Danskernes Historie Online
Danske Slægtsforskeres Bibliotek

Dette værk er downloadet fra Danskernes Historie Online

Danskernes Historie Online er Danmarks største digitaliseringsprojekt af litteratur inden for emner som personalhistorie, lokalhistorie og slægtsforskning. Biblioteket hører under den almennyttige forening Danske Slægtsforskere. Vi bevarer vores fælles kulturarv, digitaliserer den og stiller den til rådighed for alle interesserede.

Støt Danskernes Historie Online - Bliv sponsor
Som sponsor i biblioteket opnår du en række fordele. Læs mere om fordele og sponsorat her: https://slaegtsbibliotek.dk/sponsorat

Ophavsret
Biblioteket indeholder værker både med og uden ophavsret. For værker, som er omfattet af ophavsret, må PDF-filen kun benyttes til personligt brug.

Links
Slægtsforskernes Bibliotek: https://slaegtsbibliotek.dk
Danske Slægtsforskere: https://slaegt.dk

CALCULENS METAPHYSIK.

ET INDBYDELSESSKRIFT

TIL

DEN OFFENTLIGE EXAMEN

I

ODENSE CATHEDRALSKOLE

AF

A. KREIDAL,

ADJUNCT, LÆRER I MATHEM., NATURHISTORIE, HEBRAISK.

Universitetsbibliotekets Bibliotek

ODENSE 1827.

TRYKT HOS S. HEMPEL,

EIER AF FYENS STIFTS ADRESSEKONTOIR OG BOGTRYKKERIE.

Videnskabernes og Kunsternes Dyrkere kan henføres til 3 Klasser: Genier, Talenter og systematiske. De Første opfinde, de Andre modtage det Opfundne, de Sidste ordne. De Første ere productive, den 2den Klasse practiserende, den 3die contemplativ. I Musiken seer man det tydeligt: Nogle have Genie, og opfinder musikalske Ideer, Andre ere blot practiserende, og udføre det der er componeret, men selv formaae de ikke at producere noget nyt, eller Andre beskjæftige sig ved at musicere blot med Harmoniens Theorie Intet er almindeligere, end at man overseer denne Classification, og snart frasiger den practiserende og snart Geniet og snart Systematikeren Navn af Musicus; snart foragter Geniet Talentet og frakjender det al Værd, snart hovmoder Talentet sig over Geniet. Alle slige vrange og skjæve Domme kommer blot af Eensidighed. En har beseet et lille Gebeet eller Distrikt afen Kunst eller Videnskab, og uden at have Oversigt over dets hele Omfang dømmer han strax derom. Hver Klasse har sit Værd, som ikke bør miskjendes. Ogsaa i Mathematiken see vi samme Inddeling; de store udødelige Mænd: *Leibnitz*, *Newton*, *Euler*, *Lagrange*, *Laplace*, *Legendre*, *Descartes*, *d'Alembert*, *Bernouilli* o fl. har ved deres gigantiske Genie udvidet Videnskaben med udmærkede Opfindelser. Disse Opfindelser have Systematikerne bragt i System. *Wolf* (en af de meest udmærkede Systematiker) *Kästner*, *Karsten*, *Segner*, *Vega*, *Lacroix*, *Francoeur*, *Sauri* o. m. fl. høre til denne Klasse. — Systematikeren betragter Geniets Produkter som Naturprodukter, som han klassificerer; han søger at faae Overblik over dem, ligesom den systematiske Botaniker bringer System i de Planter, som den reisende Botaniker sender ham.

Calculens Metaphysik hjelper til et saadant Overblik over alle den analytiske Calculs Bestanddele og Artificia, den forholder sig til Calculen som Generalbassen til Musiken. Den bliver et Sidestykke til *Degens* Heuristik, kun saaledes, at den hører mere til Systematikerne, da derimod Heuristiken refereres til Genierne.

Nærværende Forsøg er kun en Skizze, det vil være mig kjært, at udvide det mere og mere; thi Meget, Meget er der tilbage.

Jeg har brugt Kategorierne som en Ariadnes Traad til at finde Vei igjennem den Labyrinth af Operationer, der er i Analysis; mulig kunde man finde et bedre Arrangement. At samme Begreb forekommer i flere Kategorier, er godt; thi det er en meersidig Betragtning af samme. De Værker jeg har citeret ere: *Lagranges* theorie des fonctions analytiqves, Paris 1813 og Sammes mecanique analitique Paris 1788. *Laplaces* mecanique celeste. Oversættelsen af *Burkhardt*. Sammes Theorie analytique des probabilités, Paris 1820. *Lacroix* Traité elementaire de calcul diff. et integral, Paris 1820.

Enhver Calcul bestaaer ialmindelighed af Æqvationssystemer, disse af Æqvationer, og disse af analytiske Udtryk, der egentlig er Tal indklædt i een eller anden Form. Udtryk, Æqvationer og Systemer ere Bestanddelene af en Calcul. Udtryk svarer til et Begreb, Æqvation til en Sætning, og et System til en Periode. Analysens Copula er $=$.

Calculen bestaaaer i en bestandig Transformation af disse Bestanddele, de antage nye Skikkelser og Former efter visse Love, indtil de faae den Form, hvori vi lettest og tydeligst kan læse Svaret. Theorien om Calculens Bestanddele og de Operationer og Artificia, hvorved de transformeres udgjør Calculens Metaphysik. For Ordens og Fuldstændigheds Skyld gjennemgaaer jeg det efter Kategorierne.

---

1. Udtryk.

§ 1. *Med Hensyn til Qvantitet.*

No. 1.

I Henseende til den mathematiske Qvantitet kan et Udtryk (Tal under en analytisk Form) være større, ligestor, mindre. Dertil svarer Operationerne: Addition, Multiplication, Potensering og

Subtraction, Division, Rod Extraction; og endelig ved Substitution bliver Tallet forandret, men dog ligestort. De 3 Grundregningsarter er da: Addition, Substitution, Subtraction.

Substitution er en af de allerfrugtbareste Operationer i hele Analysen. Den giver et Udtryk en bedre Form, f. Ex.: vil jeg udvikle y^m i en Række, sætter jeg $y = (a + x)$ eller vil jeg udvikle log y i en Række sætter jeg $y = (1 + x)$ for at udvikle i Række kan man sætte $y = ((y + a) - a)$. (Laplace prob. pag. 13. 39. 44) ligeledes $h^n = (\log (1 + e^h - 1))^n$ (Lacroix p. 562) for $y = a^x$ sættes $y = \left[(1 + a - 1)^n \right]^{\frac{x}{n}}$ v. Lagrange th. desfonct. pag. 31. disse udvikles efter Potenserne af $e^h - 1$ og $a - 1$. Ligeledes kan man til andet Brug sætte: $t^m t^{n-m}$ for t^n. Lacroix. 615. og $\frac{na}{a}$ for n for at give Udtrykket en passende Form til en Integration par parties, o. a. d. Ved Substitution faaer en Æqvation forskjellige Former, hvorved de faaer Lighed med visse Grundformler og behandles som disse.

Substitution af $y = e^{\int pdx}$ gjør vigtige Tjenester. (Schmidtens Recherches sur le calcul integral). Det at forstørre alle Leddene i en Æqvation f. Ex. ved at multiplicere dem, synes at være en unødvendig Operation, men derved antager Æqvationen en bedre Form, eller Leddene en bedre Relation til hinanden svarende til een eller anden Hensigt. Saaledes multipliceres alle Leddene i en Diff. Æq. $Pdx + Qdy = 0$ med en Multiplicator m for at gjøre den integrabel; ja om endog eet eneste Led kunde faae en god Form ved denne Operation, maatte man jo foretage den.

Tilvæxt til en Størrelse er enten en Differenz eller Differen-

tial; naar Differenzen bliver uendelig lille, gaaer den over til at blive Differential. (Denne Overgang findes hos Laplace prob. pag. 54. 40. 47. o. fl. St.)

No. 2.

Med Hensyn til den logiske Qvantitet haves generelle, specielle og individuelle Udtryk. Hertil hører Brugen af Bogstaver: $x + y$ er generelt, $7 + 9$ individuelt og specielt er et Udtryk som kun kan have et indskrænket Antal Værdier f. Ex. Vegas log. trig. Tafeln. 2 Deel pag. 298. No. 40. Der skal p være et heelt Tal i Formlen for $\int x^m \, d\,x\,(a + bx^n)^p$ Ligeledes pag. 301. No. 58. der skal m være et heelt Tal i Formlen for $\int \frac{dx}{(a + bx^2)^m}$.

Naar jeg har $x^2 + y^2 = z^2$ og tillægger x, y, z alle Værdier, saa ere disse Størrelser generelle, men siges der at x, y, z skal være hele Tal, saa hører dette til den diophantiske Analysis; Opløsningen er:

$$x = 2\,pq. \qquad y = p^2 - q^2 \qquad z = p^2 + q^2.$$

Hvor p, q er ligeledes hele Tal, men vilkaarlige. Denne Analysis findes afhandlet i de 2 Hovedværker: af Legendre: Essai sur la theorie des nombres, og af Gauss: disqvisitiones arithmeticæ. Denne Analysis behandler lutter specielle Udtryk.

Ligeledes er $y = + \sqrt{ax}$ et specielt Udtryk, naar man vilkaarlig bestemmer at y skal være positiv. Den Art Bestemmelse forekommer i nogle Arter af Calcul.

Grændse Bestemmelser (*limites*) indskrænke Værdiernes Antal; sætter jeg $y = ax + b$, saa er dette Æqvationen for en ret

Linie, og den er uendelig til begge Sider; men bestemmer jeg vilkaarlig at Grændserne for x ere $x = o$ og $x = m$ saa er $ax + b$ et specielt analytisk Udtryk, og ikke længere generelt. Sættes $x = 8$ og $a = 2$ og $b = 7$ saa haves et individuelt $y = 23$. De bestemte Integraler ere specielle Udtryk, f. Ex.: $\iiint \frac{K.\ dxdydz}{r}$ hvor $r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$

$$\text{limites} \begin{cases} z = o & y = o & x = o \\ z = \varphi\ (x, y) & y = m & x = r \end{cases}$$

De specielle Udtryk kan være *valores discreti* (*discontinui*) eller *continui*; de første have kun visse Værdier som ikke ligge ved hinanden (ere contigui) de andre har en Række af contiguerlige Værdier, som standser; til disse høre de limiterede Udtryk; saaledes er $x =$ Rødderne af Æqvationen $x^3 + ax^2 + bx + c = o$ discrete, men $y = \sqrt{ax - x^2}$ er continuerlig; det er en limiteret Størrelse. Ligeledes sin. φ. Den kan voxe fra o til Radius, og det uden Spring, men ikke over den Grændse. Derimod har x i fornævnte Æqvation kun 3 Værdier og ikke flere, og de ere adskilte fra hinanden ved Mellemværdier.

Udtrykket for y er limiteret med Hensyn til x men med Hensyn til en Coordinatvinkel m ved Centrum af Cirklen er y periodisk; man har nemlig $y = r.\ \sin.\ m$.

Log x og e^x ere generelle. Disse kunne vi kalde fortløbende Funktioner til Forskjel paa sin. m som er periodisk.

Generelt Udtryk bliver specielt eller endog individuelle ved

flere Æqvationers Tilkomst: $ax + by = m$ her er x generel men i $\left.\begin{array}{l} ax + by = m \\ cx + hy = n \end{array}\right\}$ er x individuel; og deri bestaaer Forskjellen mellem det algebraiske x og det analytiske x, hiint er specielt, dette generelt.

No. 3.

Med Hensyn til Formen har vi og generelle og specielle Udtryk; ved Substitution blive de specielle. e^x er generelt men e^{Spdx} er specielt. $y = \varphi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ er saa generelt, at det indbefatter alle Funktioner. Er Coeff. gandske ubestemte saa er $\varphi(x)$ en vilkaarlig Funktion, en saadan, som forekommer ved de partielle Diff. Æqvationers Integration; (en saadan Substitution anvender Laplace i sin Integration af de part. Diff. Æqvationer af 2den Orden, som ikke kan integreres i Termini finiti, om jeg mindes ret i mem. de l'acad. des sciences Ao. 1777) ere Coeff. $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6} \ldots$ saa er $y = e^x$ ere de: $0, 1, \div \frac{1}{2}, + \frac{1}{3} \ldots\ldots$ saa er $y = \log(1 + x)$ ere de $0, 1, \div \frac{1}{6}, + \frac{1}{120} \ldots$ saa er $y = \sin. x$ &c.

N. 4.

I Anledning af disse specielle Udtryk kunne vi bemærke følgende. Der gives i Geometrien kun 2 Slags Curver, som kan udtrykkes analytisk, 1) de, hvis Grene ere uendelige, og 2) de, hvis Grene løbe i hinanden, saa at de indslutte et Rum, altsaa med uendelige og med tilbageløbende Grene. Den rette Linie, Parabel, Hyperbel, Cissoide, Spiral høre til det ene Slags, Cirkel, Ellipse til det andet; en Linie dannet som et C kan efter vor nærværende Charachteristik ikke udtrykkes ved nogen analytisk Æqvation, der maa Grændsebestemmelser til. Ligeledes maae vi bemærke, at sam-

mensatte Curver (f. Ex. hvis ene Bue er en elliptisk Bue, den næste Bue cirkulær, det næste Stykke Bue parabolisk) har heller ikke Æqvation. Laplace indrømmer dog Muligheden af slige Æqvationer (prob. 79).

No. 5.

Angaaende Begreberne Eenhed, Fleerhed og Alhed, saa maae vi adskille den absolute Eenhed fra den relative. Den absolute Eenhed i Mathematiken er o, Fleerhed er Tal, Alhed er ∞.

Nul frembringer (skaber) paa eengang alle Tal ved at gjentages uendelig mange Gange.

Denne saare vigtige Sætning er udtrykt saaledes: $o \frac{1}{o} = o \infty = x$ eller $\frac{o}{o} = x$. Herpaa beroer *Methodus limitum*, som udgjør det sande Fundament for Differentialregning. Antag $u = ax^2$. Sætte vi $x + h$ for x saa forandres u og vi vil kalde dens forandrede Værdie u', man faaer $\frac{u' - u}{h} = 2ax + ah$ nu antage vi h at aftage og omsider blive $= o$, da vil $\frac{u' - u}{h}$ nærme sig til, og omsider blive $= 2ax$, men naar $h = o$ saa er $u' = u$ og man har $\frac{o}{o} = 2ax$. Denne Størrelse er limiten eller Grændsen, hvortil hiin Brøk nærmer sig. Denne Foresillingsmaade findes hos Euler og hos Lacroix o. fl.

Den relative Eenhed er 1, den producerer og alle Tal ved at gjentages, men succesive. Ligeledes hører herhen Differential og Integral seet fra den sædvanlige Synspunkt, som det uendelige smaae og Summen af uendelige mange uendelige smaae Dele; Differentialet er Eenhed og Integralet er Alhed.

I Anledning af det uendelig smaae, erindre vi 2 Bemærkninger, som ere af Vigtighed i Calculens Metaphysik: 1) en uendelig

liden Deel af en uregelmæssig Størrelse er regelmæssig; saaledes en uendelig lille Deel af en krum Linie er ret; en uendelig lille Deel af en ueensformig Bevægelse er eensformig. Denne saare vigtige Sætning kan kaldes Grundsætningen for hele den høiere Mathematik; den gjør Overgangen fra den elementaire til den høiere mulig; thi den elementaire afhandler det regelmæssige, den høiere det uregelmæssige; altsaa kan den elementaire Mathematiks Sætninger anvendes paa de uendelig smaae Dele af de til den høiere Mathematik hørende Størrelser; saaledes overføres Formlen $c = \frac{s}{t}$ i den regelmæssige Bevægelse til $c = \frac{ds}{dt}$ i en ureglmæssig Bevægelse. Saaledes anvendes det pythagoriske Theorem paa de uendelige smaae retvinklede Triangler ved en Curve, saa at vi har $ds^2 = dx^2 + dy^2$ som tjener til Curvens Rectification. Ved en Bevægelse, hvis accelererende Kraft er variabel, tænke vi os den i et Element af Tiden, dt at være constant og overføre Formlen $v = gt$ derpaa og har Hastighedens Differential at være $= Pdt$ naar vi kalde Accelerationen P, nu er tillige dette Differential $= d\frac{dx}{dt}$ altsaa har vi $d\frac{dx}{dt} = Pdt$ hvilket er Grundformlen for et Punkts Bevægelse parallel med Coordinaten x.

2) Uendelig smaae Størrelser af 2den Orden falde bort imod dem af 1ste Orden, og disse igjen imod uendelige Størrelser. Naar f. Ex. $a + \alpha = A$ og α er uendelig lille, saa faae vi $a = A$, ligeledes falder α^2 bort mod α. —

No. 6.

Angaaende limites erindres, at enhver Ting ialmindelighed som Størrelse i Særdeleshed ved at komme til en Grændse gaaer over i en anden Klasse af Ting eller Størrelse. En Linie bliver til Punkt,

en Flade til Linie, en Sekant til en Tangent. I Tilfælde af limites bliver en eller anden Størrelse $= 0$ eller uendelig. F. Ex. naar en Ellipses Eccentricitet bliver $= 0$, saa bliver Ellipsen til en Cirkel. Hertil hører iblandt andet de algebraiske Størrelsers Overgang til transcendente, f. Ex. $\left(1 + \frac{y}{a}\right)^a = 1 + \frac{ay}{1.a} + \frac{a(a-1)y^2}{1.2.a^2} + \ldots$; bliver til e^y ved at sætte $a = \infty$.

Denne Overgang fra en Klasse til en anden igjennem en Grændse finder Sted i Physiken. Vor berømte Örsteds navnkundige Forsøg har beviist at Magnetisme er Galvanismens limite. Ja dette har jo Sted ved en Strængs Svingninger der blive saamange, at de kan ikke tælles mere, de gaae da fra Qvantitet til Qvalitet og blive til Tone. Ligeledes med Farverne der er Totalindtrykket af Öjenervernes Svingninger. Ja af denne Grundsætning kan vi udlede denne: Naar en Qvantitet hører op at være Qvantitet, saa bliver den Qvalitet, og denne Sætning kunne vi statuere som Princip for en Pananalysis d. e. en analytisk Anskuelse af hele Naturen. Mere herom i min udvidede Udgave af Naturens System underkastet Analysis. — Her er det Stedet at advare for de Paralogismer, som man saa saare let er udsat for, naar 0 eller ∞ indfinde sig i Calculen; thi netop fordi 0, eller ∞ ere ved Grændsen hvor alle Forandringer skeer, maae man være meget vaersom ved disse Metamorphoser, og hvad der gjelder om Tal, gjelder ikke altid om 0 eller ∞ der ikke er Tal. Et Par Exempler vil forstærke Vægten af dette *monitum.* Lad os i Bevægelses Geometrien (en Anskuelse af Geometrie, hvorved vi tænke os Figurerne bevægelige og seer de mange Former som Størrelser samt Sætninger antager) tænke os en Triangel med sine 3 Vinkler, der tilsammen ere 2 Rette. Nu bevæger sig den ene Side ved at dreie sig om Toppunktet, indtil

den bliver parallel med Basis, da bliver den ved samme bevægede Side hosliggende Vinkel $= 0$, og vi har Sætningen om de 2 indvendige Vinkler ved parallelle Linier der ere $= 2$ Rette. Lad os tænke os Trianglen igjen, men bevæge samme Side som før til den anden Side til den coinciderer med den anden Side som gaaer igjennem Toppunktet, da bliver Vinklen ved Toppunktet $= 0$ og Vinklen ved den bevægede Side er rykket frem og bleven Nabovinkel til den anden Vinkel ved Basis, og vor Sætning om de 3 Vinklers Sum i en Triangel er forvandlet til Sætningen om Nabovinkler der ere 2 Rette. Bevægelses Geometrien viser os paa lignende Maade Identiteten af de Sætninger om Vinklerne ved Cirklen. Dersom man nu analog hermed vilde slutte: Tyngdepunktet af en ligebenet Triangel ligger i den Perpendiculær, der trækkes fra Toppunktet ned paa Grundlinien, $\frac{2}{3}$ af samme fra Toppunktet; nu bevæge sig begge de ligestore Sider med eens Hastighed mod hinanden, Tyngdepunktet forbliver hvor det var, nu smelter de 2 Sider sammen med Perpendikularen, altsaa er Tyngdepunktet af en ret Linie $\frac{2}{3}$ fra det ene Endepunkt; dersom vi slutter saaledes, siger jeg, saa slutter vi feil, thi før var Talen om en Flade, men den er forvandlet til en Linie. Vi maae søge Liniens Tp. af Tp. for Perimeteren af Trianglen; thi den er ogsaa en Linie. Kalde vi Trianglens Siders Sum s, Basis b, Perpendikularen p, saa er Tps. Afstand fra en parallel med Basis og midt igjennem Perpendikularen trukken Transversal $= \frac{bp}{2s}$ sætte vi her $b = 0$, saa bliver denne Afstand $= 0$ og Tp. ligger i Midten af Perpendikularen.

Ligeledes at $a^0 = 1$ skulde man ikke faae ud af Definitionen af en Potenz Exponent; thi sættes a Nul Gange som Faktor faaes intet. Ligeledes: vi veed at $\int x^m dx = \frac{x^m + 1}{m + 1}$ sættes $m = \div 1$

haves $\int \frac{dx}{x} = \frac{x^0}{0}$ som ikke er ∞ men log x. Hvem skulde troe, at $\left(1 + \frac{y}{a}\right)^a$ for $a = \infty$, er $= e^y$?

---

§ 2. *Qvalitet.*

Tal ere enten positive eller negative; det der forener disse 2 Slags er o. I den forrige Kategorie forekom den som Skaber af alle Tal, her forekommer den som Symbolet paa Kjerligheden, der indeholder Identiteten af Modsætninger. Her har vi altsaa en complet Trinitet: det positive, negative og o, eller og positiv, negativ ∞; thi ogsaa ∞ er paa eengang $+$ og $\div$ hvilket man iblandt andet kan see af Tangentens Voxen og Aftagen; thi den $= \frac{\sin. m}{\cos. m}$ hvilken for 90° bliver ∞ og gaaer fra $+$ til $\div$.

Et mærkeligt Exempel herpaa kan jeg ikke undlade at fremsætte; det kan tillige tjene som et lille Exempel paa Analysens Symbolik: vi tænke os et Punkt tiltrækkes af et andet; deres Distance være r. Vi har $\frac{d^2r}{dt^2} = \div \frac{1}{r^2}$. Kraften er Attraction og formindsker Retningen derfor $\div$ den giver integreret følgende: $t = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(a. \text{Arc. sin. } \sqrt{\frac{r}{a}} - \frac{a\pi}{2} - \sqrt{ar - r^2}\right)$, hvilket viser, at Punktets Bevægelse er oscillatorisk; Oscillationstiden er $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a\pi$. Størrelsen a er Distancen i Bevægelsens Begyndelse, da Tiden $t = o$ og π er Halvcirklen for Radius $= 1$. Punktet vil bevæge sig til det tiltrækkende Punkt og stødes tilbage, og atter trækkes til. Dette er conform med Udtrykket for Kraften; naar nemlig $r = o$ er $\frac{d^2r}{dt^2} = \infty$, og nu gaaer den over til $+$ og bliver Repulsion.

Dette er et Corollarium af den planetariske Bevægelse, naar man sætter Eccentriciteten $=$ den halve Storaxe, saa er Ellipsen en ret Linie. Laplace (Mec. cel. 1ste Deel pag. 214) har Omløbstiden i Ellipsen $= \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$ hvori μ er Summen af Planetens og Solens Masse. Ved at tage Hensyn paa Massen vil vi faae $\frac{d^2r}{dt^2} = \div \frac{\mu}{r^2}$ altsaa sætte $\mu = 1$ og bemærke, at Laplaces a er den halve Storaxe, vort a den hele, og vi har Harmonie i disse 2 Oscillationstider.

Et Differential dx er negativ, naar Størrelsen x aftager; positiv naar den tiltager; den er o, naar Størrelsen x er constant. Derpaa beroer Reglerne for at finde maximum og minimum. Derpaa beroer og den Regel i den høiere Mekanik, at Kraftens Udtryk $\frac{d^2x}{dt^2}$ er positiv, naar Retningen formeres, og negativ, naar den formindskes.

Et positivt Udtryk kan blive negativ, ved at flytte den paa den anden Side af Lighedstegnet, eller ved at multiplicere hele Æqvationen med $\div 1$.

---

§ 3. *Relation.*

No. 1.

Her betragter man Tallenes Forhold til hinanden indbyrdes.

- En Størrelse er med Hensyn til *Relation*
  - selvstændig
    - uafhængig af os: Constant, som π, g = $15\frac{5}{8}$ Fod.
    - afhængig af os
      - bekjendt
        - vilkaarlig Constant, ved Integration.
        - variable independante.
      - ubekjendt indeterminata ubestemt.
  - afhængig
    - afhængig Funktion af andre Størrelser
      - uafhængigaf os: variable principale
      - afhængig af os vilkaarlig Funktion ved par Dif. Æqv.
    - afhængig af andre Funktioner.
      - fonctions generatrices
      - fonctions derivees (Lagrange) ikke Laplaces.

positiv Ordens Ex. $\frac{dx}{dt}$ negativ. $\int x dt$

No. 2.

Ved at betragte en Constant som variabel opstaaer Begrebet Variation, eller ved successive at forandre en Funktion til en anden. Æqvationen for Ellipsen regnet fra det ene Apsidepunkt er $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2)$, forandres c og bliver større, saa bliver c tilsidst $= a$ og Ellipsen er forvandlet til en Cirkel; thi da bliver Faktoren som multiplicerer Parenthesen $= 1$.

Dette at ansee en constant som variabel, er et Kunstgreb, som bruges ved flere Leiligheder, f. Ex. til at finde de particulære Solutioner, d. e.: de Integraler, som vel fyldestgjøre en Dif. Æqvation, men ikke findes i det complette Integral. Man differentierer dette saaledes, at man anseer x, y, og Constanten c for variable, reducerer dette Differential til at have samme Nævner ifald der er Brøker, sætter Coëfficienten til $dc = 0$ og udleder af denne Æqvation en Værdie for c, der substitueret ind i det complette Integral giver en solution particulaire. Sæt det complette Integral at være $U = 0$ saa vil det differentieret have denne Form: $Mdx + Ndy + Pdc = 0$, og $P = 0$ og $U = 0$ vil ved Elimination af c give solution part.

Det samme Artificium bruger Monge til at integrere de Æqvationer, som ikke fyldestgjøre Integrabilitets Conditionerne. Han er den Første som har viist, at disse Æqvationer har Mening, da man før ansaae dem for absurde.

Naar nemlig $Pdx + Qdy + Rdz = 0 = T$ ikke kan integreres ved een Æqvation, saa integreres $Pdx + Qdy = 0 = V$ og z antages constant, vi faaer $U = C$ nu antages C variabel og som Funktion af z og vi differentiere og faae $\left(\frac{dU}{dx}\right) dx + \left(\frac{dU}{dy}\right)$

$dy + \left(\frac{dU}{dz}\right) dz = \left(\frac{dC}{dz}\right) dz$. Kaldes den integrerende Factor til V, μ saa multipliceres T med μ og sammenlignes med Dif. Æq. for U og vi har $\left(\frac{dC}{dz}\right) = \left(\frac{dU}{dz}\right) - \mu R$ følgelig vil $T = o$ have følgende Æqvationssystem til Integrale: $U = \varphi(z)$ og $\frac{dU}{dz} \div \mu R = \varphi'(z)$ (Lagr.) Hovedsætningerne ved Variationscalculen ere: $\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{du}{dx}$; $\delta d_n y = d^n \delta y$; $\delta \int U = \int \delta U$. (See min Dynamik pag. 79. Fuldstændig Udvikling af denne Calcul findes hos Lacroix i hans Traité du calcul diff. et int. Kortere i hans Traité elementaire.)

No. 3.

Bestemmelsen af den constante ved Integration er af stor Vigtighed; saaledes kan constante hæve umulige Størrelser, sæt at $t + ax^2 = \log \sqrt{-(x + a)} +$ Const. er et Integral og at naar $x = o$ da er $t = o$, saa har man: Const. $= \div \log \sqrt{-a}$ og $t + ax^2 = \log \sqrt{-(x + a)} - \log \sqrt{-a} = \log \frac{\sqrt{-(x + a)}}{\sqrt{-a}} = \log \sqrt{\frac{x + a}{a}}$ da $\sqrt{-a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a}$ og ligesaa den anden Rod $= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{x + a}$ de imaginære $\sqrt{-1}$ vil hæve hinanden i Tæller og Nævner.

Man kan ikke bestemme noget om et Integral førend man har bestemt Constanten. F. Ex. af $\frac{d^2 r}{dt^2} = \div \frac{1}{r^2}$ faaer man ved Integration $\frac{dr^2}{dt^2} = C + \frac{2}{r}$ hvoraf igjen $dt = \frac{r^{\frac{1}{2}} dr}{\sqrt{Cr + 2}}$. Integrerer man denne, faaes et logarithmisk Integral og man troer at Bevægelsen, hvortil hiin Differentialformel for Kraften hører, er fortskridende, men bestemmes Constanten saaledes, at Hastigheden er o for $r = a$ saa bliver $C = -\frac{2}{a}$ og man faaer et trigonometrisk Integral som giver en oscillerende Bevægelse. Vel sandt, man kunde gjerne

siden substituere Constantens Værdie, hvilket vilde give en imaginær Logarithme, som igjen kunde reduceres til et reelt trigonometrisk Integrale, men hvorfor to Operationer for een?

No. 3.

Angaaende den Maade, hvorpaa de deriverede Funktioner gaaer frem ere Funktionerne e^x og sin x mærkværdige. Den første fordi alle dens deriverede Funktioner ere eens; den anden fordi de ere periodiske, nemlig naar $e^x = y$ saa er $y = y' = y''$, men for sin $x = y$ er $y = - y'' = + y^{IV}$ &c. Dette gjelder og om Integration par parties $\int e^x dx. \sin. x = e^x. \sin. x - \int e^x \cos x. dx$. Derpaa grunder sig et Artificium af Laplace, hvorved han finder et bestemt Integrale (Integrale definie) ved en partiel Differentialæqvation. (See Lacroix pag 617). Det samme er Tilfældet med cosx dens deriverede Funktioner blive og eens hveranden Gang, men med modsat Tegn.

De deriverede Funktioner af x^m aftager ihenseende til Exponenten m, derimod voxer Exponenten af $\int x^m dx$. Det er vigtig at lægge Mærke til det Forhold der er imellem X og $\int Xdx$ for at integrere par parties; der er nemlig en stor Mængde Integrationer, der udspringe fra denne saare generelle Formel: $\int XYdx = X\int Ydx - \int dX. \int Ydx$.

No. 4.

Variables independantes maa undertiden transformeres for at give Æqvationen en anden Form. Saaledes reducerer Laplace den partielle Diff. Æq-. af 2den Orden til en meget simplere ved føl-

gende Transformation: bruge vi Lagranges Betegnelse, saa er den generelle Form for part. Dif. Æqv. af 2den Orden denne; hvori vi antage $z = f(x,y)$ $o = f''(x) + \alpha . f''(x,y) + \beta . f''(y) + \gamma . f'(x) + \delta . f'(y) + \lambda . z + T$. Nu antages nogle nye variable π, θ som Funktioner af x,y og ved Substitution af saadanne Udtryk som dette: $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{d\pi}\right)\left(\frac{d\pi}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$ og andre for de øvrige Differentialcoëfficienter, haves denne reducerede Formel, hvor vi antage $z = F(\pi,\theta)$: $o = M . F''(\pi,\theta) + N . F'(\pi) + L . F'(\theta) + Rz + t$. De nye variable bestemmes af følgende Æqvationer: $o = \left(\frac{d\pi}{dx}\right)^2 + \alpha . \left(\frac{d\pi}{dx}\right)\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + \beta . \left(\frac{d\pi}{dy}\right)^2$ og en lignende for θ. Dette beroer paa det Artificium, at man for at transformere en Æqvation til en simplere frembringer ved Substitution (eller ved Indførelse af en ubestemt Størrelse) en anden Æqvation, som man deler i 2 eller flere hvoraf den ene Deel er den transformerede og de andre ere Conditionsæqvationer, som indeholder Betingelser for de i Æqvationen forekommende Størrelser.

No. 5.

Variables independantes transformeres i den høiere Mekanik for at bestemme den af det bevægede Punkt beskrevne Curve. Tænke vi os en Bevægelse i en Linie af enkelt Krumning (simple courbure) da ere Æqvationerne for denne Bevægelse: $x'' = P$ og $y'' = Q$ hvor x'' og y'' ere efter Lagranges Betegnelse Diff. Coëf. af 2den Orden, som refereres til variable independante t eller Tiden. Elimineres t udaf disse Æqvationer, saa har vi en Æqvation med x,y, som vil give os Æqvationen for den krumme Linie som Punktet beskriver, og da maae vi antage x som variable indep. Til denne

Transformation giver Lagrange (Theorie des fonct. pag. 332. No. 16 og 82 No. 50) følgende Reductionsformler:

$$y' = (y')\, x'$$
$$y'' = (y')\, x'' + (y'')\, x'^2$$
$$y''' = (y')\, x''' + 3\,(y'')\, x'\, x'' + (y''')\, x'^3$$

hvoraf man kan finde (y') og (y'') og (y'''); disse i Parenthese indsluttede Different. Coëf. refereres til var. indep. x, de andre til t, f. Ex. $(y') = \frac{dy}{dx}$ men $y' = \frac{dy}{dt}$.

No. 6.

Coordinaternes Transformation hører herhen, den bruges til enten at simplificere et Udtryk f. Ex. for deslettere at kunne integrere, eller og for i Geometrien at opdage andre Relationer mellem de ved en Curve forekommende Størrelser; altsaa har denne Transformation enten en analytisk eller geometrisk Nytte; saaledes seer man ofte at de orthogonale Coordinater forandres til polaire, f. Ex. i Astronomien til Bestemmelse af Anomalierne. Da saadanne Transformationer ere bekjendte af Lærebøgerne, forbigaaer jeg de derhen hørende Formler; men jeg kan umulig forbigaae at gjøre opmærksom paa den særdeles elegante Transformation til polaire Coordinater, som Laplace har i sin mec. celeste. 2den Deel pag. 3, for at simplificere Differential Udtrykket for en Spæroides Attraction. Hans Artificium er in nuce følgende: for at forvandle et Udtryk af denne Beskaffenhed $\iiint X dx dy dz$ til denne Form $\iiint \beta . \beta' . \beta'' . P . dp dq$ dr. hvor X er Funkt. af x,y,z., men P af p,q,r sættes

$x = \varphi\ (y,z,p)$ videre sættes $dx = \beta .\ dp$

$y = \chi\ (z,p,q)$ $\qquad dy = \beta' .\ dq$

$z = \Pi\ (p,q,r)$ $\qquad dz = \beta'' .\ dr$

β faaer ved at differentiere x saaledes, at y,z antages constant; β' ved

at different. y saaledes, at z,p er const. β'' ved at different. z saaledes, at p,q antages const.; nu er ialmindelighed $dx = \left[\frac{dx}{dp}\right] dp + \left[\frac{dx}{dq}\right] dq + \left[\frac{dx}{dr}\right] dr$ og lignende for dy og dz; dersom man lader disse Formler for dx fyldestgjøre hine Betingelser, saa faaer man Æqvationer til at bestemme Coeff. β, β', β''. f. Ex. for at finde β' skal z og p være constante følgelig haves:

$$\left.\begin{aligned} dy &= \left[\frac{dy}{dq}\right] dq + \left[\frac{dy}{dr}\right] dr \\ o &= \left[\frac{dz}{dq}\right] dq + \left[\frac{dz}{dr}\right] dr \end{aligned}\right\}$$

heraf elimineres dr og vi har $dy = \beta'.\ dq$.

No. 7.

De independente variable blive Funktioner af hinanden ved at der kommer en ny Æqvation til, f. Ex. i denne: $z = ax^2 + by$ er x,y independante, men føie vi denne til: $z = m.\ \sin.\ x - b.\ \log y$, saa ere x,y Funktioner af hinanden.

En variable kan forsvinde af Calculen, enten ved at den selv bliver $= o$, eller ved at dens Coefficient bliver $= o$, eller at den hæves af en modsat ligestor Størrelse, eller af en Divisor naar den er Faktor.

No. 8.

Naar m og r ere ubestemte i denne Æqvation $Am + Br = o$ d. e. naar dem kan tillægges hvilkensomhelst Værdie, saa er $A = o$, $B = o$. Omvendt: naar $\left.\begin{aligned} A &= o \\ B &= o \end{aligned}\right\}$ er 2 Betingelser, som bestaae paa eengang, saa kan jeg multiplicere 1ste med m, anden med r (hvor m, r ere ubestemte) og jeg har $Am + Br = o$.

No. 9.

Den vilkaarlige constante ved Integration kan gives forskjellig Form, som kan passe med de Operationer, som man vil foretage; man kan samle flere Constanter til een eneste. Naar den constante kommer i Selskab med Logarithmer kan man give dem en logarithmisk Form. F. Ex. naar jeg faaer ud at $\log u = c$ saa kan jeg sætte $\log u = \log c$ hvoraf faaes $u = c$, eller om jeg har $\log u + c = \log b$, saa kan jeg sætte $\log u + \log c = \log b$ hvoraf haves: $uc = b$.

Ligeledes kan den vilkaarlige Funktion ved Integrationer antage mange Former; saaledes kan 2 samles i een: f. Ex. $\varphi(x) + \psi(x)$ til $\Pi(x)$. Den kan forbindes med Dele af Æqvationen, som har samme Form, f. Ex.: af $x^3 + ax^2 + \varphi(x^2) = 0$ faaes: $x^3 + \varphi(x^2) = 0$. Ogsaa denne kan gives i logarithmisk Form eller en anden Form passende med vor Hensigt.

No. 10.

En constant elimineres ved Hjelp af Differentialligninger eller og ved deriverede Funktioner, f. Ex. naar man har $\varphi(x,y,a,b) = 0$ og jeg vil eliminere a, b saa sφges $d\varphi(x,y,a,b) = 0$ og $d^2\varphi(x,y,a,b) = 0$ udaf disse 3 Æqvationer kan a, b elimineres og man faaer en total Diff. Æq. af 2den Orden, som ikke indeholder a, b. Den gjentagne Differentiation tjener til at elimincre Differentialer og andre Størrelser. Derpaa beroer Lexells Integrationsmethode i Nova acta petrop. 1777.

Af Æqvationerne
$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & d^2x + \alpha dx + \beta dy + \gamma x + \delta y = 0 \\ \text{II.} & d^2y + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' x + {}'y = 0 \end{array}\right\}$$
(hvor α, β, α', β' &c. ere constante) vil han frembringe en Æqvation blot med x altsaa skal alt det som refereres til y elimineres;

ved at differentiere faaes: III, IV med d^3x og d^3y og V, VI med d^4x og d^4y. Vi har 6 Æqvat. til at eliminere 5, nemlig y, dy, d^2y, d^3y, d^4y, han eliminerer ved Hjelp af ubestemte Coefficienter: sæt $V + \lambda . IV + \mu . III + \nu . II + \rho . I. = o$ saa faaes en Æqvation, hvor Coëff. til y, dy &c. sættes $= o$ og man faaer en Æqvation af 4de Orden med Hensyn til x allene, og desuden nogle Conditions Æqvationer til Bestemmelsen af de ubestemte Coëff. λ, μ &c. Derved er de variable skilte fra hinanden og man kan integrere separement (ikke conjointement).

No. 11.

Man har forskjellige Arter af Funktioner og Æqvationer; thi de Udtryk hvoraf en Æqvation bestaaer, kan paa mange Maader dependere af hinanden. En *identisk* Æqvation er den, hvis 2 Leed ikke ere forskjellige uden i den Maade, hvorpaa de ere udtrykt analytisk; de identiske Æqvationer bestaaer i hvilken Værdie man end giver x; altsaa er x ubestemte i disse, og Coeff. til de ligestore Potentser af x kan sættes ligestore, f. Ex. naar $a + bx + cx^2 + \ldots$ er identisk $= A + Bx + Cx^2 + \ldots$ saa er $a = A$, $b = B$, $c = C$ &c. Dette bevises saaledes: da x kan gives hvilkensomhelst Værdie, saa sæt $x = o$ og vi har $A = a$, subtraher saa er $bx + \ldots = Bx + \ldots$ divider med x og sæt $x = o$ saa er $b = B$. $y = \varphi(x)$ er en *explicite* Funktion af x, men naar $\varphi(x,y) = o$ saa er y en *implicite* Funktion af x. Her er y blandet med x, men ved det første Tilfælde er y adskilt fra x.

Anm. Algebra gaaer ud paa at explicere en implicite Funktion. Analysis søger Funktionslove. Tal Arithmetiken reducerer sammensatte Tal-Udtryk til et enkelt.

Er Leddene af en Række afhængige af een eller flere af de foregaaende Led, saa er det en *recurrentisk* Series. $l^{(n)} = a\, l^{(n-1)}$

$+ b. l^{(n-2)}$ er Udtrykket for det nte Led i en saadan Række. (n), (n—1) ere Ordens Exponenter ikke Potenz Exponenter. Bliver et Udtryk uforandret ved at ombytte x og y saa er det en *symmetrisk* Funktion, som xy eller $x^2 + y^2$.

Homogene Funktioner ere de, hvor Exponenternes Summer i alle Led ere ligestore, $x^2 + 2xy + y^2$. Undertiden udtrykkes Leddene i en Række recurrentisk (involutorisk) for at see Loven for Rækken lettere, eller og for den numeriske Beregnings Skyld, der dermed bliver lettere f. Ex. sæt $a + b = P + PQ$ saa er Binomialformlen denne: $(a + b)^m = \overset{A}{P^m} + \overset{B}{mAQ} + \ldots$ ligeledes sinvers $x = \overset{A}{\frac{x^2}{1.2}} - \overset{B}{A.\frac{x^2}{3.4}} - B.\frac{x^2}{5.6}$ ligeledes Udtrykket for π hos Vega (log. trig. Taf. 1ste Deel pag. 408). Istedenfor at et Led eller en Deel af en Række eller Æqvation kan dependere af eet eller flere andre, saa kan det og dependere af det hele Udtryk, og man har da et eget Slags *involutoriske* Formler som hos Schmidten i hans Recherches sur le calcul integ. pag. 5. nemlig $y = a + \int pydx$, i det sidste Led substitueres bestandig det hele Udtryk for y og man faaer: $y = a\,(1 + \int pdx + \int p \int pdx^2 + \int p \int p \int pdx^3 + \ldots)$ der er Integralet af $\frac{dy}{dx} - py = 0$.

Man betragter og det Hele og en Deel i Forhold til hinanden ved Laplaces fonctions generatrices. Naar u er $= \varphi\,(t)$ og u er udviklet i en Række: $u = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots\ldots y_x t^x$ saa er u eller $\varphi\,(t)$ en fonction generatrice af y_x.

Laplace har opfunden en meget elegant Regning med disse, og den er meget frugtbar paa Anvendelser. Denne Regning findes udviklet i hans Theorie des probabilités.

§ 4. *Modalitet.*

Hertil hører det Forhold hvori Størrelserne staae til vor Tænkning baade i og for sig selv, og formedelst deres Tegn.

- **No. 1. En Størrelse er med Hensyn til *Modalitet***
  - strid-nde mod vor Tænkning (imaginær $\sqrt{-1}$)
  - i Harmonie med vor Tænkning.
    - ubekjendt for os
      - fordi den endnu *ikke er* bestemt
        - vi *vil* ikke bestemme den indetermine
        - vi *har* ikke bestemt den (x i Algebra)
      - fordi der *ikke kan* bestemmes (ir rational $\sqrt{3}$)
    - bekjendt.
      - bestemt (a i Algebra)
      - bestemmelig (rational. $\sqrt{4}$)

- **Med Hensyn til *Charachteristik***
  - algebraisk.
    - finite. $a^2 + b$
    - infinite
      - Rækker
      - Scalar Brøk exponent.
  - transcendent
    - fortløbende
      - logarithme
    - periodisk.
      - trig. Funkt. sin. x
      - Buer arc. sin. (= x)

No. 2.

Umulige Størrelser kan blive mulige, ved at multipliceres eller divideres med et andet umuligt Udtryk. F. Ex. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} \times \sqrt{b}.\sqrt{-1} = -1.\sqrt{ab} = \div \sqrt{ab}$; $2\sqrt{-1}.\sin. b\sqrt{-1} = e^{-b} - e^{b}$; $\cos. (b\sqrt{-1}) = \frac{e^{-b} + e^{b}}{2}$ Undertiden seer et Udtryk umuligt ud, men er dog muligt, fordi de umulige Størrelser hæve hinanden. Ved Jean Parsevals Theorem hæve de imaginære hinanden.

Exponentialstørrelser forandres til trigonometriske og v. v. ved $e^{x\sqrt{-1}} = \sin. x.\sqrt{-1} + \cos x$. Overgang fra exponentielle til logarithme er bekjendt: naar $e^{u} = y$ saa er $u = \log y$. Ethvert Tal kan fremstilles som Logarithme: $u = \log e^{u}$. Et Konstgreb som hjelper ved Integrationen. (Lacroix 579) naar jeg har $\log x + u = c$ sættes $\log x + \log e^{u} = \log c$ hvoraf $x\, e^{u} = c$. Naar $\log u = \log c$ saa er $u = c$.

De logarith. Udtryks Forvandling til trigonometriske og v. v. bruges meget i Integralregningen. (Mayer Hirsch. Integraltafeln giver mange Exempler), følgende generelle Formeler kan bruges dertil: $\log \left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2.\sqrt{-1}.$ Arc. tang. $(= \div\, t.\sqrt{-1})$; Arc. tang. $\left(= \frac{s}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \log (r + s\sqrt{-1})$. Brugen af Exponentialstørrelsen e^{Spdx} gjør en ypperlig Tjeneste i Integralregningen, ofte forekommer den som integrerende Faktor. (Schmidtens Recherches sur le calcul integral pag. 19.)

Vi har seet, hvorledes en logarithmisk Form kan gjøre god Nytte ved Integrationer; det kan paa flere Maader gavne at anvende

Logarithmer, uden just at bruge dem som Form; see Degens Bidrag til det mathem. Studiums Kritik i det Kgl. danske Vid. Selskabs Skrifter 1802. Produktet: P. P.′ P.″ .... forvandles ved Logarithmer til log P + log P′ + ... og der differentieres. Ligeledes Lagranges mec. anal. pag. 494. Differentialet d. (ΔDxDyDz) = o søges logarithmisk; vi har nemlig ΔDxDyDz = Const. altsaa log (ΔDxDyDz) = log Const. = log Δ + log (DxDyDz) og ved Differentiation $\frac{d\Delta}{\Delta} + \frac{d\,(DxDyDz)}{DxDyDz} = o$. Ogsaa de trigon. Funktioner indføres i Calculen f. Ex. ved Æqvationernes Oplösning. Man betragter en Størrelse som en trigonometrisk Funktion af en vis opdigtet Vinkel. (Vegas log. trig. Taf. 2den Deel pag. 283).

No. 3.

Approximatoriske Udtryk kan undertiden forvandles til rigoreuse ved Seriers Summation. Terminus summatorius giver undertiden det strænge Udtryk; men som oftest befordres blot Convergensen ved Summation.

De periodiske Decimalbrøk ere approximerede Udtryk; men de kan blive til nøiagtige Brøk ved at sætte Perioden som Tæller og til Nævner sætte et Tal, hvis Ziffre ere lutter 9 Taller nemlig saamange som der ere Ziffre i Perioden. Dette gjelder nemlig naar Perioden begynder strax ved Kommaet; begynder den længere henne saa deles Brøken i 2 andre en med finite Ziffre, en anden periodisk. Et Udtryk kan synes irrationalt men ikke være det, f. Ex.: $4\sqrt{7} : 2\sqrt{7}$ ligeledes $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$. En Series kan afbrydes: $\frac{m}{a+b} = \frac{m}{a} - \frac{mb}{a^2} + \frac{mb^2}{a^3} - \frac{mb^3}{a^4} + \frac{mb^4}{a^4\,(a+b)}$. Her standses med Villie den succesive (repeterende) Operation og det Övrige føies til, ikke udviklet. Lagrange har denne Formel hvorved en Række

afbrydes: $fx = f. + x f.' + \frac{x^2}{2} f''u$ hvor u er en ubekjendt Størrelse mellem o og x og $f. f.'$ ere Værdierne af fx og $f'x$ naar man sætter $x = o$, det er Maclaurins Række der er afbrudt.

No 4.

Ligesom man kan afbryde en Række saaledes kan man tilføie flere Led og saaledes complettere det approximatoriske Udtryk. Dette kan vi tænke os under følgende Schema $y = a + bxy$ ved at substituere for y haves: $y = a + abx + b^2x^2y$ man vil efterhaanden danne Rækken for denne Brøk: $y = \frac{a}{1 - bx}$. Undertiden kan man have Udtryk, som ved gjentagen Substitution af de mere og mere approximerede Værdier giver strængere og strængere Værdier, f. Ex. af $x^3 + ax^2 + bx + c = o$ haves Roden $x = \frac{2r^3 + ar^2 - c}{3r^2 + 2ar + b}$ hvor r er den approximerede Værdie af x; den giver x een Værdie, denne Værdie af x substitueres for r og giver x derved en mere approximeret Værdie, denne nye Værdie substitueres igjen for r og giver en endnu mere approximeret Værdie for x. (See Vegas log. trig. Tafeln 2den Deel pag. 283). Ved saadan involutorisk Formel udvikles mere og mere nøiagtig Roden af et Tal, nemlig naar Qvadratroden af a er omtrent m, saa at $a = m^2 + r$ saa er det, der completterer denne approx. Værdie $x = \frac{r}{2m + x}$ hvilket ved idelige, succesive Substitutioner giver en Scalar Brøk.

Ogsaa ved Integrationer kan man complettere det approximerede Integrale ved at variere de constante og sammenligne den saaledes erhvervede Æqvation med de givne Diff. Æqv. Saaledes i Perturbationstheorien Æqvationer af denne Art $\frac{d^2y}{dt^2} + P + \alpha Q = o$ (hvor α er en meget liden Størrelse) give for $\alpha = o$ den ellipti-

ske Bevægelse; deraf søges Constanterne og disse varieres og man forbinder disse, derved fremkomme Diff. Æqv. med de givne Perturbationsformler (hvor α ikke $= 0$) (see Laplace mec. cel. 1 Deel 5 Cap. og 8 Cap. Ligeledes Lagrange theorie des fonctions no. 57 pag. 89).

No. 5.

Endelige Udtryk forvandles til uendelige (til Series eller Scalar Brøk) ialmindelig ved repeterende Operationer. Naar samme Opgave fremstiller sig (skjøndt med forskjellige Udtryk) efterat man har opløst den, saa har man en repeterende Operation. Dette vil vi kalde *Methodus repetitionis*, f. Ex. naar jeg dividerer $\frac{2000\ldots}{7000\ldots}$ baade i Tæller og Nævner med 7 saa bliver jeg aldrig færdig, fordi Tælleren har uendelig mange Ziffre og 7 er Primtal til Tælleren. Dividerer jeg $a + b$ ind i m for at finde $\frac{m}{a+b}$ saa faaer jeg strax efter første Operation $\div \frac{mb}{a}$ der skal divideres med $a + b$ og samme Slags Opgave fremstiller sig igjen, men blot under en anden Skikkelse. Dersom jeg bestandig gjentager Operationen med Resten, saa faaes en uendelig Series. De involutoriske Udtryk giver og en Series, f. Ex. $y = a + m^2 \int y dx$.

En saare frugtbar Operation til at danne Series er *Methodus coëfficientum indeterminatarum*, der bestaaer i at antage en vis almindelig Række-Form for den Størrelse som man vil udvikle; dette Udtryk (denne Form) lader man fyldestgjøre en Condition, som enten ved en Æqvation eller paa en anden Maade er givne, man faaer da Æqvationer til Bestemmelse af de i det generelle Serie-Udtryk

forekommende ubestemte Coefficienter. F. Ex. naar $y = e^x$ saa er $\frac{dy}{dx} = e^x$ altsaa har vi denne Condition $y = \frac{dy}{dx}$.

Sæt $y = e^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$ saa er $\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots\ldots$ altsaa er (da x er ubestemt eller kan være hvilken Størrelse vi vil) $A = B$, $B = 2C$, $C = 3D$ &c. Naar $x = 0$ er $y = 1$ følgelig $A = 1$, $B = 1$, $C = \frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{2\,3}$ &c. De ubestemte Coef. ere nu bestemte. Rækker dannes ved deelvise Integrationer, (Integration par parties) saaledes er $\int x^m\,dx.\,(lx)^n = \frac{x^{m+1}\,(lx)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m\,dx\,(lx)^{n-1}$. Samme Opgave fremstiller sig igjen for os i det sidste Led; ved at løse den (hvilket skeer ved at sætte $n - 1$ for n) indstiller den sig paanye, og vi faaer en Series. Ligeledes fremstiller den Opgave som skal løses sig for os igjen, naar den er løst, ved Dannelsen af Scalar Brøk. $\frac{78}{97} = \frac{1}{1\frac{19}{78}} = \frac{1}{1\,\frac{1}{4\frac{2}{19}}}$ &c. Her er altsaa en *Methodus repetitionis.*

Ad disse Veie er man kommen til adskillige meget generelle Række-Udtryk, hvoraf man kan udlede en Mængde andre ved Substitution, f. Ex. for $\frac{m}{a+b}$, Binomialformel for $(a + b)^m$, Taylors Formel for $\varphi\,(x + i)$, Lagranges Reversionsformel for $\varphi\,(x + y.\,fz)$, Maclaurins Theorem for $\varphi\,x$, Bernoullis Række for $\int X dx$, Moivres Inversionsformel (til at invertere Rækker), (Newtons Opera). Man har generelle Rækkeformler for $\log\,(1 + u)$, sin. x, e^x &c. &c.

No. 6.

En vigtig Bestanddeel af et analytisk Udtryk er *Exponenten.*

Den fortjener en egen Afhandling. Der ere forskjellige Slags Exponenter: Potenz-Exponenter x^m, Ordens-Exponenter $x^{(m)}$, som tilkjendegiver et Udtryks Plads i en Række; Differential-Exponenter $d^m x$, Funktions-Exponent $f^m x$, nemlig $\frac{d^m x}{dt^m}$, Integral-Exponenter: $\int^m x dx^m$. Ved Differentialcoëf. kaldes Exponenten, med Hensyn til Differentiationen Ordens-Exp., med Hensyn til Potenzen, Grad. f. Ex. $\left(\frac{d^3 x}{dt^3}\right)^2$ er af 3die Orden og 2den Grad.

At Potenz-Expon. ved Multiplication og Division eller ved Potenzering eller Rod-Extraction formeres og formindskes, er bekjendt, f. Ex. $x^m . x^n = x^{m+n}$. En Potens-Expon. bliver til Coëfficient ved at tage Logarithme, $a^x = y$ deraf: $x . \log a = \log y$. Differential-Expon. formindskes ved at integrere, og forøges ved at differentiere, $d.x^m = mx^{m-1}dx$. Ved Integration par parties formindskes Diff.-Exp. $\int xdy = xy - \int ydx$ Hovedformel: $\int Ld\delta s = L''\delta x'' - L'\delta x' - \int \delta x . dL$; her er integreret mellem Grændserne x' og x'' (Lagr. mec. anal.) $\int xd^2y = xdy - \int dxdy$; $\int m . \frac{d^2x}{dt^2} dt = m . \frac{dx}{dt} - \frac{dm}{dt} x + \int \frac{d^2m}{dt^2} xdt$ (Lagrange i miscell. taurinensia). Integrations-Exponent formindskes ved Integration par parties, f. Ex.: $\int^m R.dx^m = \int \frac{(h-x)^m . dR}{1.\ 2.\ 3 \ldots m}$ og $\int^3 x dx^3 = \frac{1}{1.\ 2}$ $(x^2 \int x dx - 2x \int x x dx + \int x x^2 dx)$; $\int v\, dx \int v' dx = R \int v' dx - \int v' R dx$ (her er $R = \int v\, dx$), o. m. flere. Man kan forandre Diff. Coëf. til Integraler. Dette Artificium bruges ikke sjelden, f. Ex. dersom jeg vil forvandle $\frac{d^2z}{dxdy}$ til Integrale, saa antages $z = \int^{2m} q.dx.^m dy^m$ og

vi faae for hiin Dif. Coëf. følgende Integral: $\int^{2m-2} q.dx^{m-1} dy^{m-1}$ (Prony, mecaniqve philosophiqve i Beviset for Jean Parsevals Integration af den hydrauliske Hovedformel for Ω). Laplace og Biot gjør Brug af samme Reduction i deres Integrationer af de part. Dif. Æq. Omvendt sæt den høieste Dif. Coëf. $\frac{d^m z}{dx^m} = R$ saa er $\int R dx = \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}}$. En Dif. Æqvations Ordens Exponent kan formindskes ved Substitution, sættes f. Ex. v for y' (Lagranges Betegnelse) saa bliver y'' til v' og man faaer en Æqvation med v' istedenfor en med y''. I denne Anledning erindres, at $\frac{d^0 x}{dt^0} = \frac{x}{1} = x$ og $\int d^2 x = dx$, $\int dx = d^0 x = x$ &c. Differentialernes og Integralernes Ordens Exponenter ere modsatte Størrelser; Integraler ere Diff. Coëf. med negative Diff. Coëf. $\frac{d^n y}{dx^n} = \left[\log (1 + \Delta y)\right]^n$ Lapl. prob. pag. 42; $\int^n y.dx^n = \frac{1}{\left[\log (1 + \Delta y)\right]^n}$; $d^n yy' = y' d^n y + n dy' d^{n-1} y + \ldots$ og $\int^n yy' dx^n = y'. \int^n y dx^n - n. \frac{dy'}{dx} \int^{n-1} y dx^{n+1} \ldots$ Lapl. prob. pag. 48.

Der er en mærkværdig Analogie mellem Dif. Coëfficienternes Ordens Exponenter og Potenz-Exp. $\Delta^n u = \left(e^{\frac{du}{dx} h} - 1\right)^n$ naar man sætter $d^n u$ for du^n (Lacroix 559. Lapl. prob. pag. 42) eller $\Delta^n u = \left(e^{\frac{d}{dx} h} - 1\right)^n u$ her forandres intet i Udviklingen af Parenthesen. Man har det Taylorske Theorem in nuce udtrykt paa denne Maade.

No. 7.

Til Udtrykkenes Modalitet hører den analytiske *Symbolik* og *Charachteristik;* nemlig den Mening der ligger i et analytisk Tegn, og omvendt den Maade, hvorpaa vi betegne vor Mening analytisk. Saaledes er $y^2 = px$ det analytiske Symbol paa en Parabel. Disse 2 Begreber synes at løbe sammen, men der er dog Forskjel; thi dersom jeg tænker meest paa Tegnet, kalder jeg det Charachteristik, men tænker jeg meest paa det Betegnede, saa er det Symbol. Hertil henhører den hele analytiske Geometrie, som giver os Symboler for Linie af enkelt og dobbelt Krumning, for Flader, Overskjæring, Berørelse, Osculeren, Asymptoter, Maximum, Minimum, Evoluter &c. At alt dette hører til Calculens Metaphysik, vil vi overbevise os om, naar vi erindre os Monges synthetiske Integrationsmethode. Han vil integrere $dz^2 = a^2 (dx^2 + dy^2)$. Nu læser han i denne Formel, at det er Symbolet for en Curve, hvis Elementer danne en constant Vinkel med Planet xy. Dette gjelder om rette Linier, hvis Æqvationer er $x = \alpha z + \beta$ og $y = z \sqrt{\frac{1}{a^2} - \alpha^2} + \gamma$. Dette er følgelig Integralet af hiin Æqvation, (cfr. Lacroix pag. 410).

Den analytiske Charachteristik kan være mere og mindre sammensat, saaledes er x^2 mindre sammensat end e^x, der er liig en heel Række. $\varphi(x)$ er mere sammensat. Den combinatoriske Analyses Charachteristik er meget sammensat, ligeledes $\Sigma(x) = 1+2+3+4 \ldots\ldots x$ og Integraltegnet $\int ydx = dx\,(y + y' + y'' + \ldots)$ Man maae ofte opløse det sammensatte Tegn i sine enkelte, som Laplace i Mem. de Pacad. des sciences 1777, hvor han opløser $\int ds\, \varphi(s)$ i følgende: $ds\,[\varphi(o) + \varphi(ds) + \varphi(2ds) + \ldots\ldots \varphi(s)]$.

Ligeledes: for at bevise dette analytiske Paradox $at(1-at)^{\frac{\delta}{a}} = e^{-\delta t}$

naar a = o maae vi opløse Logarithmen af det første Led i en Række. Den combinatoriske Analysis, Gausses numeri congrui, Laplaces fonctions generatrices, Lagranges fonctions derivées, Logarithmer, Exponentialstørrelser vise hvilken Kraft, der ligger i den mathematiske Charachteristik; en Betegnelse, som træder isoleret frem gjør ingen overordentlig Tjeneste, men naar den forekommer tit og i forskjellige Situationer, og behandles efter visse Love, da yder den os en overordentlig Hjelp, ja er istand til at opdage nye Sandheder.

Det var et herligt Artificium, at den store Descartes anvendte Tal paa Geometrien. Man kan finde en Æqvation som er en analytisk Definition paa en Curve; af Æqvationen kan man udlede alle Curvens Egenskaber. Den udødelige Lagrange har i sin mec. analytiqve viist, at der gives Æqvationer, som ere analytiske Definitioner paa Bevægelser. Dette er et saare vigtigt Skridt, og aabner os Veien til de herligste Opdagelser; thi naar Physik og Naturfilosofie kommer til og godtgjør, at Alt i Naturen er Resulsatet af Kraftvirkninger, saa faaer den analytiske Symbolik en uendelig Udvidelse; Analysen vover Intet ved at paastaae, at kunne give analytiske Definitioner paa Planter, Dyr, og paa alle Phænomener i hele Naturen. Leibnitz har haft den Idee, at Gud saae i en Formula sublimioris generis το ον, το γενομενον και το εσομενον. Jeg har søgt at vise den ideale Mulighed deraf i mit Skrift: Naturens System underkastet Analysis, og i: den transcendente Dynamik; jeg har udarbeidet dette mere omstændelig og ønsker med det Første at kunne fremlægge det for Publikum.

---

2. Æqvationer.

§ 5. *Qvantitet.*

No. 1.

Her kommer i Betragtning Leddenes Antal og deres Almindelighed. Leddenes Antal kan enten blive uforandret eller større eller mindre. Antallet bliver uforandret ved Leddenes Transposition, som er den Operation, hvorved en Addendus gaaer over til den anden Side af Lighedstegnet som Subtrahendus, en Multiplicator som Divisor. Reductionen formindsker Antallet $1 + 8x + 2y = x + 1$ bliver til $7x + 2y = 0$.

No. 2.

Elimination. Den algebraiske Elimination ved Combinations-, Substitutions-, Additions- og Subtractions-Methoden ere bekjendte af Elementarlærebøgerne i Algebra. Man kan eliminere ved Division: $ax = A$ og $bx = B$ bliver til $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$.

En Størrelse kan forsvinde, enten naar den selv bliver $= 0$, eller dens Coefficient bliver $= 0$, f. Ex. $(a + b)x + x = 0$, naar $a + b = 0$ forsvinder x, hertil hører dette: $(a + b)x = 0$ hvor x forsvinder af sig selv.

Ved ubestemte Coef. kan man og eliminere, sæt: $ax + by = c$ og $ex + fy = g$ multiplicerer den sidste med en ubestemt Coef. m og adder til den første, saa er $ax + by + mex + mfy = c + mg$, forat x kan forsvinde sættes dens Coef. $a + me = 0$, hvilket giver $m = \div \frac{a}{e}$ hvilket substitueres.

En Æqvation kan reduceres til færre Led, ved at nogle Størrelser hæve hinanden som positive og negative Størrelser. Dette

kan undertiden være vanskeligt at see, f. Ex. hos Laplace m. cel. 2den Deel pag. 9, hvor Værdierne af Pcosp ere ligestore og modsatte, og altsaa hæve hinanden, (forudsat at P er positiv altid). Naar man har integreret en Dif. Æq. og atter differentierer Integralet, for at gjøre Prøve, faaer man undertiden store Udtryk, hvis Reduction ikke strax er at see.

En Radical elimineres ved at føres paa den anden Side af Lighedstegnet, og ophøie hele Æqvationen til den corresponderende Potenz. En constant elimineres ved at føres paa den ene Side af Lighedstegnet og differentiere, man har da af $x = c$ dette: $dx = 0$, eller og ved at differentiere Hovedæqvationen og udaf denne Dif. Æq. og Hovedæqvationen at eliminere den, f. Ex.: $\varphi(a,x) = 0$, $d\varphi(a,x) = 0$, heraf elimineres a. For at eliminere en vilkaarlig Funktion, gaae vi saaledes frem:

1) Størrelsen under Funktionstegnet differentieres, og dette Differentiale sættes $= 0$.
2) Den givne Æqv. differentieres saaledes, at man anseer den vilk. Funkt. for Constant.
3) Af disse Æqv. elimineres $\frac{dy}{dx}$ &c., og den vilkaarlige Funktion.

Differentialet af variable principale, f. Ex. z udtrykkes ved part. Dif. Coef. nemlig $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$ eller $dz = pdx + qdy$. F. Ex.: $\log z - \frac{y}{a} = f(x-y)$. Vi faaer efter Reglens 1) dette: $dx \div dy = 0$, efter 2) dette: $\frac{dz}{z} - \frac{dy}{a} = 0$ eller $\frac{1}{z}(pdx + qdy) - \frac{dy}{a} = 0$. Man har $\frac{dy}{dx} = 1$, hvilket substitueret giver $p + q = \frac{z}{a}$.

Eliminationen af en Constant giver en total Diff. Æq., men af en vilk. Funktion giver en partiel Diff. Æqv. En partial Diff. Coef. $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ kan elimineres ved Hjelp af denne Sætning: $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx}$ Man differentierer nemlig først med Hensyn til x, siden med Hensyn til y. Differentiation og Derivation eller Funktionering ere herlige Midler til at eliminere, f. Ez. Potenzer: $y = X^m$ deraf $y' = m X^{m-1} X'$ altsaa $Xy' - mX'y = o$ (Lagr. th. des fonct. pag. 71). Exponentialstørrelser: $y = e^x$, $y' = e^x$ altsaa $y = y'$ eller af $y = e^X$ haves $y' - X'y = o$; Logarithmer $y = \log X$, $y'X - X' = o$; trigonometriske, $y = \sin. X$, $X'y'' - X''y' + X'^3 y = o$; Rodstørrelser: $y = \sqrt{x}$, $y' = \frac{1}{2y}$.

No. 3.

Ved *Substitution* formeres eller formindskes Leddene. Vel anvendes den sjelden i denne Hensigt, men det kan dog undertiden være magtpaaliggende at formindske Leddenes Antal i en Dif. Æqv. til 2 af denne Form: $dX = dY$, som da giver $X = Y +$ Const., saaledes reducerer Schmidten, Dif. Æqvationen: $\frac{d^2z}{dxdy} = p. \frac{dz}{dx} + q. \frac{dz}{dy} + rz + t$ ved Substitution af $e^{\int p dy} = m$ og $e^{\int \frac{r}{q} dy} = n$ til denne: $m. \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{m}\frac{dz}{dx}\right) = \frac{q}{n}. \frac{d}{dy}(nz)$ som lettere lader sig intégrere.

No. 4.

Af en Række eller af en anden Æqvation bortkastes undertiden nogle Led, naar de ere meget smaae i Forhold til de øvrige, saaledes Formlen for Beregningen af Radius vector, og den eccentriske Anomalie bliver formindsket, naar Eccentriciteten er meget lille. (Laplace m. cel. 1ste Deel pag. 243). Der ere de Slags Ræk-

ker, som af sig selv bryder af, fordi en Faktor bliver o i alle de efterfølgende Led, f. Ex. Binomialformlen $(a + b)^m$ for m et heelt positiv Tal. Ligeledes adskillige Integralformler, f. Ex.: $\int \frac{dx}{(a + bx^2)^m}$ bestemt ved $\int \frac{dx}{a + bx^2}$.

En uendelig Række kan have et endeligt Udtryk, som de bestemte Integraler: $\int t^3 dt$, $e^{-3} = 1.2.3$ mellem Grændserne $t = o$ og $t = \infty$.

No. 5.

Et bestemt Integral kan være liig Integralet af en partiel Dif. Æqv., saaledes er Int. af $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dz}{dy}$ følgende $z = \int e^{-t^2} dt\, \varphi (x + 2t\sqrt{y})$ mellem Grændserne $t = \div \infty$ og $t = + \infty$ Funkt. φ er vilkaarlig. Omvendt kan de part. Dif. Æqvationers Integration lede til at finde et bestemt Integrale; saaledes reducerer Laplace $\int e^{-a^2x^2} dx.$ cos rx mellem $x = o$ og $x = \infty$ til Integrationen af $\frac{dy}{dr} + \frac{r}{2a^2} y = o$ (Lacroix 617). De part. Dif. Æqv. af 2den Orden, som ikke kan integreres i Termini finiti integrerer Laplace (mem. de l'acad. des sciences) ved Hjelp af bestemte Integraler, og samme Slags Integrale findes i Pronys mec. philosophique til den hydrauliske Hovedformel $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = o$ og hos Laplace i hans Theorie des probabilités finder man flere deslige.

§ 6. *Relation.*

Hertil hører Conditions-Æqvationer og Hoved-Æqvation, f. Ex. Statikens Grundformel er denne: $\Sigma P \delta p = o$ dertil kommer undertiden Conditions-Æqvationerne $L = o$, $M = o$, som indeholde visse Betingelser.

Ligeledes maa hertil henføres de ubestemte Æqvationer, som ere initial Æqv. ved Integration, og vilkaarlige Funktioner. Endvidere: de oprindelige og deriverede Æqvationer $\varphi(x,y,z) = o$, $\varphi'(x,y,z) = o$ &c. Ved Reduction, Differentiation, Elimination, Substitution kan man aflede en Æqv. af en anden.

§ 7. *Modalitet.*

Hertil hører umulige Æqv., som indeholder en Modsigelse. Det er nemlig ikke altid sagt, at det Umulige fremstiller sig under Form af en imaginær Størrelse; den kan vise sig paa andre Maader, f. Ex. en Æqv. kan give mig Værdien for en sinus at være større end dens Radius; eller paa andre Maader modsige, hvad der er statueret at staae fast. Ligesom man ikke altid strax kan lære at kjende en Størrelse, saaledes kan vi ikke altid strax kjende en Æqvation, men approximerer sig dertil, ved efterhaanden at tage flere og flere Led i Betragtning. Laplace gaaer saaledes frem i Perturbationstheorien.

---

3. Systemer.

§ 8. *Qvantitet.*

No. 1.

Æqvationernes Antal i Systemet kan formindskes ved Addition, Subtraction, Multiplication, Division; det er sjeldent at Regningsarterne saaledes anvendes ene; men dersom man først multiplicerer Æqvationerne med ubestemte Størrelser og adderer disse Produkter, da frembringes een Æqvation, som siden kan deles i andre eller paa andre Maader formes om til det Brug, hvortil man vil have dem. Af $A = o$, $B = o$ faaes ved at multiplicere

med de ubestemte Coëf. m, n følgende: $mA + nB = o$. Denne Æqvation vil være æqvivalent med de 2 andre. Jeg vil kalde denne Operation: *Methodus conditionum simultanearum.* Omvendt, dersom m, n ere ubestemte og $mA + nB = o$, saa er $A = o$, $B = o$, dette vil jeg kalde *Methodus multiplicatoris indeterminati.* Begge anvendes hyppig af Analysterne: d'Alemberts Integrationsmethode (Lacroix 435). Lagrange mec. anal. slutter af $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = o$ til $X = o$, $Y = o$, $Z = o$. Lagrange i miscel. taurinensia integreres ved ubestemte Multiplicatorer. Af de particulære Integraler $y = X$ $y' = X'$ findes det complette $y = aX + bX'$. ved at multiplicere med Constanter, og addere dem, dette grundes og derpaa. (Lacroix 417).

No. 2.

Ved *Elimination* formindskes Æqvationernes Antal i Systemet, og man faaer een Æqv., som gjelder det samme som hele Systemet. Af $\varphi(x,p) = o$ og $\psi(y,p) = o$ elimineres p og vi faae $\Pi(x,y) = o$. Ved saadan Eliminination findes Integralet af en partiel Dif. Æqv. af 2den Orden, nemlig naar man har funden 2 Dif. Æqv. af 1ste Orden, hver med en vilkaarlig Constant, og de fyldestgjør Dif. Æqv. af 2den Orden, og man da eliminerer $\frac{dy}{dx}$ af disse, saa haves een primitiv Æqvation, som vil være Integralet af den givne Dif. Æqv. af 2den Orden, (see Lagranges Th. des fonct. pag. 78. Laplaces skjønne Integration af de planetariske Differentialformler m. cel. 1ste Deel pag. 220. Lacroix 410).

No. 3.

Ved *Substitution* af en Størrelse der findes i een af Æqvationerne reduceres Antallet til mindre, Antallet forøges ved Meth.

mult. indet. Disse ubestemte Multiplicatorer kan være ubestemte baade med Hensyn til Form og Størrelse, eller blot i Henseende til Størrelse, f. Ex.: δx, δy, δz i Mekanikens Grundformel. x, x^2, x^3 i Leddene af en uendelig Række, der bestemmes ved Hjelp af Meth. coef. ind. Differentialcoef. i Lagranges Integrationsmethoder. (Lacroix 477, 488) &c. Ved at indføre een eller flere ubestemte, og siden skille Æqv. i flere Dele til en eller anden Hensigts Opnaaelse, f. Ex.: $dy + Pydx = Qdx$, hvor P,Q ere Funkt. (x), sæt $y = Xz$ saa er $zdX + Xdz + PXzdx = Qdx$, nu sættes $Xdz + PXzdx = o$ for at separere de variable, og vi har $\frac{dz}{z} + Pdx = o$ (Lacroix 433). Denne Operation kunde vi kalde: *Methodus rs indeterminati.*

No. 4.

Æqvationers Resolution giver flere Æqv. af een: $(x-a)(x-b)(x-c) = o$ giver $x - a = o$, $x - b = o$, $x - c = o$, hvilke bestaae paa eengang; omvendt kan vi af disse 3 simultane Æqv. danne hiin Æqvation af 3die Grad. Dette anvendes paa Curvers Sammensætning. Sæt f. Ex. at Æqvat. for 2 Curver ere $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ begge Æqv. maae være reducerede til samme Begyndelsespunkt for Coordinaterne, da er $(y - \varphi(x))(y - \psi(x)) = o$ Æqv. for det System, der dannes af de 2 Curver. (Degens Oversættelse af Francoeur Elementar-Algebra pag. 105). Isolerede Curver og Punkter forekommer som saadanne Faktorer (Lacroix 120).

Ved nogle homogene Diff. Funktioners Integration forskaffer de forskjellige Rødder af en algebraisk Æqvation de particulære Integraler, hvoraf det complette Integrale faaes ved at multiplicere hvert part. Int. med en Constant og addere Producterne (Lacroix 417).

No. 5.

Man kan af een Æqv. frembringe flere ved at substituere forskjellige Værdier for de i samme forekommende generelle Størrelser; og saaledes kan man af 1 Æqv. frembringe et System af Æqvationer, som bestaaer af de specielle Æqv. og den Æqv., som indeholder Substitutionen, f. Ex.: $\frac{d^2y}{dx^2} = P$ hvor P er Funkt. $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ som vi vil kalde p, vi har:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dp}{dx} = P \\ \frac{dy}{dx} = p \end{array}\right\} \text{ eller } \left.\begin{array}{l} x = C + \int\frac{dp}{P} \\ y = C' + \int\frac{pdp}{P} \end{array}\right\}$$

af disse elimineres p og man har Integralet. Formlen for et Punkts Bevægelse er: 1) $o = \delta x(x'' - P) + \delta y(y'' - Q) + \delta z(z'' - R)$ hvor $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ &c. sættes 2) $\delta z \div (m\delta x + r\delta y) = o$ saa har vi et System, som giver os Bevægelsen af et Punkt i en krum Flade hvis Æqv. er 2. Da δx, δy ere variables independantes, saa ere de ubestemte og deres Coef. kan sættes $= o$ hvorved vi faae: $(x'' - P) + m(z'' - R) = o$ og $(y'' - Q) + r(z'' - R) = o$. Samme Æqv. havde vi faaet ud ved at multiplicere 2) med en ubestemt Coef. λ og addere til 1) og da sætte Coef. til δx, δy, δz hver for sig $= o$, hvorved vi fik 3 Æqvationer $x'' - P - \lambda m = o$ &c. Af disse elimineres λ, (Lagrange mec. anal. pag. 52. Laplace mec. cel. 1ste Deel pag. 23. 10. Min Dynamik pag. 7, 8, 28, 31).

No. 6.

I dette Exempel var 1) Hovedformlen og generel, og 2) Conditionsæqv. speciel, men undertiden tænker man sig den givne Æqv. som Conditionsæqv. til en generellere hentet andensteds fra, der da bliver at betragte som Hovedformel. Saaledes Biot (mem. de l'in-

stitut. nat. Tome IV) $z'' = U =$ funct (x,z'); den betragtes som en Conditionsæqv. til Maclaurins Formel $z = Z + x.\ Z' + \frac{x^2}{1.2}.\ Z'' + \ldots$ hvor Z, Z' &c. ere Værdierne af z og z' &c. naar $x = o$. Af den givne $z'' = U$ søges z''' &c. og deri sættes $x = o$ og substitueres i Maclaurins generelle Eormel og man har z; og Z Z' der blive ubestemte blive de vilkaarlige Funkt. ved Integrationen. Derpaa forandrer han Dif. Coef. til Integraler, og transformerer dem ved Integrations par parties. Lignende Undersøgelser findes hos Laplace (Mem. de l'acad. des sciences 1773). Andre generelle Formler tjener til Hovedformel for den givne, f. Ex.: $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$ eller ved de homogene Funktioner: $\frac{dv}{dx}.\ x + \frac{dv}{dy}.\ y = mv$.

No. 7.

Ved at behandle et Udtryk af en Æqv. paa samme Maade, men med Hensyn til forskjellige Led, saa faaer man flere forskjellige Æqv., hvoraf man kan drage Slutninger. Denne Operation kunne vi kalde: *Methodus diversæ formæ* see Lagrange th. des fonct. pag. 17 hvor han af Formlen $f(x + i) = fx + pi + qi^2 \ldots$ udleder 2 Formler for $f(x + i + o)$ ved at sætte eengang $i + o$ for i og en anden Gang $x + o$ for x. Disse 2 Udtryk blive identiske og ved Sammenligning findes p, q, r, og deraf den Taylorske Formel. Ligeledes naar man i Rækken for $f(x,y)$ varierer blot y til $y + k$ og siden x til $x + h$, saa har man eet Udtryk for $f(x + h,\ y + k)$. Dernæst behandler man $f(x,y)$ paa samme Maade, men ordine inverso nemlig betragter først x variabel, og siden y, saa har man et andet Udtryk for $f(x + h,\ y + k)$ disse 2 ere identiske og giver ved Sammenligning $\frac{d^2u}{dydx} = \frac{d^2u}{dxdy}$ (Lacroix 50).

Dersom der er ubestemte Størrelser i en Æqv. kan man give den flere Former ved Substitution, f. Ex.: $f(x + i) = fx + if'x + \ldots$ da x og i ere ubestemte kan vi sætte: $x - i$ for x og har $fx = f(x - i) + i f'(x - i) + \ldots$ og sætte vi xz for i saa er $fx = f(x - xz) + xzf'(x - xz) + \ldots$ (Lagr. th. des fonct. No. 33).

No. 8.

Ved Jean Parsevals Theorem dannes af 2 Rækker een, nemlig: af $A + Bz + Cz^2 + \ldots = \Phi(z)$ og $a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} + \ldots = \Psi \frac{1}{z}$ dannes denne: $Aa + Bb + Cc + \ldots = \nu$, som er et bestemt Integrale. Naar man har en Række som ν, hvis Led ere Produkter, kan man ved dette Theorem dele den i 2 andre med en Størrelse s og bestemme dens Sum.

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \int \left\{ \varphi\left(e^{t\sqrt{-1}}\right) \psi\left(e^{-t\sqrt{-1}}\right) + \varphi\left(e^{-t\sqrt{-1}}\right) \psi\left(e^{t\sqrt{-1}}\right) \right\} dt \qquad \text{limites} \left\{ \begin{matrix} t = o \\ t = \pi \end{matrix} \right\}$$

(see Schmidtens Recherches pag. 20).

No. 9.

En Æqv. $U = o$ forvandles til et System, naar man vil transformere den til en anden Æqvation. Man substituerer nemlig for nogle af de i U forekommende Størrelser andre Udtryk; derved faaer man en nye Æqv. $V = o$, denne kan man da dele saaledes, som man ønsker overeenstemmende med den Hensigt man har ved Transformationen, i 2 Æqvatione $rT = o$ og $S = o$. Den ene giver os den forlangte transformerede Æqv., og den anden bliver til en Conditions-Æqv. Sæt f. Ex. at vi vil transformere denne:

$y + x^2 + x + a = o$ til en anden med Exponenterne 2, 4 og ingen Constant, da sættes $x = t^2 + m$ hvor m er ubestemt; man har: $y + t^2 + m + t^4 + 2mt^2 + m^2 + a = o$, sættes her $y + t^2 + t^4 + 2mt^2 = o$ den transformerede, saa er $m + m^2 + a = o$ Conditionsligning, hvoraf vi søge Værdien for m. Denne Operation vil vi kalde *Methodus Transformationis et conditionis.* Lapl. prob. pag. 112. Lacroix 507, 511, 380, 426, 432. Lagrange m. anal. pag. 91, 231.

Offentlige Examen i Odense Cathedralskole for Aaret 1827 begynder Torsdagen den 13 September, og fortsættes daglig fra Kl. 9 til 1, og fra 3 til 6 i følgende Orden:

Skriftlig Prøve.

Torsdag den 13 September.
Formiddag.
IV og III Klasse . . . *Latinsk Stiil*
Eftermiddag.
IV og III Klasse . . . *Overs. af Latin*

Fredag den 14 September.
Formiddag.
IV og III Klasse . . . . . *Historie*

Fredag den 14 September.
Eftermiddag.
IV Klasse *Overs. af Fransk og Tydsk*

Løverdag den 15 September.
Formiddag.
IV og III Klasse . . . *Religion*
Eftermiddag.
Candidaterne *Arithmetik og Geometrie*
II Klasse . . . . . *Latinsk Stiil*

Mundtlig Prøve.

Mandag den 17 September.
Formiddag.
Candidaterne . . . . . *Latin*
III Klasse *Hebraisk* og I Klasse *Fransk*
Eftermiddag.
IV Klasse . . . . . *Latin*
III —— . . . . . *Tydsk*

Tirsdag den 18 September.
Formiddag.
Candidaterne . . . . . *Græsk*
II Klasse . . . . . *Religion*
Eftermiddag.
IV Klasse . . . . . *Græsk*
I —— . . *Religion og Geographie*

Onsdag den 19 September.
Formiddag.
Candidaterne *Religion og nye Testam.*
II Klasse . . *Historie og Geographie*
Eftermiddag.
IV Klasse *Religion og nye Testam.*
II og I Klasse . . . . . *Dansk*

Torsdag den 20 September.
Formiddag.
Candidaterne *Historie og Geographie*
III Klasse . . . . . *Religion*

Torsdag den 20 September.
Eftermiddag.
IV Klasse . . *Historie og Geographie*
III —— . . . . . *Physik*

Fredag den 21 September.
Formiddag.
Candidaterne *Arithmetik og Geometrie*
II Klasse . . *Latin og Grammatik*
Eftermiddag.
Candidaterne og IV Klasse *Hebraisk*
II Klasse . . . *Fransk og Tydsk*

Løverdag den 22 September.
Formiddag.
Candidaterne . . . *Tydsk og Fransk*
III Klasse . *Historie og Geographie*
Eftermiddag.
Candidaterne og IV Klasse . *Physik*
I Klasse . . . *Latin og Historie*

Mandag den 24 September.
Formiddag.
III Klasse . . . *Latin og Grammatik*
II —— . *Arithmetik og Geometrie*
Fftermiddag.
III Klasse . . . *Latin og Grammatik*
I —— *Arith. Geom. og Naturhist.*

Mundtlig Prøve:

Tirsdag den 25 September.	Onsdag den 26 September.
Formiddag.	Formiddag.
III Klasse *Græsk og græsk Grammatik*	III Klasse . *Arithmetik og Geometrie*
IV —— . . . *Tydsk og Fransk*	II —— . . *Græsk og Grammatik*
Eftermiddag.	Eftermiddag.
III Klasse *Græsk og græsk Grammatik*	III Klasse . . . . . *Fransk*
II —— . . . . . *Naturhistorie*	IV —— . *Arithmetik og Geometrie*

Mandagen den 1ste Octbr. Kl. 9 Formiddag foretages den foreløbige Prøve med dem, der ere anmeldte til Optagelse i Skolen.

Efterat Opflyttelse i høiere Klasser, og Omflyttelse i selve Klasserne er, ifølge Examens Udfald, samt Disciplenes Flid og Fremgang i det forløbne Skoleaar, bestemt ved den Censur, som efter tilendebragt Examen holdes af samtlige Lærere, foretages Translocationen i en offentlig Forsamling, som holdes paa Gymnasiets Auditorium, Tirsdagen den 2den October Kl. 10 *Formiddag.*

De Candidater, som iaar forventes demitterede til Universitetet, ere følgende:

1) *Jacob Henrich Bang* . . . . fra Tanderup i Fyen.
2) *Jens Christ. Ed. Theod. Mau* . fra Skjelskjør.
3) *Johan Lauritz Erreboe* . . . fra Faaborg.
4) *Wilhelm Paludan Müller* . . fra Odense.
5) *Frederik Paludan Müller* . . fra Odense.
6) *Carl August Möller* . . . . fra Odense.
7) *Christ. Brandt Bonnesen* . . fra Odense.
8) *Simon Groth Teisen* . . . . fra Riisinge i Fyen.

Venner af Videnskabelighed, Skolens og Ungdommens Velyndere, indbydes ærbødigst til at beære denne *offentlige Examen* og paafølgende *offentlige Regnskab* for Sammes Udfald, med deres hædrende og opmuntrende Nærværelse.