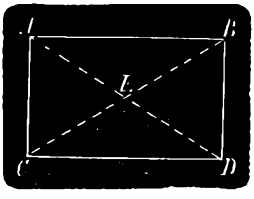

Fig. 56.

80. Et Parallellogram med rette Vinkler kaldes et Rektangel ($\square$ AD. Fig. 56).

81. 2den Opgave. At konstruere et Rektangel. Paa en ret Linie af bestemt Længde CD opreises i dens ene Endepunkt en Perpendikulær (AC $\perp$ CD). AC gives en vis Længde, og med Siderne CD og AC konstrueres et Parallellogram paa en af de i 74, 76 og 77 anførte Maader.

82. Diagonalerne i et Rektangel ere ligestore. I $\square$ AD er AD = BC. — Man kan derfor konstruere et Rektangel AD ved først at drage to hinanden skjærende Linier AD og BC, dernæst fra deres Skjæringspunkt E at afsætte paa Linierne de fire ligestore Stykker EC, ED, EB og EA, samt endelig forbinde Punkterne A, B, C og D med rette Linier.

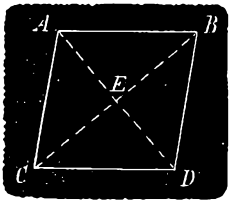

Fig. 57.

83. Et Parallellogram, hvori alle fire Sider ere ligestore, hedder en Rhombe (□ AD, Fig. 57).

84. 3die Opgave. At konstruere en Rhombe. Fra et Punkt C drages to Linier, der gjøres lige lange; CA = CD. — Paa en af de i 74, 76 og 77 anførte Maader konstrueres et Parallellogram med Siderne CA og CD; man faar da Rhomben AD.

85. Diagonalerne i en Rhombe staa lodret paa hinanden; AD ⊥ BC. — Man kan derfor konstruere Rhomben ved først at drage en ret Linie AD. Fra et Punkt E i samme opreises BC ⊥ AD. Dernæst gjøres EA = ED og EC = EB, hvorefter Punkterne A, B, D og C forbindes med rette Linier.

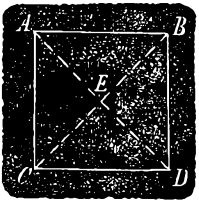

Fig. 58.

86. Et Rektangel, hvori alle Sider ere ligestore, er et Kvadrat: □ AD. Fig. 58.

87. 4de Opgave. At konstruere et Kvadrat. — CD drages. I et af Endepunkterne, f. Ex. C, opreises AC ⊥ CB, og AC afsættes = CD. Med Siderne AC og CD konstrueres paa en af de i 74, 76 og 77 beskrevne Maader et Parallellogram, hvilket bliver et Kvadrat AD.

88. Da et Kvadrat er baade en Rhombe og et Rektangel, saa staa i et Kvadrat Diagonalerne lodrette paa hinanden og ere ligestore. Man kan derfor konstruere et Kvadrat saaledes: En Linie AD drages. Fra et Punkt

i samme E opreises BC ⊥ AD; dernæst afsættes EA = EB = ED = EC og Punkterne A, B, D og C forbindes ved rette Linier.

4de Afsnit.

Maaling af rette Linier.

§ 1. En ret Linies Deling i ligestore Dele. 89. Hvorledes en ret Linie kan deles i 2 ligestore Dele er vist i 26; den kan ved gjentagen Halvering deles i 4, 8, 16, 32, 64 o. s. v. Dele. — Her skal vises, hvorledes den ved Konstruktion kan deles i et vilkaarligt Antal ligestore Dele.

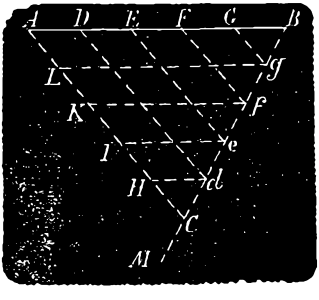

Fig. 59.

90. 1ste Opgave. At dele en ret Linie i flere (f. Ex. 5) ligestore Dele. Linien være AB, Fig. 59. — I vilkaarlig Retning drages fra det ene Endepunkt, f. Ex. B, en ret Linie BM, hvorpaa afsættes 5 ligestore Stykker (forøvrigt er deres Længde vilkaarlig) altsaa Bg = gf = fe = ed = dC. Fra det sidste Punkt C drages en ret Linie CA til den givne Linies andet Endepunkt A, hvorpaa man igjennem d, e, f og g drager Linierne dD, eE, fF og gG, samtlige parallelle med CA. — Da ere AD, DE, EF, FG og GB ligestore; Linien AB er altsaa delt i 5 ligestore Dele.

91. Vilde man drage gL, fK, eI og dH, alle parallelle med AB, saa ser man, at gL = GA = $\frac{4}{5}$ AB, (77), fK = FA = $\frac{3}{5}$ AB, eI = EA = $\frac{2}{5}$ AB og dH = DA = $\frac{1}{5}$ AB.

92. Opgaver. Fig. 60. 1) $\frac{5}{9}$ a; 2) $\frac{3}{7}$ a + $\frac{1}{3}$ b; 3) $\frac{2}{3}$ a + ($\frac{3}{5}$ b − $\frac{1}{4}$ c); 4) $\frac{1}{3}$ a + $\frac{2}{5}$ (b − $\frac{1}{2}$ c).

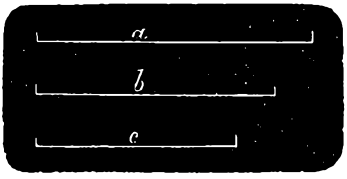

Fig. 60.

§ 2. Maalestokken.

93. Det norske Længdemaals Enhed er en Fod, der inddeles i 12 ligestore Dele, der kaldes Tommer. 1 Tomme har 12 Linier (Duodecimalmaal). — Ellers deles ogsaa Foden i 10 saakaldte Decimaltommer, og en Tomme igjen i 10 Linier (Decimalmaal). Tiendedelen af en Linie kaldes undertiden en Skrupel. — 2 Fod er = 1 Alen. — 3 Alen udgjør en Favn. — Blandt fremmede Maal-Systemer er det især vigtigt at kjende det franske Metremaal. — Dets Enhed, en Metre, er omtrent halvanden norsk Alen ($3,_{18735}$ norske Fod), og den inddeles i 10 Decimetre, hvoraf hver har 10 Centimetre o. s. v.

94. For bekvemt at kunne nøiagtigt maale eller afsætte Linier, benytter man sig af den formindskede Maalestok. Hvorledes den konstrueres og benyttes sees af Fig. 61 paa følgende Side, hvor det anvendte Maal er Decimalmaal. — Man drager den saakaldte Grundlinie AB, paa hvilken er afsat et Antal Tommer. — I Delingspunkterne opreises Perpendikulærer paa Grundlinien (som CD). Den yderste Tomme tilvenstre deles i 10 ligestore Dele (efter 90), hvilke Dele blive Linier og numereres som saadanne fra o i Retningen tilvenstre,

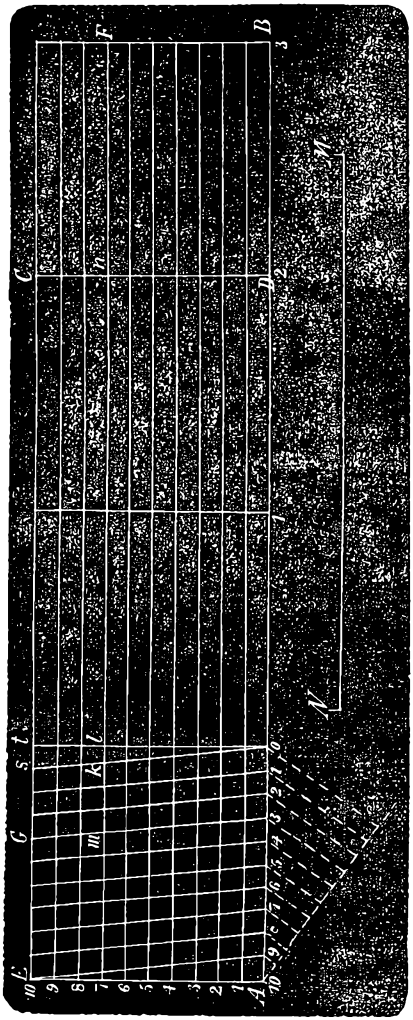

Fig. 61.

medens Tommerne numereres ligeledes fra o tilhøire. — Paa Perpendikulæren AE afsættes med vilkaarlig Passeraabning 10 ligestore Stykker, der numereres nedenfra opad. Igjennem de herved betegnede Punkter trækkes Linier parallelle med Grundlinien.—Fra Punktet 9 paa Grundlinien drages en Linie til E og parallelle med denne Linie 9E drages rette Linier fra alle de andre Delingspunkter af den yderste Tomme. — Det bemærkes, at i denne Bog ere alle Maal angivne efter Decimalsystemet.

95. 1ste Opgave. At afsætte en Linie, hvis Længde er given i Tommer o. s. v. — Skal f. Ex. Linien have en Længde af 2 Tommer, 3 Linier og 7

Skrupler*) eller $2,_{37}$ Tommer (= $0,_{237}$ Fod = $23,_{7}$ Linier = 237 Skrupler), saa søger man først i AE det Punkt, som er betegnet med det til Skruplernes Antal svarende Ziffer, altsaa her 7, og fører den ene Passerspids langs Linien 7F, altsaa ‡ med Grundlinien. — I Punktet m, hvor Skraalinien (Transversalen) 3G fra det Punkt paa Grundlinien, der svarer til de givne Liniers Antal, 3, skjærer 7F, lader man Passerspidsen forblive, og man aabner Passeren, indtil Spidsen af dens andet Ben kommer i n, hvor Perpendikulæren 2C fra det Punkt, som er betegnet med det til Tommernes Antal, 2, svarende Ziffer, skjærer 7F.—Man har da det forlangte Maal i Passeren, og det afsættes paa en dragen Linie fra M til N. — At MN er = $2,_{37}$ Tomme indsees saaledes: MN = mn = mk + kl + ln. Men mk = 03 paa Grundlinien (77) = 3 Linier; ligeledes er ln = oD = 2 Tommer; endelig er kl = $\frac{7}{10}$ st = $\frac{7}{10}$ Linie (91) eller 7 Skrupler.

96. 2den Opgave. At angive, hvormange Tommer o. s. v. en given Linie indeholder. Vilde man omvendt udmaale Linien MN, saa tages den imellem Passerspidserne. Man sætter den ene af disse paa Grundlinien i et af de Punkter, der begrændse Tommerne, saaledes at den anden Spids kommer etsteds imellem o og A. — Her sættes saaledes den ene Passerspids i D. — Falder nu den anden Passerspids lige i et af Delingspunkterne paa venstre Side af o, saa har man allerede Liniens Størrelse, nemlig

---

*) At betegne Fod med ′, Tomme med ″, Linie med ‴ er sædvanligt, men uhensigtsmæssigt, formedelst den Forvexling, der kan finde Sted, idet disse Tegn ogsaa benyttes ved Vinkelmaal og Tidsmaal.

Tommerne tilhøire og Linierne tilvenstre for o. Men hvis, som her, den venstre Passerspids falder imellem to Delepunkter (her imellem 3 og 4) føres begge Passerspidser ligemeget opad fra Grundlinien, saaledes at den høire bestandig forbliver i Perpendikulæren (DE), indtil den venstre kommer i eller saa nær som muligt ved et af de Punkter, hvor en Skraalinie skjærer en af de med Grundlinien parallelle Linier. Her sker dette, naar den høire Passerspids staar i n og den venstre i m. — Man aflæser derpaa Tommerne paa Grundlinien fra o af i Retningen tilhøire, og Linierne ligeledes paa Grundlinien fra o af tilvenstre, medens Skruplernes Antal findes paa Perpendikulæren AE. I Exemplet faar man at MN er $= 2,_{37}$ Tommer.

§ 3. Rette Liniers Proportionalitet. 97. Naar 3 rette Linier a, b og c ere givne, kan man finde en fjerde x saadan, at a forholder sig til b som c til x, ved at maale de 3 Linier, og med de fundne Tal udregne, hvormange Tommer o. s. v. den søgte skal være, samt tilsidst afsætte dens Længde ved Hjælp af Maalestokken. — Ved hvert enkelt af de følgende Konstruktioner bør dens Rigtighed og Nøiagtighed kontrolleres ved en saadan Beregning.

98. 1ste Opgave. Ved Konstruktion at finde en Linie, som forholder sig til en anden Linie, som en tredie til en fjerde, naar de 3 sidstnævnte ere givne. De givne Linier være a, b og c, Fig. 62 (Side 43), den søgte ville vi kalde x; $(a : b = c : x)$. Drag i vilkaarlige Retninger to hinanden skjærende rette Linier AM og AN, afsæt AB = a og BC = b samt paa den anden Linie AD = c. Forbind Endepunkterne B og D af to Linier, hvilke i Proportionen danne Forledene

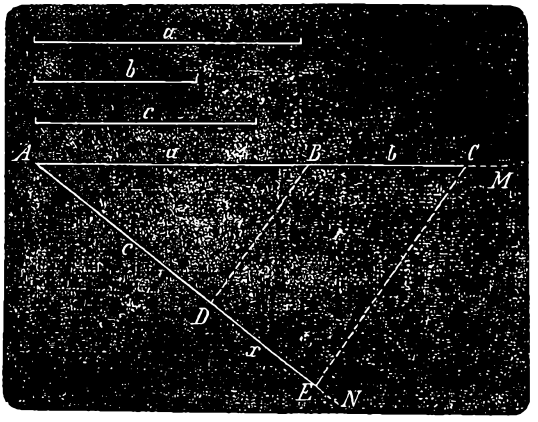

Fig. 62.

(a og c) d. e. drag Linien BD, og dernæst CE ∢ BD, saa er DE = x den søgte Linie, eller AB: BC = AD: DE. — (Saml. 90, Fig. 59, Side 38, hvor BE : EA = Be : eC = 3 : 2).

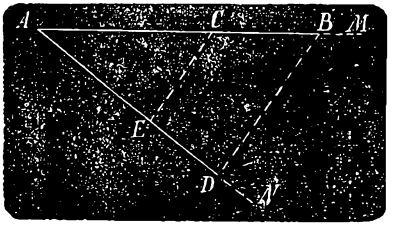

Fig. 63.

99. Efterat have draget Linierne AM og AN, kan man ogsaa, som i Fig. 63 afsætte alle 3 givne Linier fra samme Punkt A, og den søgte har da ligeledes sit ene Endepunkt paa samme Sted. — Her er AB = a, AC = b og AD = c. BD drages, og CE ∢ BD. Den søgte Linie er da AE. (I Fig. 59, Side 38, er BA : BE = BC: Be = 5: 3.)

100. Det sees, at △ ABD er ∾ △ ACE d. e.: △ ABD er ligedannet med (har samme Form som) △ ACD. — I ligedannede Triangler staa de ligestore Vink-

lers modstaaende Sider i samme Forhold til hinanden.

101. Man kunde ogsaa konstruere som i Fig. 64. Man drager BM og BN. — Paa BM afsættes BA = a, og AC gjøres = b; paa BN afsættes BD = c, hvorpaa man igjennem C drager CK ‡ BN. — Forbindes nu D med A ved en ret Linie, saa afskjærer denne af CK Stykket CE, der er den forlangte Linie, idet BA : AC = BD : CE. (I Fig. 59, Side 38 er AB : Kf = BC : Cf = 5 : 3).

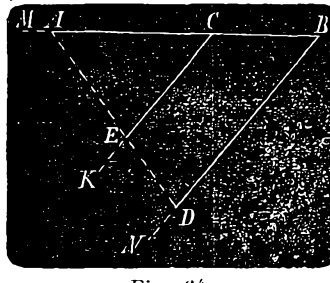

Fig. 64.

102. 2den Opgave. At dele en ret Linie i Dele, hvilke forholde sig til hinanden som givne Linier. — Den givne Linie, der skal deles, være AB, Fig. 65, og de Linier, der angive Delenes Forhold, være a, b

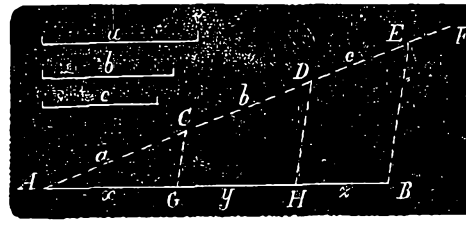

Fig. 65.

og c, saaledes, at, naar man kalder de 3 søgte Stykker x, y og z, a skal forholde sig til b som x til y og a : c = x : z. — Drag fra Liniens ene Endepunkt Linien AF i vilkaarlig Retning. Paa AF afsættes AC = a, CD = b og DE = c. Drag fra E Linien BE, og dernæst DH ‡

BE samt GC ‡ BE; saa er AG, GH og HB de forlangte Linier, idet AC : AG = CD : GH og CD : GH = DE : HB; altsaa ogsaa AC : AG = DE : BH, eller AC : DC = AG : GH og AC : DE = AG : BH.

103. 3die Opgave. At finde Mellemproportionalledet mellem to rette Linier. De givne Linier være a og b, Fig. 66, og man skal finde en Linie x saaledes at a : x = x : b. — Afsæt paa en dragen Linie AB = a og fra B i samme Retning BC = b; halver AC. Fra Midtpunktet D som Centrum slaa en Halvcirkel med DA som Radius; dens Diameter er altsaa AC = a + b. Opreis dernæst fra det Punkt B, hvor de givne Linier støde sammen, BE ⊥ BC, saa er BE den søgte Linie eller AB : BE = BE : BC.

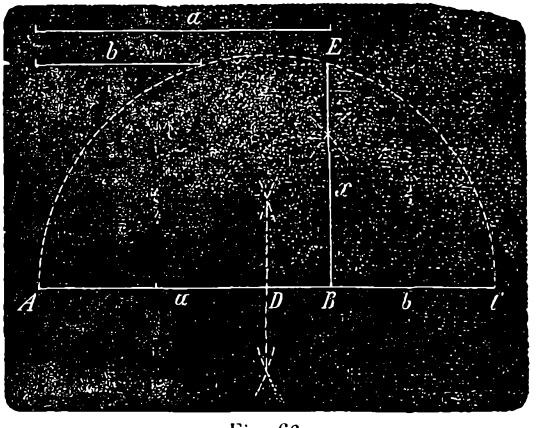

Fig. 66.

104. Man kunde ogsaa konstruere paa følgende Maade (Fig. 67, Side 46): Afsæt AB = a og fra A i samme Retning AC = b. Slaa en Halvcirkel, hvis Diameter er AB = a og opreis fra C Linien CE ⊥ AB. Forbinder man dernæst det Punkt E, hvor denne Perpendikulær skjæ-

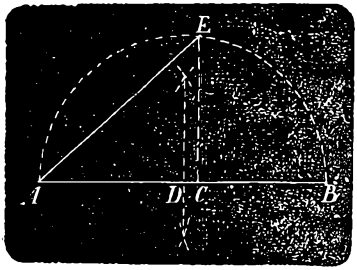

Fig. 67.

rer Cirkelen, med Udgangspunktet A, saa er denne Linie AE den søgte, idet man har AB : AE = AE : AC.

105. Endelig kunde man, som i Fig. 68 afsætte AB = a, og fra B i modsat Retning BC = b; slaa en Halvcirkel med Diameteren AC = a — b, og til denne efter 42 drag en Tangent fra B. — Denne Tangent BF, maalt fra B til Berøringspunktet, er da den søgte Linie, og man

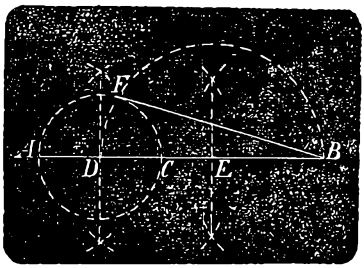

Fig. 68

har AB : BF = BF : BC.

106. At dele en Størrelse saaledes, at den hele Størrelse forholder sig til dens største Del, som denne til dens mindste, kaldes at dele den i det ydre og mellemste Forhold eller at høidele den.

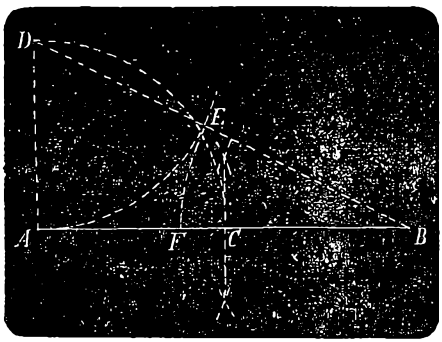

Fig. 69.

106. 4de Opgave. At høidele en ret Linie f. Ex. AB, Fig. 69. — Først finder man dens Midtpunkt C, opreiser DA ⊥ AB i Liniens ene Endepunkt, og gjør DA = AC = $\frac{1}{2}$AB.

Med D som Centrum og DA som Radius slaar man en Cirkelbue. Denne overskjæres i E af en ret Linie, som man drager til dens Centrum D fra den givne Linies andet Endepunkt B. — Sætter man nu Passerspidsen i B, og slaar med Radius BE en Cirkelbue, saa skjærer den AB i et Punkt F, der er saaledes beliggende, at AB : BF = BF : AF.

108. Ved en af Konstruktionerne i 98, 99 eller 101 kan man af tre givne Linier a, b og c finde en fjerde, x, saaledes, at $a : b = c : x$. Men da i dette Tilfælde x er $= \frac{bc}{a}$, kunne vi, naar vi have udført en af hine Konstruktioner, sige, at vi have konstrueret en Linie $x = \frac{bc}{a}$. — At konstruere en Linie, lig en Brøk, hvis Tæller er Produktet af to givne Linier og Nævner en tredie given Linie, vil derfor sige, at man skal sætte Nævneren som 1ste Led af en Proportion og begge Tællernes Faktorer som 2det og 3die Led, og dernæst finde det 4de ved arithmetisk Reguladetri eller ved Konstruktion.

109. I 103—105 lærte man at finde Mellemproportionalledet til 2 Linier a og b. Kaldes det x, saa er $a : x = x : b$ eller $x^2 = ab$, altsaa $x = \sqrt{ab}$. — At konstruere en Linie, som er lig Kvadratroden af to givne Liniers Produkt vil derfor sige, at søge disse to Liniers Mellemproportionalled, hvilket kan ske, enten ved en af de i 103—105 givne Regler, eller ved Beregning.

110. Opgaver. (Fig. 70, p. f. S) $x = \frac{2ab}{3c} = \frac{(2a).b}{(3c)}$; 2) $x = \frac{abc}{de}$ (her findes først $y = \frac{ab}{d}$ og dernæst $x = \frac{yc}{e}$) 3) $x = \frac{(3a-2b)c}{3d}$; 4) $x = \sqrt{6ab} = \sqrt{(3a).(2b)}$; 5) $x = \sqrt{\frac{abcd}{ef}} = \sqrt{\left(\frac{ab}{e}\right)\left(\frac{cd}{f}\right)}$; 6) $x = \sqrt{\frac{(a-b)(a+c)}{3}} = 2\sqrt{(a-b)\left(\frac{a+c}{3}\right)}$.

5te Afsnit.

En Cirkels Deling og Vinklers Maaling.

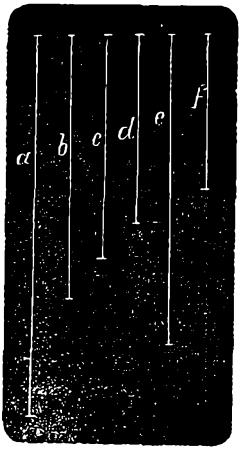

Fig. 70.

111. 1ste Opgave. At halvere en Vinkel, hvis Ben ikke kunne forlænges til deres Skjæringspunkt, som den Vinkel, der paa Fig. 71 vilde dannes af AB og CD, hvis disse Linier kunde forlænges paa den anden Side af Linien ST. — Gjennem et vilkaarligt Punkt E i den givne Vinkels ene Ben AB drages en Linie EF ‡ med det andet Ben CD. ∢ BEF halveres ved Linien EG. Fra hvilketsomhelst Punkt i denne Halveringslinie, f. Ex. fra H, opreises en Perpendikulær paa samme: IK ⊥ EG. — Den Del af denne Linie, som ligger imellem dens Skjæringspunkter med AB og CD, nemlig Linien IK halveres ved den i 26 anviste Fremgangsmaade, hvorved Halveringslinien ON bliver ⊥ IK. — ON er da den Linie, som, hvis den samt Linierne AB og CD

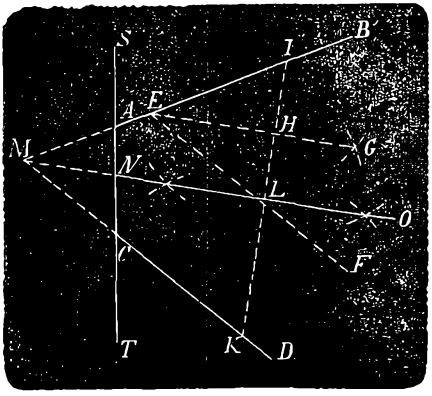

Fig. 71.

kunde forlænges, vilde træffe deres Skjæringspunkt M, og som vilde halvere den af dem dannede Vinkel, (saaledes at $\angle$ BMO $=$ $\angle$ DMO.

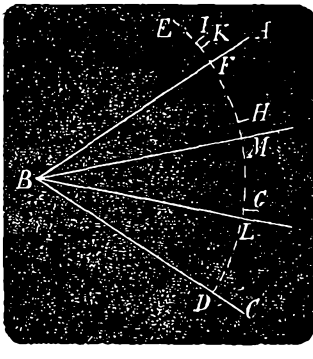

Fig. 72.

112. Hvorledes en Vinkel deles i 2, 4, 8 o. s. v. Dele er vist i 33. Kan Delenes Antal ikke fremstilles ved 2^n (hvor n er hvilketsomhelst helt Tal), saa kunne vi ikke iværksætte Delingen uden ved Forsøg. Skulle vi f. Ex. dele $\angle$ ABC, Fig. 72, i 3 ligestore Dele, saa slaa vi om dens Toppunkt, B, med vilkaarlig Radius en Bue ED. Stykket mellem dens Skjæringspunkter med Vinkelens Ben er $\frown$ FD. — Idet den ene Passerspids sættes i D, aabnes Passeren saameget, at Afstanden imellem Spidserne efter Øiemaal afskjærer omtrent $\frac{1}{3}$ af $\frown$ FD, f. Ex. fra D til G. — $\frown$ DG afsættes nu 3 Gange, nemlig $\frown$ DG $=$ $\frown$ GH $=$ $\frown$ HI. — Da Punktet I her falder udenfor F, saa var $\frown$ GD for stor, nemlig saa meget for stor som $\frac{1}{3}$ af $\frown$ IF. — Beholdende den ene Passerspids i H formindsker man derfor Passeraabningen med et Stykke IK, som man antager at være $\frac{1}{3}$ af $\frown$ IF, og maaler dernæst om igjen fra D. Efter endnu et eller et Par Forsög vil man da finde en Passeraabning, med hvilken man fra D til F kan afsætte 3 ligestore Buer, som DL $=$ LM $=$ MF og $\angle$ LBD er da saa nær som muligt $=$ $\frac{1}{3}$ ABC.

§ 2. 113. 2den Opgave. At dele en Cirkel i 2, 4, 8, 16, o. s. v. ligestore Dele. Fig. 73, p. f. Side. En Diameter AB deler Periferien i 2 ligestore Dele; opreises

perpendikulær paa denne Diameter en anden Diameter DE, saa deles derved Cirkelen i 4 ligestore Dele, saaledes at f. Ex. ⌒ AD er $\frac{1}{4}$ af Periferien og $\angle$ ACD = R. — Halveres denne og de øvrige rette Vinkler, saa deles Cirkelen i 8 ligestore Dele (⌒ AF = $\frac{1}{8}$ af Periferien) og ved gjentagen Halvering af de hver Gang fremkomne Vinkler kan Periferien deles i 16, 32 o. s. v. Dele, eller i et Antal Dele = 2^n, naar n er hvilketsomhelst helt Tal.

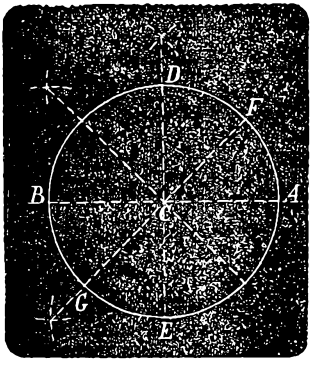

Fig. 73.

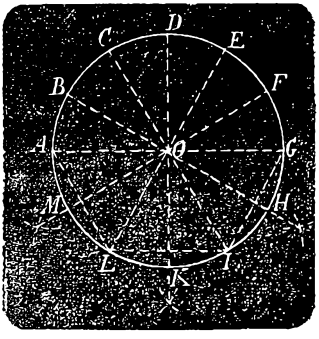

Fig. 74.

114. 3die Opgave. At dele en Cirkel i 3, 6, 12, 24 o. s. v. ligestore Dele. Fig. 74. — Man drager en Diameter AG. Dernæst tages Radien OG i Passeren og man afmaaler langs Periferien OG = GI = IL o. s. v. saa vil man træffe A eller finde, at ogsaa LA er = OG; ligeledes paa den anden Side af Periferien. — ⌒ GI er saaledes $\frac{1}{6}$ af Periferien; ligeledes ⌒ IL, ⌒ LA, ⌒ AC, ⌒ CE og ⌒ EG. — Slaar man 2 saadanne Sjettedele af Periferien sammen, har man en Trediedel af samme; ⌒ GL = ⌒ LC = ⌒ CG = $\frac{1}{3}$ af Periferien. — Ved Halvering af Vinklerne $\angle$ IOG, $\angle$ LOI o. s. v. deles Cirkelen i 12 ligestore Dele og ved gjentagen Halvering i 24,

48 o. s. v. ligestore Dele, d. e.: i et Antal Dele, der kan fremstilles ved 3×2^n, naar n er et hvilketsomhelst helt Tal.

115. 4de Opgave. At dele en Cirkel i 5, 10, 20, 40 o. s. v. ligestore Dele. Fig. 75. Man drager to paa hinanden perpendikulære Diametre AG ⊥ FH. — Radien OH halveres i I; — med Radius IA slaaes en Cirkel om I, indtil den skjærer Diameteren FH i K; dernæst slaar man med Radius AK en Cirkel om A, der skjærer Periferien i B. Afsættes nu ⌒AB rundt om Periferien, saa træffer man A og finder, at ⌒AB = ⌒BC = ⌒CD = ⌒DE = ⌒EA = $\frac{1}{5}$ af Periferien. Ved Halvering af disse Buer eller de tilhørende Vinkler deles Periferien i 10, 20, 40 o. s. v. ligestore Dele eller et Antal Dele, der kan fremstilles ved 5×2^n.

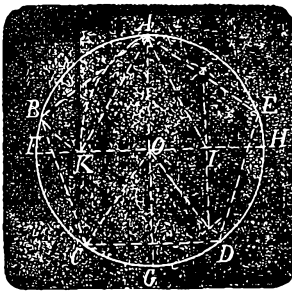

Fig. 75.

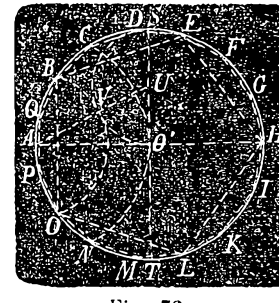

Fig. 76.

116. Ved en anden Konstruktionsmaade, som er fremstillet i Fig. 76, høideles Radius (106), og dens større Del afsættes som Korde. — Man drager to paa hinanden lodrette Diametre ST ⊥ AH. — Den ene Radius, f. Ex., O'S halveres i U, og man slaar en Halvcirkel, hvis Diameter er O'S. Fra Endepunktet A til den paa O'S lodrette Diameter drages til U Linien AU, der skjærer Halvcirkelen i V. Med Radius AV slaar man nu en Cirkel

om A, der skjærer den givne Cirkels Periferi i 2 Punkter B og O. $\frown$ BO er da $\frac{1}{5}$ og $\frown$ AB $= \frac{1}{10}$ af Pereferien. Fører man Passeren med Passeraabningen BO fra O af omkring i Periferien, saa maa, hvis man har konstrueret nøiagtigt, et Delingspunkt træffe sammen med H.

117. 5te Opgave. At dele en Cirkel i 15, 30, 60 o. s. v. ligestore Dele. (Fig. 76, Side 51). Efter 115 eller 116 deles først Cirkelen i 10 ligestore Dele: $\frown$ AB $= \frac{1}{10}$ af Perif. — Omkring A slaar man dernæst med Radius AO' en Cirkel, der skjærer den givne i C og N, og man har da $\frown$ BC eller $\frown$ ON $= \frac{1}{15}$ af Perif. — Thi efter 114 er $\frown$ AC $= \frac{1}{6}$ af Periferien, og $\frac{1}{6}$ Per. $- \frac{1}{10}$ Per. $= \frac{1}{15}$ Per. Til hver af Periferiens Femtedele maa nu svare 3 Femtendedele. $\frown \frac{1}{5}$ Per. $=$ $\frown$ BO $=$ $\frown$ BQ $+$ $\frown$ QP $+$ $\frown$ PO $= \frac{3}{15}$ Per. — Det Antal Dele, hvori Cirkelen ved denne Konstruktion kan deles, naar den forbindes med gjentagen Halvering af de fremkomne Vinkler, kan udtrykkes ved $3 \times 5 \times 2^n$.

§ 3. 118. Naar man skal maale en Vinkel, gjør man den til Centralvinkel i en Cirkel (22) og undersøger, hvor stor Del af Periferien dens Ben afskjære. — For at kunne angive dette, er det vedtaget, at dele Cirkelen i 360 ligestore Dele, der kaldes Grader, hver af disse i 60 ligestore Dele, der kaldes Minuter, og et Minut deles paa samme Maade i 60 Sekunder. Grader betegnes ved ^{0}, Minuter ved $'$ og Sekunder ved $''$. — Afskjærer saaledes Vinkelens Ben en Bue af 63 Grader, 18 Minuter og 42 Sekunder, saa siges ogsaa Vinkelen at være $= 63^0\ 18'\ 42''$.

119. 6te Opgave. At dele en Cirkel i sine 360 Grader eller en Halvcirkel i 180 Grader. Fig. 77, Side 53. — Efter 117 finder man $\frown$ EF $= \frac{1}{15}$ af Perif. $=$

$\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$; langs Halvcirkelen ADB afsættes $\frown$ GE = $\frown$ EF = $\frown$ FH = $\frown$ HI = $\frown$ IK = $\frown$ KL = $\frown$ LB.

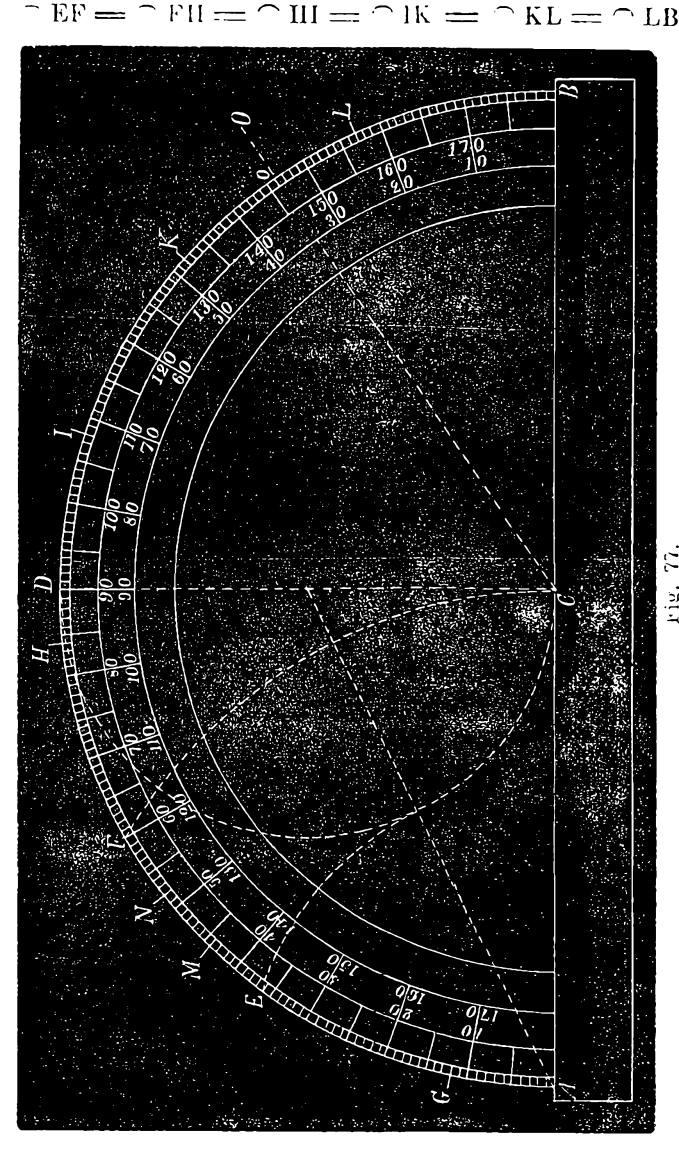

Fig. 77.

Dernæst maa man ved Forsøg dele ⌒EF i 3 ligestore Dele: ⌒ EM = ⌒ MN = ⌒NF o. s. v. = $\frac{24}{3}$ = 8^0. Ved gjentagen Halvering af denne sidste Bue findes de enkelte Grader. — Vinkelen OCB er da efter 118 = $33\frac{5}{6}{}^0$. (Brøken af 1 Grad bestemmes efter Øiemaal) = 34^0 50′. — Man foretager ikke, hver Gang en Vinkel skal maales, denne møisommelige Deling, men benytter altid en og samme i Grader inddelte Halvcirkel, sædvanlig konstrueret paa en Messingplade. Dette Maaleredskab kaldes en Transportør. — Fig. 77 kan benyttes som Transportør, idet man om den givne Vinkels Toppunkt slaar en Cirkel med Radius CA, afmaaler med Passeren Afstanden imellem denne Bues Skjæringspunkter med Vinkelens Ben, samt dernæst med uforandret Passeraabning sætter den ene Passerspids i A eller B og den anden etsteds i ⌒ ADB, og aflæser det Antal Grader, som da ligger imellem begge Spidser.

§ 4. 120. En lige Vinkel = $\frac{1}{2}$ P. = $\frac{360}{2}$ = 180^0; en ret Vinkel, R = $\frac{1}{4}$ P. = $\frac{360}{4}$ = 90^0. Summen af alle Vinkler i et Triangel = 2 R = 180^0.

121. Opgaver, 1) Naar i et Triangel en Vinkel = 79^0 13′ 28″ og en anden = 54^0 46′ 19″, hvor stor er da den 3die Vinkel?

2) Naar i et retvinklet Triangel en af de spidse Vinkler er 19^0 18′ 26″, hvor stor er den anden spidse Vinkel?

3) I et ligebenet Triangel er en af Vinklerne ved Grundlinien = 70^0 20′ 13″, hvor store ere de to øvrige Vinkler?

4) I et ligebenet Triangel er Vinkelen ved Toppunktet = 102^0 16′ 15″, hvor store ere de to øvrige Vinkler?

5) Hvor stor er hver af Vinklerne i et ligesidet Triangel?

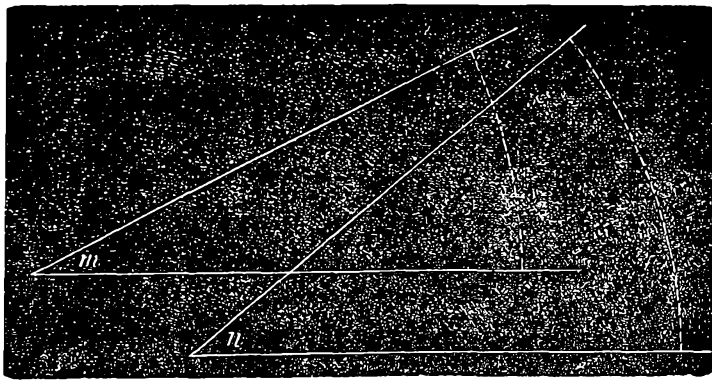

Fig. 78.

6) Fig. 38, $\angle$ BCA være $= 115^0\ 21'\ 17''$ og $\angle$ A $= 81^0\ 19'\ 36''$, hvor stor er $\angle$ B?

7) Beregn og konstruer en Vinkel $= \frac{5}{7}$ m $+ \frac{7}{9}$ n Fig. 78.

6te Afsnit.

Udmaaling af Fladestørrelser.

§ 1. 122. For at kunne bestemme Størrelsen af et Triangel er det nødvendigt at maale en af dets Sider, ligegyldigt hvilken. Denne giver man da Navnet „Grundlinie", — Fra den Grundlinien modstaaende Vinkels Toppunkt nedfældes en Perpendikulær paa Grundlinien, og dennes Længde fra hint Punkt til Grundlinien maales ligeledes og kaldes Trianglets Høide. — Vælges i Fig. 79 (p, f. S.) BC til Grundlinie, saa bliver AD Høiden, er AC Grund-

linien, saa er BE Høiden, og er endelig AB Grundlinien, saa er CF Høiden.

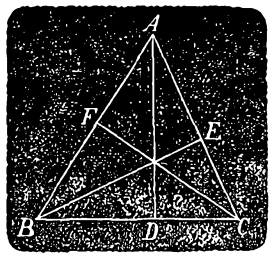

Fig. 79.

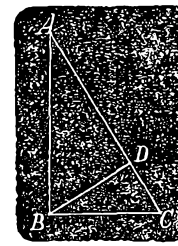

Fig. 80.

123. Er i det retvinklede Triangel ABC, Fig. 80, den ene Kathet, BC, Grundlinie, saa er den anden Kathet, AB, Høide (for Grundl. AB er CB Høide, og for Grundl. AC er BD Høide.

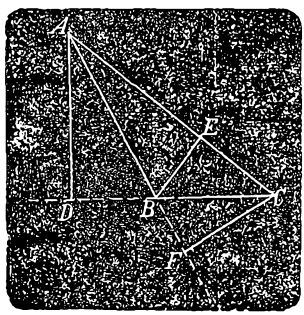

Fig. 81.

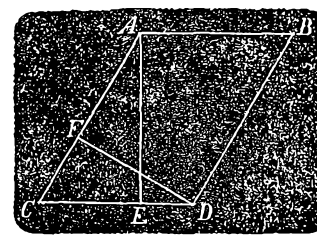

Fig. 82.

124. Vælges i et stumpvinklet Triangel ABC, Fig. 81, en af den stumpe Vinkels hosliggende Sider f. Ex. BC til Grundlinie, saa maa denne forlænges og fra den modstaaende Vinkels Toppunkt, A, en Linie nedfældes perpendikulær paa den; saaledes bliver AD Høide; er AB Grundlinie, saa er CF Høide (og er AC Grundlinie, saa er BE Høide).

125. For at bestemme et Parallellograms Størrelse maa ogsaa en af Siderne, hvilkensomhelst, maales; denne

kaldes Parallellogrammets Grundlinie. — Afstanden imellem denne og den modstaaende Side kaldes dets Høide. I Fig .82 være CD (eller AB) Grundlinie, saa er AE Høiden; er AC (eller BD) Grundlinie, saa er DF Høiden.

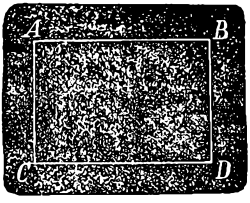

Fig. 83.

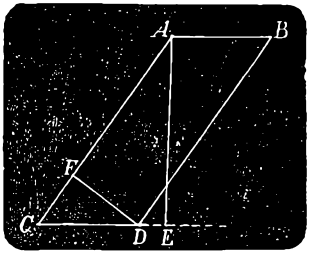

Fig. 84.

126. I et Rektangel danner af to sammenstødende Sider den ene Grundlinien, den anden Høiden; er saaledes i Fig. 83 CD (eller AB) Grundlinien, saa er AC (eller BD) Høiden og omvendt.

127. Ogsaa i et Parallellogram bliver det, for at finde Høiden, undertiden nødvendigt at forlænge Grundlinien. Er saaledes i Fig. 84 CD Grundlinien, saa er AE Høiden (medens, hvis AC er Grundlinien, Høiden bliver DF).

§ 2. 128. Ligesom en Linies Længde maales ved at undersøge, hvormange Gange den er længere, end en anden bekjendt og bestemt Linie (en Alen, en Fod, en Tomme, en metre o. s. v.), saaledes maales en Flade ved at undersøge, hvormange Gange den er større end en anden bekjendt eller bestemt Flade. — Som Fladeenhed bruges almindelig et Kvadrat, hvis Side er Længdemaalenheden. Eftersom man vælger den ene eller den anden Længdeenhed, en Alen, en Fod, en Tomme, en metre o. s. v., kaldes Fladeenheden: Kvadratalen, Kvadratfod, Kvadrattomme, Kvadratmetre o. s. v. Istedetfor 1 Kvadratfod skrives

1 □ Fod o. s. v. Her ville vi foreløbig vælge en Kvadrat-Decimallinie til Maalenhed for Flademaal.

129. I Rektanglet AD, Fig. 85, er Grundlinien CD = 8 Lin., Høiden AC = 6 Linier. — Deles Grundlinien i 8 ligestore Dele, saa er hver = 1 Linie, og drages igjennem Delingspunkterne Linier ‡ AC, saa deles Rektanglet i 8 Rektangler, hver 6 Linier lang og 1 Linie bred. Deles dernæst Høiden, AC, i 6 ligestore Dele, hvoraf hver altsaa er = 1 Linie, og drager man igjennem Delingspunkterne Paralleller med CD, saa deles derved hvert af hine Rektangler i 6 Kvadrater, hver = 1 □ Linie. Rektanglet AD indeholder altsaa 8 × 6 = 48 □ Linier. Man maa derfor maale et Rektangels Grundlinie og Höide med samme Længdemaalenhed og multiplicere de Tal, hvorved deres Længder angives, for at finde Rektanglets Flademaal i det Slags Kvadratmaalenheder, der svarer til det brugte Længdemaal eller kortelig udtrykt: Et Rektangel er lig Produktet af Grundlinie og Høide. Rekt. AD = CD × AC.

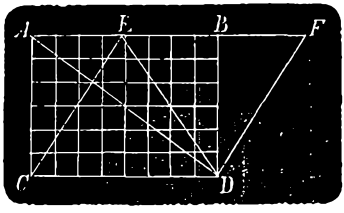

Fig. 30.

130. Drager man i vilkaarlig Retning CE og dernæst DF ‡ CE samt forlænger AB, saa fremkommer et Parallellogram ED, der klarligen er = Rekt. AD; thi tænker man sig △ AEC afskaaret af Rektanglet og flyttet hen paa høire Side af BD (nemlig i Stillingen BFD), saa fremkommer netop □ ED. Dette Parallellogram og overhovedet ethvert Parallellogram, der har samme Grundlinie og Høide som Rektanglet, er ligestort med dette. — Ethvert Parallellogram er derfor lig Produktet af dets Grundlinie og dets Høide. □ ED = CD × BD.

131 Drages i ▢ ED Diagonalen ED, saa er △ ECD = △ FED = Halvdelen af ▢ ED. Et Triangel er derfor lig det halve Produkt af dets Grundlinie og dets Høide. (△ CED = ½ CD × BD), og alle Triangler, der have ligestore Grundlinier og ligestore Høider ere ligestore.

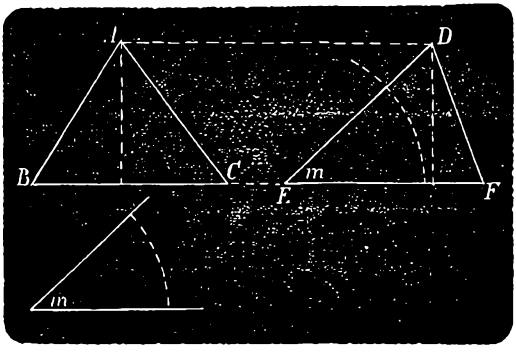

Fig. 86.

§ 3. 132. 1ste Opgave. At konstruere et Triangel med en given Vinkel og lig et givet Triangel. Fig. 86. — Givet △ ABC og ∠ m. — Drag CF i Forlængelsen af BC; afsæt i et Punkt E ∠ DEF = ∠ m og drag AD ∥ BF, saa er Afstanden fra D til EF ligesaastor som fra A til BC; drag endelig fra D, hvor AD skjærer ED, Linien DF, saa er △ DEF = △ ABC. Hvis man ikke kunde eller vilde forlænge BC henimod F, saa indsees let, at man, efter paa en ret Linie hvorsomhelst at have afsat EF = BC, kunde opreise en Perpendikulær paa denne Linie, afmaale paa denne Perpendikulær fra dens Skjæringspunkt med CF et Stykke, saa langt som det givne Triangels Høide, og igjennem det saaledes bestemte Punkt drage en Parallel med EF, indtil den skjærer det ene Ben af den i E afsatte Vinkel m, hvis andet Ben er EF.

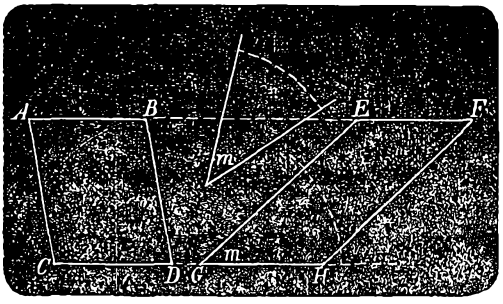

Fig. 87.

133. 2den Opgave. At konstruere et Parallellogram med en given Vinkel og af samme Størrelse som et givet Parallellogram. Fig. 87. Givet □ AD og < m. — Forlæng Grundlinien CD og gjør GH = CD. Afsæt < EGH = < m; forlæng AB og gjør EF = AB samt drag FH, saa er □ EH = □ AD. (130).

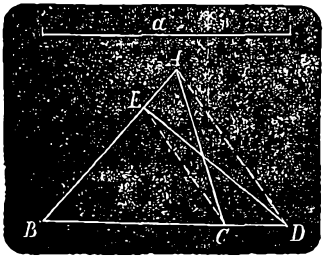

Fig. 88.

§ 4. 134. 3die Opgave. At konstruere et Triangel med en given Side og ligestor med et givet Triangel. Fig. 88. Givet △ ABC og Linien a. Forlæng, hvis det behøves, en Side, f. Ex. BC af det givne Triangel; afsæt BD = a. — Drag AD, og dernæst CE ∥ AD. Forbind endelig E og D med Linien ED, saa er △ EBD det forlangte Triangel. Thi △ AEC = △ DEC (131). Naar man derfor af det oprindelige Triangel borttager △ AEC, og tilsætter dertil △ DEC, saa lider det ingen Forandring med Hensyn til Størrelse.

135. 4de Opgave. At konstruere et Parallellogram med en given Side og ligestort med

et givet Parallogram. Fig. 89. Givet ▢ AD og Linien a. — Forlæng, forsaavidt det behøves, CE og CA. Afsæt CE = a; drag AE, og dernæst DF ∥ AE. Konstruer et Parallellogram med Siderne CE og CF, (74, 76 eller 77), saa er dette, nemlig ▢ FE det forlangte. — At ▢ FE = ▢ AD vil kunne indsees, naar man drager Diagonaler fra A til D og fra F til E, ved at sammenligne de fremkomne Triangler, hvoraf hvert er Halvdelen af det Parallellogram, hvoraf det er afskaaret.

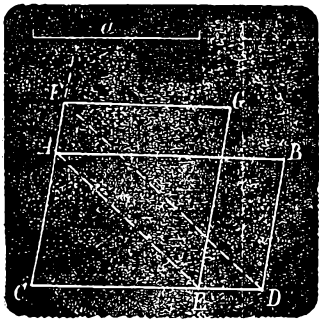

Fig. 89.

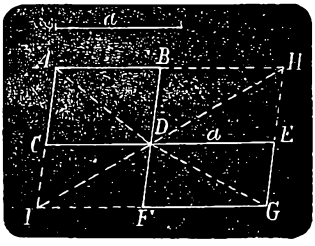

Fig. 90.

136. En anden Fremgangsmaade vises i Fig. 90. — Givet ▢ AD og Linien a. Forlæng alle Parallellogrammets Sider; gjør BH = DE = a og drag HE, der forlænges. Drag ligeledes fra H igjennem Parallellogrammets Hjørne D den forlængede Linie HI; gjør EG = IC og drag IG, saa er ▢ DG = ▢ AD. — Thi borttager man af Trianglet AIH Stykkerne HBD og DCI, hvorved kommer til Rest ▢ AD, og ligeledes af det med △ AIH ligestore Triangel HIG Stykkerne HDE og DIF, der ere ligestore med hine fra △ AIH borttagne Stykker, saa maa den fremkomne Rest ▢ DG være = ▢ AD. Af Siderne AH = CD + DE, og AI = BD + DF har man her konstrueret et

Parallellogram AG, i hvilket HI er en Diagonal; — og i dette Parallellogram er det søgte fremkommet ved at forlænge BD og CD. — □ AD og □ DG (de to Parallellogrammer, hvorigjennem Diagonalen HI ikke gaar) kaldes Komplementerne om Diagonalen. — Komplementerne om Diagonalen ere ligestore.

137. Til Opløsning af den i 134 fremsatte Opgave lader denne Sætning sig ogsaa anvende. Fig. 90. Givet △ ACD og Linien a. — Udfyld △ ACD til et Parallellogram, nemlig □ AD. — Konstruer dernæst som i 136, hvorved erholdes □ DG = □ AD. — Da derfor $\frac{1}{2}$ □ DG = $\frac{1}{2}$ □ AD, saa er △ DFG = △ ACD; altsaa △ DFG det forlangte Triangel.

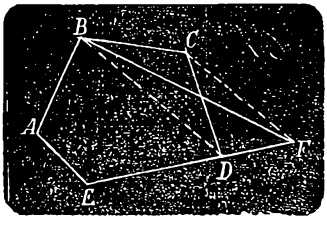

Fig. 91.

138. 5te Opgave. At konstruere en Polygon ligestor med en given, men som har en Side færre end den givne. Fig. 91. Givet Femkanten ABCDE. — Drag en Diagonal BD saaledes, at der afskjæres et Triangel BCD. BD betragtes som Grundlinie i dette Triangel, og en Linie CF drages igjennem Toppunktet C ∥ Grundlinien BD; tillige forlænges ED indtil den skjærer CF i F; forbind dernæst F med B ved Linien FB. — Efter 131 er △ BCD = △ BFD. Naar man altsaa af Polygonen ABCDE borttager △ BCD og forøger den med △ BFD, har Polygonen ikke undergaaet nogen Forandring i Størrelse. — Men ved den sidstnævnte Erstatning fremkommer Firkanten ABFE, der altsaa er = Femkanten ABCDE.

§ 6. 139. 6te Opgave. At konstruere et Triangel

af samme Størrelse som et givet Parallellogram. Fig. 92. Givet □ AD. Forlæng CD og gjør FG = 2 × CD; forlæng AB og drag fra et vilkaarligt Punkt E i denne forlængede Linie til Punkterne F og G Linierne EF og EG, saa er △ EFG = □ AD. — Eller

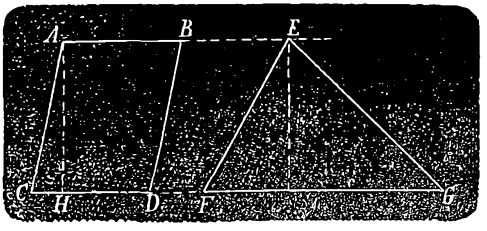

Fig. 92.

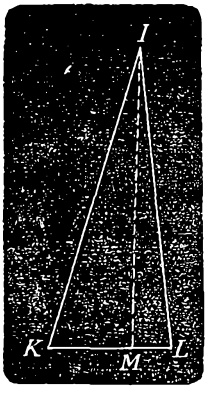

Fig. 93.

140. gjør KL (Fig. 93) = CD (Fig. 92). Opreis hvorsomhelst en Linie IM ⊥ KL og gjør IM = 2 × Høiden i det oprindelige Parallellogram, nemlig 2 × AH, saa er △ IKL = □ AD. Naar nemlig et Triangel og et Parallellogram skulle have lige Størrelse, saa maa efter 130 og 131 enten, hvis begge have ens Grundlinie, Trianglet have dobbelt saa stor Høide som Parallellogrammet, eller, hvis begge have ens Høide, Trianglet have dobbelt saa stor Grundlinie som Parallellogrammet.

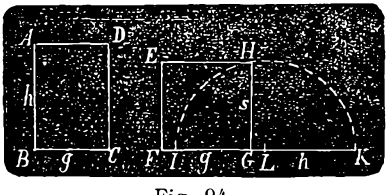

Fig. 94.

§ 7. 141. 7de Opgave. At konstr. et Kvadrat af samme Størrelse som et Rektangel. Fig. 94. Givet □ AC. — Paa

en ret Linie IK afsættes fra et eller andet Punkt I, I G = BC = Grundlinien, g, og GK = AB = Høiden h. Med IK = g + h som Diameter konstrueres Halvcirkelen IHK. Fra G opreises GH ⊥ IK, og med GH som Side konstrueres Kvadratet EG, der bliver ligestort med det givne Rektangel. — Thi efter 103 er IG : GH = GH : GK d. e. g : s = s : h; altsaa g × h = s × s; følgelig efter 129 □ AC = □ EG. — Da gh = s^2, saa er s = $\sqrt{gh}$.

142. Opgaver. 1) Angiv Kvadratmaalenhedernes Forhold til hinanden efter Decimalsystemet; 2) At udmaale □ AD, Fig. 95; 3) At udmaale △ ABC, Fig. 96; 4) At udmaale Trapezet ABDC, Fig. 97; 5) At udmaale Polygonen ABCDEF, Fig. 98; 6) At udmaale tilnærmelsesvis i norske Kvadratmile, f. Ex. en Ø paa Kartet, Fig. 99, naar dets Maalestok er = $\frac{1}{3000000}$ (d. e.: naar 1 Decimallinie paa Kartet svarer til en norsk Mil i Virkeligheden); 7) Konstruer et Rektangel = □ AD, Fig. 95; 8) Konstruer et retvinklet △ = □ AD, Fig. 95; 9) Konstruer et Rektangel = □ AD og med en Side = en Decimaltomme; 10) Konstruer et retvinklet Triangel = △ ABC, Fig. 96, og med en Side = 1 Tomme. 11) Konstruer et ligebenet Triangel = △ ABC, Fig. 96; 12) Forandre Polygonen ABCDE, Fig. 91, til et dermed ligestort Kvadrat og angiv dettes Størrelse.

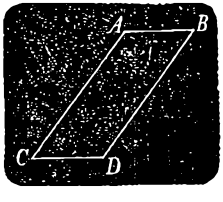

Fig. 95.

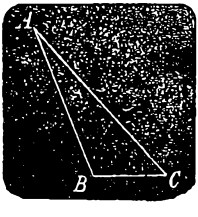

Fig. 96.

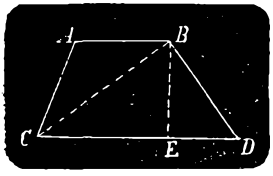

Fig. 97.

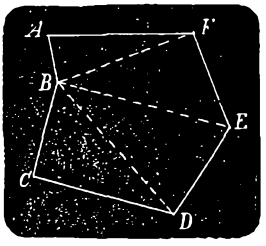

Fig. 98.

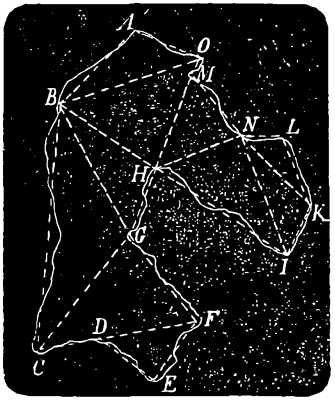

Fig. 99.

7de Afsnit.

Polygoners Addition, Subtraktion og Deling.

§ 1. 143. 1ste Opgave. At addere to Parallellogrammer. (I denne og de følgende Opgaver fordres, at den ved Konstruktionen frembragte Flade er af samme

Art eller har samme Navn som de givne. Man skal saaledes her finde et Parallellogram saa stort som de to givne tilsammen.) Det ene af Parallellogrammerne forandres saaledes, at det med Bibehold af sin Størrelse faar en Vinkel og en Side tilfælles med det andet (133 og 135 eller 136), hvorefter det paa denne Maade forandrede Parallellogram lægges ved Siden af det uforandrede saaledes, at de ligestore Sider falde sammen, og Parallellogrammerne ligge i modsatte Retninger fra denne fælles Side.

144. 2den Opgave. At subtrahere et Parallellogram fra et andet. Konstruer ligesom i 143, men læg Parallellogrammerne i samme Retning fra den fælles Side, — saa fremkommer det søgte Parallellogram.

145. 3die Opgave. At dele et Parallellogram i flere ligestore Dele. Man dele en af Siderne i det forlangte Antal ligestore Dele (90), og drage gjennem Delingspunkterne Linier parallelle med den tilstødende Side. For at erholde et Parallellogram, som var f. Ex. $\frac{3}{5}$ af et givet, maatte man paa denne Maade dele det givne Parallellogram i 5 lige Dele, og dernæst slutte sammen de 3.

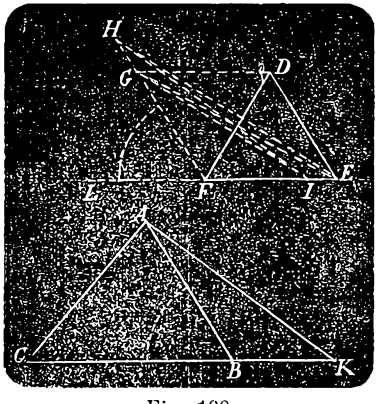

Fig. 100.

146. 4de Opgave. At addere to Triangler. Fig. 100. — Givet $\triangle$ ABC og $\triangle$ DEF. Konstruer efter 132, $\triangle$ GEF $= \triangle$DEF og med $\angle$GFE$=180^0 -$ ABC; dernæst efter 134 et Triangel HIF $= \triangle$ GEF og med Siden FH$=$AB; altsaa er $\triangle$ HIF $= \triangle$

DEF, og, naar man nu lægger △ HIF saaledes ved Siden af △ ABC, at FH og AB falde sammen, saa falder FI i Forlængelsen af BC, og der fremkommer et Triangel, △ AKC = △ ABC + △ DEF.

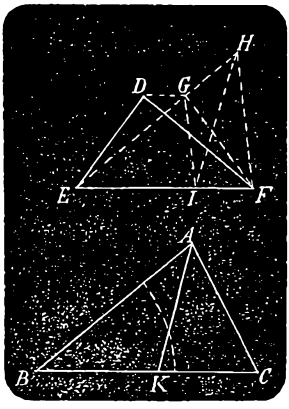

Fig. 101.

147. 5te Opgave. At subtrahere et Triangel fra et større. Fig. 101. Givet △ ABC og △ DEF. — Konstr. △ GEF = △ DEF, men med ∠GEF = ∠B; dernæst △ HEI = △ GEF, men med Siden EH = AB. Altsaa er △ HEI = △ DEF. Lægger man nu △ HEI saaledes sammen med △ ABC, at HE falder paa AB, saa falder EI langs BC, og der afskjæres et Triangel, △ ACK = △ ABC − △ DEF.

148. 6te Opgave. At dele et Triangel i flere ligestore Dele. Del en Side i det forlangte Antal Dele, og drag fra Delingspunkterne rette Linier til det modstaaende Hjørne!

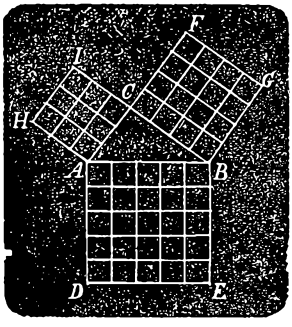

Fig. 102.

§ 2. 149. Har man paa Siderne af et retvinklet Triangel ABC, Fig. 102, konstrueret Kvadrater, saa er Kvadratet paa Hypothenusen ligt Summen af Kvadraterne paa Katheterne. Denne Sætning kaldes den Pythagoræiske Læresætning. I Fig. 102, hvor AB er = 5 Linier, AC = 3

Linier og BC = 4 Linier, sees, at Kvadratet paa Hypothenusen, □ AE = 25 Kvadratlinier, medens af de to øvrige Kvadrater det ene, □ HC er = 9 Kvadratlinier, det andet, □ GC = 16 Kvadratlinier; altsaa deres Sum □ HC + □ GC ligeledes = 25 Kvadratlinier.

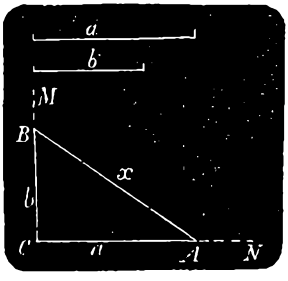

Fig. 103.

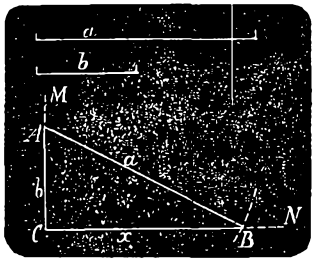

Fig. 104.

150. 6te Opgave. At addere to Kvadrater. Fig. 103. Da et Kvadrat let kan konstrueres, naar dets Side er bekjendt (87), saa tegnes i det Følgende ikke altid hele Kvadratet, men kun dets Side. Et Kvadrat, hvis Side er Linien a, Fig. 103, betegnes med a^2. De givne Kvadrater være a^2 og b^2. Fig. 103. — Konstruer en ret Vinkel MCN og afsæt paa dens Ben CA = a og CB = b, samt drag BA, hvilken Linie vi ville kalde x, saa er $x^2 = a^2 + b^2$, og $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

151. 7de Opgave. Fra et Kvadrat at subtrahere et andet mindre. Givet a^2 og b^2, Fig. 104. Konstruer en ret Vinkel MCN og afsæt paa dens ene Ben den mindste Linie, b = CA. Sæt Passerspidsen i A og slaa med en Radius = den største Linie, a, en Cirkel, saa maa denne skjære CN. Linien CB fra Vinkelens Toppunkt til Skjæringspunktet er da det søgte Kvadrats Side,

hvilken vi ville kalde x. Thi da $x^2 + b^2 = a^2$, saa er $x^2 = a^2 - b^2$ og $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

152. 8de Opgave. At konstruere et Kvadrat, som er en given Brøkdel af et andet. Skal f. Ex. det søgte Kvadrat være $= \frac{5}{7}$ af det givne, saa deles dettes ene Side i 7 ligestore Dele, og man drager igjennem det 5te Delingspunkt en Linie parallel med den tilstødende Side, hvorved fremkommer et Rektangel, som er $\frac{5}{7}$ af det givne Kvadrat. — Efter 141 forandres dette Rektangel til et Kvadrat af samme Størrelse.

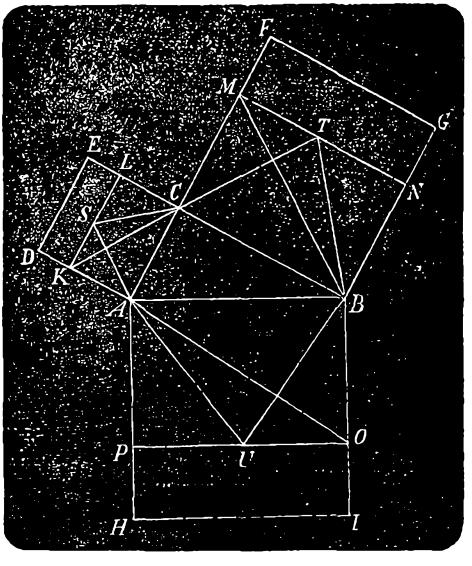

Fig. 105.

§ 3. 153. I Figur 105 er, naar $\angle ACB = R$, $AB^2 = AC^2 + CB^2$ (149), eller $\square AI = \square DC + \square GC$. Konstrueres nu efter 145 Parallellogrammer, der ere samme Brøkdele af disse tvende Parallellogrammer, saaledes at f. Ex. $\square AO = \frac{2}{3} \square AI$, $\square KC = \frac{2}{3} \square DC$, og $\square NC$

$= \frac{2}{3} \square$ GC, saa bliver $\square$ AO $= \square$ KC $+ \square$ NC, (nemlig $\frac{2}{3} \square$ AI $= \frac{2}{3} \square$ DC $+ \frac{2}{3} \square$ GC). — Drages Diagonalerne AO, KC og MB, saa faaes ogsaa, at $\triangle$ AOB $= \triangle$ AKC $+ \triangle$ MCB. Gjøres $\angle$ ABU $= \angle$ SAC $= \angle$ TCB, og drages AU, SC og TB, saa kan man bevise, at $\triangle$ BUA $\sim \triangle$ ASC $\sim \triangle$ CTB, af hvilke Triangler $\triangle$ BUA $= \triangle$ BOA, $\triangle$ ASC $= \triangle$ AKC og $\triangle$ CTB $= \triangle$ CMB (131). — Altsaa er $\triangle$ AUB $= \triangle$ ASC $+ \triangle$ CTB. — Ved disse Triangler kan man paa 3 Sider, der staa ligeoverfor ligestore Vinkler atter konstruere ligedannede Triangler, af hvilke ligeledes det største bliver lig Summen af de to mindste o. s. v. — Paa denne Maade vil der ved Sammenlægning af de med en Side til hinanden stødende Triangler fremkomme ligedannede Polygoner paa det retvinklede Triangels Sider, og da er Polygonen paa Hypothenusen saa stor som de to øvrige tilsammen.

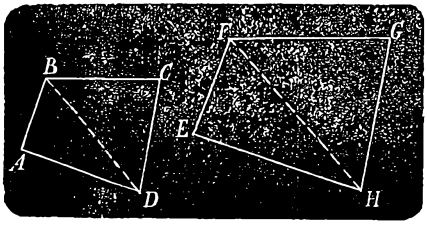

Fig. 106.

154. 1ste Opgave. At konstruere en Polygon, lig Summen af de to ligedannede Polygoner ABCD og EFGH, Fig. 106, og ligedannet med dem. — Dette sker ved paa en ret Vinkels ene Ben at afsætte AD, paa det andet HE, og forbinde de to fundne Punkter ved en ret Linie, der da bliver Hypothenusen. — Efter 72 konstrueres nu en Firkant ligedannet med ABCD saaledes, at Hypothenusen ansees som svarende til (eller ensbeliggende med) AD.

155, 2den Opgave. At konstruere en Polygon,

lig Differentsen, EFGH—ABCD, imellem de to Polygoner og ligedannet med dem. — Man konstruerer et retvinklet Triangel saaledes, at AD bliver den ene Kathet og EH Hypothenusen. Den anden Kathet behandles derefter som man i forrige Opgave behandlede Hypothenusen.

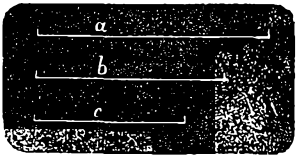

Fig. 107.

156. Opgaver. 1) Konstruer et Parallellogram $= \square$ AD, Fig. 95, $+ \triangle$ ABC, Fig. 96; 2) Konstr. et Triangel $= \triangle$ EFG, Fig. 92, $- \triangle$ ABC, Fig. 80; 3) Konstruer et Kvadrat $= \frac{4}{3} \square$ AD Fig. 95, $- \frac{3}{8} \triangle$ ABC, Fig. 96; 4) Konstruer et Kvadrat $= 2 \times \square$ EG, Fig. 94; 5) Konstruer et Kvadrat $= 3 \square$ EG; Fig. 94; 6) Konstruer et Kvadrat $= \frac{3}{5} \square$ EG, Fig. 94; 7) $a^2 + b^2 - c^2 = x^2$, Fig. 107; 8) $\sqrt{(a+c)^2 - (b+c)^2} = x$, 9) $x = \frac{a}{2b}\sqrt{a^2 - c^2}$; 10) $x = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(a^2 - c^2)}{bc}}$ $\left(= \frac{2}{5}\frac{\sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{bc}}\right)$

8de Afsnit.

Polygoner, hvis samtlige Sider ere Korder i eller Tangenter til Cirkler.

§ 1. 157. Naar en Polygons samtlige Sider ere Korder i en Cirkel, saa siges Polygonen at være indskreven i Cirkelen, og denne at være omskreven om Polygonen. Ere en Polygons samtlige Sider Tangenter til

en Cirkel, saa siges Polygonen at være omskreven om Cirkelen, og denne at være indskreven i Polygonen.

158. 1ste Opgave. At indskrive en Polygon f. Ex. en Firkant i en Cirkel. — Man drage blot i den givne Cirkel 4 sammenstødende Korder, som AB, BC, CD og DA. Fig. 108. Det bemærkes, at i en i Cirkelen indskreven Firkant bliver Summen af to og to modstaaende Vinkler f. Ex. $\angle A + \angle C$ eller $\angle B + \angle D = 2$ R.

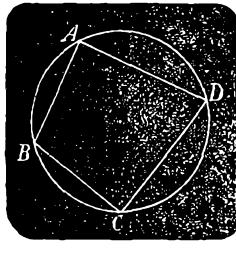

Fig. 108.

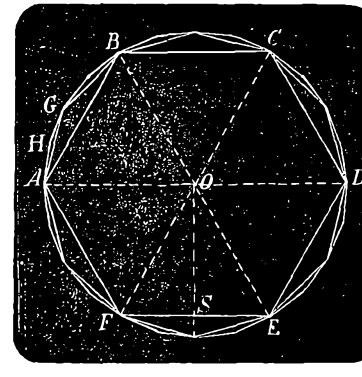

Fig. 109.

159. 2den Opgave. At konstruere en regulær Polygon. Dette sker i Regelen ved at indskrive en saadan i en Cirkel, saaledes som det er vist i Fig. 109. — Først deles Cirkelen efter Reglerne i 5te Afsnit i saamange ligestore Dele, som Polygonen skal have Sider, hvorpaa Delingspunkterne forbindes med hinanden ved Korder. Saaledes er her først dannet Sexkanten ABCDEF, og dernæst Tolvkanten med Siderne AG, GB o. s. v.

160. 3die Opgave. At omskrive en Cirkel om et Triangel. Fig. 110. Givet $\triangle$ ABD. Halver to af Siderne, f. Ex. BD og AB, efter 26 Side 12, hvorved Halve-

ringslinierne blive perpendikulære paa Siderne. Halveringsliniernes Skjæringspunkt, C, er den forlangte Cirkels Centrum, og dettes Afstand fra et af Hjørnerne, nemlig f. Ex. CB, er dens Radius.

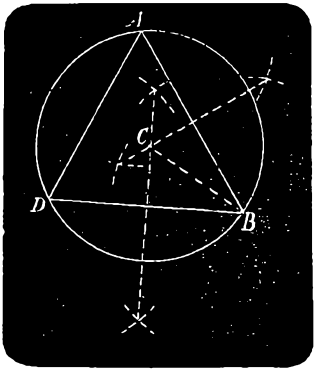

Fig. 110.

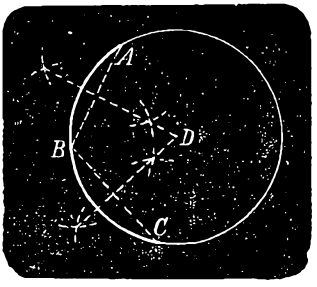

Fig. 111.

161. 4de Opgave. At finde Centrum til en Cirkel (hvoraf kun en Del behøver at være given). En Bue af Cirkelen i Fig. 111 være given. — Man vælger i samme vilkaarligt 3 Punkter A, B og C, og tænker sig A og B forbundne ved en ret Linie; ligeledes B og C. Ved Halvering af disse Linier finder man efter 160 Centret, D, til den givne Cirkel, der nu kan fuldføres.

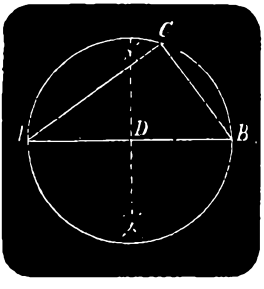

Fig. 112.

162. Skal man omskrive en Cirkel om et retvinklet Triangel, saa behøver man blot at halvere Hypothenusen. Delingspunktet er da Centrum, og den halve Hypothenuse Radien til den forlangte Cirkel. I Fig. 112, hvor $\angle$ ACB

= R, gjøres AD = DB = Radius i den Cirkel, der gaar igjennem A, B og C.

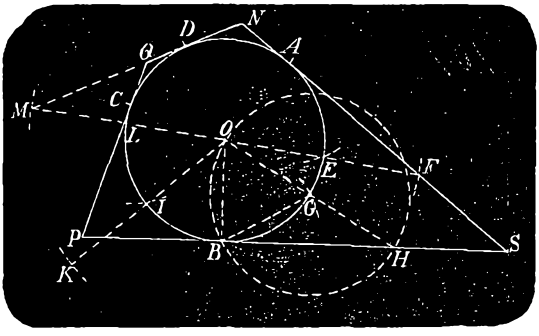

Fig. 113.

§ 2. 163. 1ste Opgave. At omskrive en Polygon f. Ex. en Firkant om en Cirkel. Fig. 113. Man afsætter paa Periferien 4 Punkter A, B, C og D, hvorefter man efter 37 drager Tangenter til Cirkelen i disse Punkter. Herved fremkommer den forlangte Firkant NSPQ. Det bemærkes, at i en om en Cirkel omskreven Firkant Summen af et Par modstaaende Sider er lig Summen af det andet Par: SN + PQ = SP + NQ.

164. 2den Opgave. At omskrive en regulær Polygon om en Cirkel. Fig. 114. Man inddeler Cirkelen i saamange ligestore Dele, som Polygonen skal have Sider, og drager i Delingspunkterne Tangenter til Cirkelen. En let Maade til at drage mange Tangenter til en Cirkel er følgende: Man dele Radien O'A i 4 ligestore Dele, forlænge den, og afsætte AP = $\frac{1}{4}$ Radius. Dernæst slaar man om O' med Radius O'P en Cirkel; tager i Passeren $\frac{3}{4}$ af Radien, og idet man sætter Passerspidsen i Punkterne A, B, C, D o. s. v., som

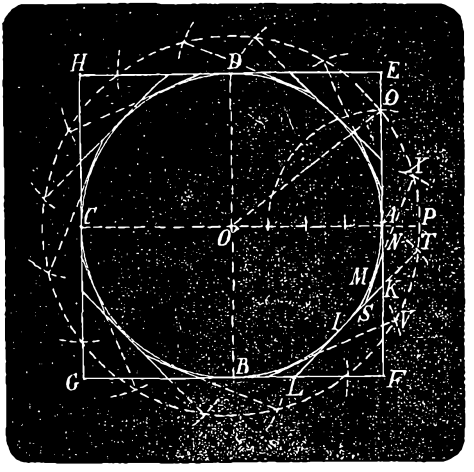

Fig. 114.

skulle være Berøringspunkterne, afmærker man med Blyanten paa den ydre Cirkel Punkter, hvoraf et er betegnet med O. Drages nu AO, DH o. s. v., hvilke Linier samtlige forlænges, saa ere disse Linier Tangenter, og begrændse ved indbyrdes at skjære hinanden den forlangte Polygon. — Fremgangsmaaden indsees let at grunde sig paa 149.

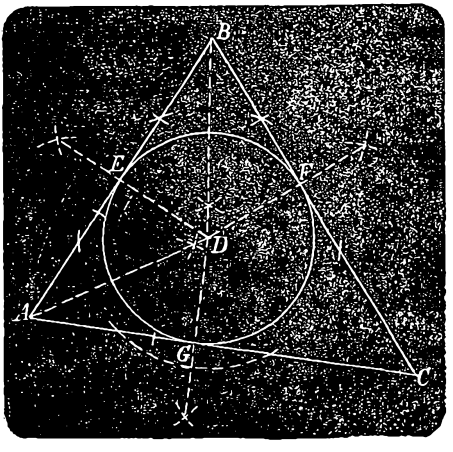

Fig. 115.

165. 3die Opgave. At indskrive en Cirkel i et Triangel. Fig. 115. Halver

to Vinkler (33) f. Ex. A og B. — Halveringsliniernes Skjæringspunkt, D, bliver Cirkelens Centrum, og dens Radius faaes ved fra D at nedfælde en Perpendikulær paa en af Siderne f. Ex. DF ⊥ BC (38).

9de Afsnit.

Regulære Polygoners Omkreds og Indhold.

§ 1. 166. Ved en regulær Polygons Centrum forstaaes Centrum til en Cirkel, der kan omskrives Polygonen eller indskrives i den. Radien til den Polygonen omskrevne Cirkel kaldes Polygonens større Radius, og Radien til den i Cirkelen indskrevne Polygon (der maa staa perpendikulær paa hver af Siderne, saasom disse ere Tangenter) kaldes Polygonens mindre Radius. — I Fig. 109, Side 72, er O Centrum til Sexkanten ABCDEF, OA dens større, og OS dens mindre Radius.

167. 1ste Opgave. At bestemme Omkredsen (Perimeteren) af en given regulær Polygon. Man behøver blot at maale en Side, f. Ex. AB, Fig. 109, og multiplicere dens Længdemaal med Sidernes Antal, her 6. I Figuren er Cirkelens Radius eller Polygonens større Radius $= 0,_{65}$ Tomme, og efter 114 er ogsaa AB $= 0,_{65}$ Tomme; følgelig nærværende Sexkants Perimeter $= 6 \times 0,_{65}$ Tomme $= 3,_{9}$ Tommer (eller 3 Gange saa lang som Cirkelens Diameter). — Indskriver man i Cirkelen en Tolvkant, saa bliver Siden i samme, AG $> \frac{1}{2}$ AB, (da AB er $<$ AG

+ GB). Den vil ved Maaling findes at være $0,_{34}$ Tomme; altsaa Tolvkantens Omkreds $= 4,_{08}$ Tommer (omtrent $3,_{12}$ Gange Cirkelens Diameter). I den indskrevne 24kant, bliver Siden AH lidt større end Halvdelen af AG o. s. v.

168. I Fig. 114, S. 75, er $OA = 0,_{65}$ Tomme en regulær Firkants (et Kvadrats) mindre Radius. — Siden i samme EF bliver = Cirkelens Diameter, DB = 2 Gange Radien; følgelig er den omskrevne regulære Firkants Perimeter $= 5,_{2}$ Tommer eller 4 Gange Diameteren. KL er Siden i en omskreven 8kant, og da AK, KI, IL og LB ere ligestore, hver $= \frac{1}{2}$ KL, saa er (eftersom AK + LK + LB er < AF + FB): $4 \times \frac{1}{2}$ KL < AF + FB; d. e. 2 Gange Ottekantens Side er mindre end Firkantens Side. Ved Maaling findes $KL = 0,_{54}$ Tomme: altsaa den omskrevne 8kants Perimeter $= 0,_{54} \times 8 = 4,_{32}$ Tommer (eller $3,_{32}$ Gange Diameteren). Den omskrevne 16kants Side NS maa atter blive mindre end Halvdelen af den omskrevne Ottekants. Man finder $NS = 0,_{26}$ Tomme, altsaa den omskrevne 16kants Perimeter $= 16 \times 0,_{26} = 4,_{16}$ Tomme (= $3,_{2}$ Gange Diameteren) o. s. v.

§ 2. 169. For at bestemme Fladeindholdet af en regulær Polygon lægge man Mærke til Følgende: Ved større Radier kan Polygonen deles i saamange kongruente Triangler som den har Sider. Det gjælder altsaa kun at finde Størrelsen af et iblandt disse Triangler; dernæst maa man multiplicere denne med deres Antal. — Skulde man saaledes finde Indholdet af den regulære Sexkant ABCDEF, Fig. 109, saa findes $\triangle$ FOE $= \frac{1}{2} \times$ OS $\times$ FE (131); altsaa Polyg. ABCDEF $= \frac{1}{2} \times$ OS $\times$ (6 $\times$ FE)

$= \frac{1}{2}$ O S× Perimeteren. — En regulær Polygons Indhold er det halve Produkt af dens Omkreds og dens mindre Radius.

10de Afsnit.

Cirklers Periferi og Indhold. Maaling af Sektorer.

§ 1. 170. Naar man i en Cirkel, hvis Radius vi ville betegne med r, indskriver en regulær Sexkant ABCDEF Fig. 109, saa er dens Omkreds = 6 r eller = 3d, naar Diameteren betegnes med d. Indskriver man i den samme Cirkel en Tolvkant, Fireogtyvekant o. s. v., saa bliver dens Perimeter stedse større (167). Imidlertid vil Konstruktion og ligefrem Udmaaling ikke give tilstrækkelig nøiagtige Resultater til at man langt kan forfølge denne Fremgangsmaade. Man maa derfor tage sin Tilflugt til Beregninger, som dog ikke her skulle anstilles. Det maa være os nok at se den Vei, hvorpaa man ledes til Erkjendelse af, at naar Polygonen saaledes har faaet særdeles mange Sider, dens Omkreds vil være paa det nærmeste $6,_{2832}$ Gange den større Radius eller $3,_{1416}$ Gange Diameteren af den Cirkel, hvori den er indskreven. Da nu denne Polygon temmelig nær falder sammen med Cirkelen, saa kan man ogsaa sige, at en Cirkels Periferi er omtrent $3,_{1416}$ Gange dens Diameter. For at finde en Cirkels Periferi multiplicerer man dens Radius med dette Tal $3,_{1415}$ (nøiagtigere $3,_{141593}$) og fordobler det udkomne Produkt. — Tallet $3,_{141593}$ betegnes

med π (pi) og man kan skrive som en almindelig Formel: Periferien $p = 2 \times \pi \times r$.

171. Omskriver man om en Cirkel en regulær Firkant som ABCD, Fig. 114, saa er dens Omkreds $= 4\ d = 8\ r$. Omkredsen af den omskrevne Ottekant bliver $6,_{64}$ Gange Cirkelens Radius eller $3,_{32}$ Gange Diameteren, og ved gjentagen Fordobling af Sidernes Antal faar man Polygoner frem, hvis Omkredse blive stedse mindre (168). — Ved Beregning findes Omkredsen af en Cirkelen omskreven Polygon med særdeles mange Sider at være omtrent $6,_{2832}$ Gange Cirkelens Radius eller $3,_{1416}$ Gange dens Diameter, og denne Polygon kan, ligesom den nysomtalte i Cirkelen indskrevne, ansees som faldende sammen med Cirkelen selv. — Man faar altsaa ligesom ovenfor $p = 2\ \pi\ r$, hvor $\pi = 3,_{141593}$.

172. Er omvendt Periferien given, kan man finde Radien ved at dividere hin med det Dobbelte af π; altsaa $r = \frac{p}{2\pi}$.

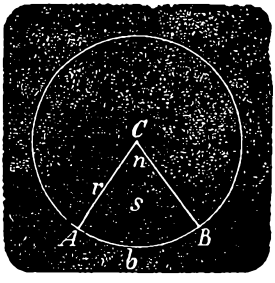

Fig. 116.

173. Periferiens Gradetal forholder sig til en Bues Gradetal, som Periferiens Tommemaal til Buens Tommemaal. Er saaledes Buen AB, Fig. 116, given i Længdemaal, saa kan man, hvis Periferien er bekjendt, ved Reguladetri beregne dens Gradetal; eller omvendt, naar Gradetallet er givet, beregne Længden. Er en Bues baade Gradetal, n, og Længde b, givne, kan man beregne den tilsva-

rende Cirkels Periferi, p,: 1) $p : b = 360^0 : n$

2) $360^0 : n = p : b$

3) $n : 360^0 = b : p$

§ 2. 174. Da Cirkelen kan ansees som paa det nærmeste faldende sammen med en i samme indskreven regulær Polygon med særdeles mange Sider, saa bliver dennes Indhold næsten lig Cirkelens. Men en regulær Polygon er efter 169 det halve Produkt af dens Omkreds og dens mindre Radius. — Da nu Omkredsen af den her omtalte Polygon paa det Nærmeste falder sammen med Periferien og Polygonens mindre Radius med Cirkelens Radius, saa bliver Polygonens Indhold = Cirkelens Indhold $= \frac{1}{2} p \times r$. — Men da p var $= 2 \pi \times r$, saa bliver Cirkelen $c = \frac{1}{2} \times 2 \pi \times r \times r = \pi \times r^2$. En Cirkels Indhold er derfor lig Produktet af π og Radiens Kvadrat.

175. Er Cirkelens Indhold bekjendt, saa kan man finde Radien ved at dividere Indholdet med π og af det Udkomne uddrage Kvadratroden, $r = \sqrt{\frac{c}{\pi}}$.

176. En Sektors Fladeindhold er det halve Produkt af dens Bue og Cirkelens Radius. Sektoren ACB, Fig. 116, $= \frac{1}{2} b \times r$.

177. Periferiens Længde eller Grader forholder sig til en Bues Længde eller Gradetal som Cirkelens Fladeindhold til den paa Buen konstruerede Sektors Fladeindhold, s,: 1) $p : b = c : s$

2) $360^0 : n = c : s$

og heraf 3) $c : s = p : b$

4) $c : s = 360^0 : n$

178. Opgaver. 1) Diameteren $d = 4,_{2}$, Tommer, hvor

stor er p? 2) $p = 32,_{46}$ Tommer, hvor stor er r? 3) Hvormange Grader, Minuter og Sekunder tæller en Bue, som er $0,_{146}$ Tommer lang i en Cirkel, hvis Radius er $1,_{42}$ Tommer? 4) Hvor lang er en Bue paa $62^0\ 16'\ 13''$ i en Cirkel, hvis Diameter er $3,_{12}$ Tommer. 5) Naar i en Cirkel en Bue paa $25^0\ 12'\ 4''$ er $0,_{25}$ Tommer lang, hvor stor er Radien? 6) Naar Diameteren $d = 4,_{72}$ Tommer, hvor stor er Cirkelen? 7) Hvor stor er Radius i en Cirkel paa $6,_{1468}$ □ Tommer? 8) Hvormange Grader, Minuter og Sekunder er Buen til en Sektor, der indeholder $4,_{1468}$ □ Tommer, naar Radien er $2,_{03}$ Tommer? 9) Hvor lang er denne Bue? 10) Naar en Sektor paa $30^0\ 10'$ udgjør $5,_{2137}$ □ Tommer, hvor stor er Radien? 11) Er en Cirkel $= 13._{3649}$ □ Tommer og en Sektor i samme $9,_{351}$ □ Tommer, hvor mange Grader, Minuter og Sekunder er dens Bue? 12) Hvor lang er denne Bue?

11te Afsnit.

Cirklers Addition, Subtraktion og Deling.

§ 1. 179. Dersom ligedannede Polygoner ere konstruerede paa Siderne af det retvinklede Triangel ABC, Fig. 117, Side 82, saaledes at AB, BC og AC blive til himandeu svarende eller ensbeliggende Sider i Polygonerne, saa er efter 153 Polygonen med Siden AB lig Summen af de to andre Polygoner. — Tænke vi os i hver af Polygonerne Siderne at være særdeles mange og med Undtagelse af dem, de have tilfælles med Trianglet, overmaade smaa,

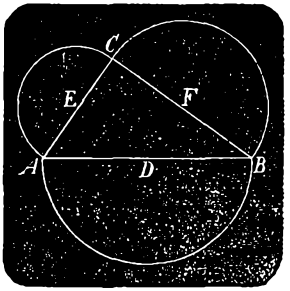

Fig. 117.

saa kunne Polygonerne paa det Nærmeste blive faldende sammen med de paa Figuren fremstillede Halvcirkler, uden at derved hin Sætning angaaende deres Størrelse taber sin Gyldighed. Den Halvcirkel, hvis Diameter er Hypothenusen, er derfor lig Summen af de to øvrige; følgelig er ogsaa, naar man konstruerer Cirkler paa de 3 Sider af et retvinklet Triangel (d. e. hvis Diametre disse 3 Linier ere) Cirkelen paa Hypothenusen lig Summen af Cirklerne paa Katheterne.

180. 1ste Opgave. At addere to Cirkler. Man konstruerer et retvinklet Triangel, hvori de to givne Diametre ere Katheter. Hypothenusen er da Diameter i den søgte Cirkel.

181. 2den Opgave. At subtrahere en Cirkel fra en anden. Man konstruerer et retvinklet Triangel saaledes, at dets ene Kathet er den mindste af de givne Diametre og dens Hypothenuse den største. — Den anden Kathet i det fremkomne Triangel er da Diameter i den søgte Cirkel.

182. At konstruere en Cirkel, som er en Brøk af en given. Dersom vi ville konstruere en Cirkel, som er $\frac{7}{9}$ af den i Fig. 118 (Side 83) fremstillede, saa skulle vi først efter 90 gjøre BE $= \frac{7}{9}$ BD $= \frac{7}{9}$ AC eller, naar AC kaldes r og BE r', r' $= \frac{7}{9}$ r. — Dernæst søge vi efter 103 Mellemproportionalledet imellem r og r', — nemlig GB $=$ x; altsaa r : x $=$ x : $\frac{7}{9}$ r, saa er x Radius i den søgte Cirkel; thi af den sidstanførte Proportion følger,

at $x^2 = \frac{7}{9} r^2$; altsaa ogsaa $\pi x^2 = \frac{7}{9} \pi r^2$ eller Cirkelen med Radien $x = \frac{7}{9}$ af Cirkelen med Radien r.

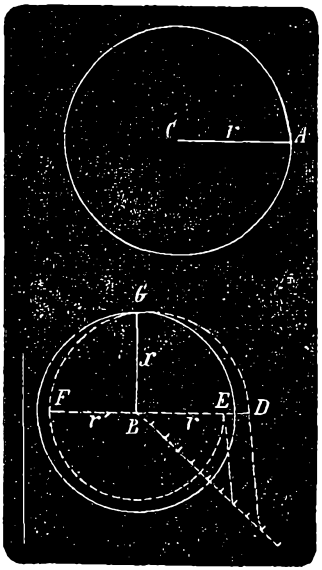

Fig. 118.

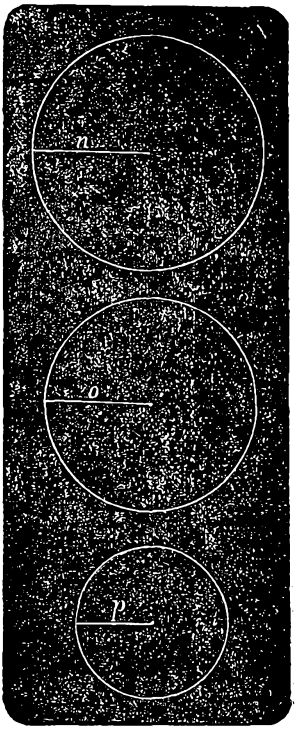

Fig. 119.

183. Opgaver. n, o og p, Fig. 119, være 3 Cirklers Diametre og vi ville med c_n, c_o og c_p betegne disse Cirkler, en søgt Cirkel med c_x. — 1) $c_n + c_o + c_p = c_x$. 2) $c_n + c_p - c_o = c_x$. 3) $\frac{3}{5} c_n + \frac{2}{3} c_o - \frac{1}{2} c_p = c_x$. 4) $2 c_o + \frac{1}{2} c_p = c_x$. 5) $3 c_n - \frac{1}{3} c_o = c_x$.

Trykfeil.

Side 58 Linie 11 f. o. staar: Fig. 30; læs Fig. 85.

Den offentlige Examen i Christiania Kathedralskole tager i indeværende Aar sin Begyndelse Onsdag den 26de Juni og afholdes overensstemmende med hosføiede Tabel.

Mandag den 8de Juli Kl. 12 Middag og paafølgende Tirsdag den 9de Juli Kl. 9 Formiddag holdes Optagelsesprøve med de nyindmeldte Elever.

Onsdag den 10de Juli Kl. 12—1 udleveres Charactersedlerne.

Sommerferierne indtræde den 11te Juli og vedvare indtil den 10de August inclusive.

Samtlige Disciple møde atter paa Skolen Mandag den 12te August Kl. 12 Middag.

Disciplenes Forældre og Foresatte samt enhver Anden, som maatte interessere sig for Skolen og dens Ungdom, indbydes herved til at beære Examens mundtlige Del med sin Nærværelse.

Christiania den 10de Juni 1867.

F. L. Vibe.

Exame

Juni

Dage.	Formiddag.	Eftermiddag.
Onsdag d. 26de Juni.	7 Kl. } Latinsk Stil. 6 — 5 — 4 — 3 — 2 — Regning Dørum. 1 — Religion Vogt.	6 Kl. } Sang Beh 5 — 4 —
Torsdag d. 27de Juni.	7 Kl. } Norsk Stil. 6 — 5 — 4 — 3 — 2 — Religion Vogt. 1 — Regning Dørum.	3 Kl. } Sang Beh 2 — 1 —
Fredag d. 28de Juni.	7 Kl. } Lat. Oversættelse. 6 — 5 — a Latin Schreiner. 4 — Fransk Vogt. 3 — a Græsk Brock. 2 — Geografi Petersen.	3 Kl. } Skrivn. og 2 — Hessel 1 —
Lørdag d. 29de Juni.	7 Kl. a Mathemat. Dørum. 6 — a Latin Løkke. 5 — Hist. &Geog. Petersen. 4 — Græsk Brock. 3 — Religion Vogt.	7 Kl. b Mathem. D
Mandag d. 1ste Juli.	7 Kl. a Latin Løkke. 6 — a Mathem. Dørum. 5 — b Latin Schreiner. 4 — Religion Vogt. 3 — Tydsk Nicolaysen 2 — a Historie Brock.	2 Kl. b Historie I
Tirsdag d. 2den Juli.	7 Kl. b Latin Løkke. 6 — b Mathem. Dørum. 5 — Religion Vogt. 4 — Hist. & Geog. Petersen. 3 — a Latin Schreiner og Ottesen. 2 — Tydsk Nicolaysen. 1 — Historie Brock.	3 Kl. b Latin Schrei O

Examen begynder hver For

Prøven i Græsk i 7de og 6te Klasse

-Tabel

1867.

age.	Formiddag.	Eftermiddag.
sdag ie Juli.	7 Kl. Fransk Vogt. 6 — b Latin Løkke. 5 — Tydsk Nicolaysen. 4 — a Latin Schreiner. 4 — b Mathem. Dørum. 3 — b Græsk Brock. 1 — Geografi Petersen.	6 & 5 Kl. } Gymnastik Kl. 4 4 & 3 — } Sylow. — 4½ 2 & 1 — } — 5.
rsdag le Juli.	7 & 6 Kl. Engelsk Nicolaysen. 6 — Tydsk Løkke. 5 — Fransk Vogt. 4 — a Mathem. Dørum. 4 — b Latin Schreiner. 3 — Hist. og Geog. Petersen. 2 — a Norsk Knudsen.	
edag te Juli.	7 Kl. Tydsk Løkke. 6 — Fransk Vogt. 5 — a Græsk Brock. 3 — Mathem. Dørum. 2 — b Norsk Knudsen. 1 — Latin Ottesen.	
dag te Juli.	7 Kl. Hist. & Geog. Petersen. 6 Kl. Religion Vogt. 5 — a Mathem. Dørum. 5 — b Græsk Brock. 3 — a Norsk Knudsen. 1 — Norsk Ottesen.	
ndag de Juli.	7 Kl. Religion Vogt. 6 — Hist. & Geog. Petersen. 5 — b Mathem. Dørum. 4 — Tydsk Nicolaysen. 3 — b Norsk Knudsen. 2 — Latin Ottesen.	

Kl. 9, hver Eftermiddag Kl. 4.

paa Grund af Examinators Fraværelse.