Danskernes Historie Online
Danske Slægtsforskeres Bibliotek

Dette værk er downloadet fra Danskernes Historie Online

Danskernes Historie Online er Danmarks største digitaliseringsprojekt af litteratur inden for emner som personalhistorie, lokalhistorie og slægtsforskning. Biblioteket hører under den almennyttige forening Danske Slægtsforskere. Vi bevarer vores fælles kulturarv, digitaliserer den og stiller den til rådighed for alle interesserede.

Støt Danskernes Historie Online - Bliv sponsor
Som sponsor i biblioteket opnår du en række fordele. Læs mere om fordele og sponsorat her: https://slaegtsbibliotek.dk/sponsorat

Ophavsret
Biblioteket indeholder værker både med og uden ophavsret. For værker, som er omfattet af ophavsret, må PDF-filen kun benyttes til personligt brug.

Links
Slægtsforskernes Bibliotek: https://slaegtsbibliotek.dk
Danske Slægtsforskere: https://slaegt.dk

Indbydelsesskrift

til

den offentlige Examen

i

Christiania Kathedralskole

1854.

Geometrisk Behandling og Construktion af den regulære 17kant
af Adjunkt Odén.

CHRISTIANIA.
Trykt hos *Chr. Gröndahl.*

Indbydelsesskrift

til

den offentlige Examen

i

Christiania Kathedralskole

1854.

Geometrisk Behandling og Construktion af den regulære 17kant
af Adjunkt Odén.

CHRISTIANIA.
Trykt hos *Chr. Gröndahl.*

Geometrisk Behandling og Construktion

af

den regulære 17kant.

Af

J. Odén,

Adjunkt ved Christiania Kathedralskole.

INDLEDNING.

For at kunne beregne og construere en regulær $n$kant er det nödvendigt og tilstrækkeligt at kunne dele en Cirkels Peripheri i n ligestore Dele. *Gauss* har i sine Disquisitiones arithmeticæ beviist, at Cirkelperipheriens Deling i n ligestore Dele, naar n er et Primtal og altsaa $n - 1$ et sammensat Tal $= 2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}\ldots$, stedse kan reduceres til Oplösningen af α Ligninger af 2den Grad, β Ligninger af 3die Grad, γ Ligninger af 5te Grad o. s. v. Heraf fölger, at en Cirkels Peripheri kan deles geometrisk i n ligestore Dele, naar n er et Primtal af Formen $2^p + 1$ eller $n - 1 = 2^p$, hvortil hörer Tallene 3, 5, 17, 257, 65537 ..., thi man har da blot at construere Rödderne af p Ligninger af 2den Grad, hvilket altid kan udföres ved Cirkelen og den rette Linie. Spörgsmaalet bliver altsaa: hvorledes reduceres en Ligning af 2^p Grad til p Ligninger af 2den Grad?

Foruden den almindelige Oplösning af denne Opgave, der grunder sig paa den höiere Mathematik, nemlig Tallenes Theori, har man ogsaa for den regulære 17kant en særskilt, men neppe selvstændig Oplösning, der fornemmelig grunder sig paa Summationen af en trigonometrisk Række. En saadan har *Legendre* givet i sin Geometri, men tilföier til Slutning: "Quant à la méthode qui a dirigé le partage de ces diverses équations, elle tient à une theorie trés-delicate, fondée sur l'analyse indeterminée et dont il faut voire le développement dans l'ouvrage même de *Gauss*."

I *Klügels* math. Wörterbuch fortsat af *Mollweide* og fuldendt af *Grunert* findes i 5te Th. p. 808 ligeledes for den regulære 17kant en trigonometrisk Oplösning tilligemed en geometrisk Construktion. Men uagtet det nu allerede er over et halvt Aarhundrede siden *Gauss* fremsatte sin Theori, og uagtet den samme Materie siden har været behandlet af de störste Mathematikere som *Lagrange, Legendre, Abel* og senest af *Serret* i hans Cours d'Algebre superieure, saa savner man dog, saavidt mig bekjendt, fremdeles en geometrisk Oplösning af den regulære 17kant. Hermed kan sammenlignes hvad Prof. *Schlömilch* i Dresden siger i et Anhang til *Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maasses. Erster Th. Eisenach 1849*, hvor det pag. 211 heder: "Zu den Construktionen regelmässiger Vielecke, welche wir in § 29 angegeben haben, gesellt sich noch die Berechnung und Zeichnung des regelmässigen Siebenzehnecks; von dieser konnte an der genannten Stelle keine Rede sein, weil sie eine trigonometrische Behandlung *nothwendig* erfordert; wir holen sie daher nach." Nu fölger en trigonometrisk Oplösnig tilligemed Anviisning til en geometrisk Construktion. Prof. *Ramus* siger i en Anmærkning i sin *Elementær Geometrie. Kjöbenhavn 1850* pag. 122: "Ved Hjælp af *den höiere Mathematik* kan den regulære $n$kant bestemmes baade ved Beregning og geometrisk Construktion, eller Cirkelperipherien deles i n ligestore Dele, naar n er et Primtal af Formen $2^p + 1$, o. s. v." For længere Tid siden havde jeg fundet, at man ved Hjælp af den elementære Geometri kan udlede en Ligning, der udtrykker Forbindelsen mellem Siden i en regulær $n$kant og den omskrevne Cirkels Radius, hvilken Ligning, naar n er et Primtal, stedse er af $n-1^{te}$ Grad, samt at man ligeledes ved Hjælp af den elementære Geometri kan reducere denne Ligning til $\frac{n-1}{2}$ Grad. Da nu Rödderne i denne saa-

ledes reducerede Ligning ere Supplementchorder til Siden og Diagonaler i $n$kanten, og saaledes visse Relationer mellem Rödderne paa Grund af Cirkelens Natur ere bekjendte, saa forekom det mig sandsynligt, at det ogsaa maatte være muligt ved Hjælp af den elementære Geometri, at reducere en saadan Ligning af 2^4 eller 16de Grad til 4 Ligninger af 2den Grad. Jeg foresatte mig derfor, om muligt, at löse denne Opgave eller ogsaa at bevise, at den umulig kan löses geometrisk.

Naar Cirkelens Radius betegnes med r, Chorderne til $\frac{1}{17}$, $\frac{2}{17}$, $\frac{3}{17}$, o. s. v. Peripheri med c_1, c_2, c_3, c_4, o. s. v. og Supplementchorderne til de samme Buer med s_1, s_2, s_3, s_4, o. s. v., saa findes let, som ovenfor bemærket, en Ligning, der udtrykker Forbindelsen mellem Siden i den regulære 17kant og den omskrevne Cirkels Radius, hvilken Ligning er:

$$c_1^{16} - 17r^2c_1^{14} + 119r^4c_1^{12} - 442r^6c_1^{10} + 935r^8c_1^8 - 1122r^{10}c_1^6 + \\ + 714r^{12}c_1^4 - 204r^{14}c_1^2 + 17r^{16} = 0.$$

Nu er $$c_1^2 = 2r^2 - rs_2.$$

Indsættes denne Værdie for c_1^2 og divideres hele Ligningen med r^8, faaer man:

$$s_2^8 + rs_2^7 - 7r^2s_2^6 - 6r^3s_2^5 + 15r^4s_2^4 + 10r^5s_2^3 - 10r^6s_2^2 - 4r^7s_2 + r^8 = 0,$$

eller, da ikke blot s_2, men alle 8 Supplementchorder i förste Halvcirkel ere Rödder i denne Ligning, kan Index udelades og man faaer altsaa:

$$s^8 + rs^7 - 7r^2s^6 - 6r^3s^5 + 15r^4s^4 + 10r^5s^3 - 10r^6s^2 - 4r^7s + r^8 = 0.$$

Ved at betragte denne Ligning seer man, at den har 4 positive og 4 negative Rödder, at Summen af alle Rödder er $= -r$, at Summen af Produkterne af Rödderne combinerede til 2 er $= -7r^2$, o. s. v., og at Produktet af alle Rödderne er $= r^8$, d. e.,

$$s_2 + s_4 + s_6 + s_8 - s_1 - s_3 - s_5 - s_7 = -r, \text{ eller}$$

$$s_1 + s_3 + s_5 + s_7 - s_2 - s_4 - s_6 - s_8 = r, \text{ o.s.v., og } s_1s_2s_3s_4s_5s_6s_7s_8 = r^8.$$

Men da jeg havde bestemt mig til at söge en geometrisk Oplösning, var jeg nödt til at slaae ind paa en anden Vei, thi de Resultater, jeg kunde udlede af Ligningen, vare ikke geometriske og de syntes heller ikke at före til det forönskede Maal. Imidlertid blev jeg dog ved Betragtning af Ligningens Coefficienter ganske naturligen ledet paa Ideen om at forbinde forskjellige Buers Chorder og Supplementchorder ved Addition og Multiplikation, og efter en Deel Undersögelser i denne Retning fandt jeg flere Sætninger, hvoraf især 4 kom mig til væsentlig Nytte. Ved Hjælp af en af disse Sætninger fandt jeg fölgende mærkelige Theorem for 17kanten: *Produktet af hvilkesomhelst 4 Supplementchorder, hvis Buer eller Indices danne en geometrisk Række med 2 til Exponent er* $= + r^4$, *naar et lige Antal, men* $= - r^4$, *naar et ulige Antal Supplementchorder have samme Fortegn. Reduceres samtlige Supplementchorder i alle saadanne Produkter til förste Halvcirkel, faaer man kun to forskjellige Produkter, hvoraf hvert er* $= r^4$. Altsaa $s_1 s_2 s_4 s_8 = r^4$ og $s_3 s_6 s_5 s_7 = r^4$.

Endelig lykkedes det mig for noget over et Aar siden at finde en fuldstændig geometrisk Oplösning og jeg skal i nærværende Afhandling meddele de Resultater, hvortil mine Undersögelser have ledet.

Förend jeg gaaer over til den geometriske Behandling af den regulære 17kant, skal jeg först fremsætte og bevise de Elementærsætninger af Cirkellæren, hvorpaa min Methode grunder sig. Jeg anseer dette saa meget mere nödvendigt som flere af dem maaskee för ikke har været fremsatte, idetmindste ikke under en saadan Form.

Elementærsætninger af Cirkellæren.

§ 1.

Afsætter man paa en Cirkels Peripheri to ligestore Buer (Fig. 1) $AB = AC$, drager Chorderne AB, AC og BC og gjennem A Diameteren AD, og Chorderne BD og CD, saa har man efter den Ptolomæiske Læresætning (*Holmboes* Geom. 3die Udg. § 110):

$$AB.CD + AC.BD = AD.BC;$$

men

$$AC = AB \text{ og } CD = BD,$$

$$2AB.BD = AD.BC,$$

$$AD = 2r,$$

$$2AB.BD = 2rBC,$$

$$AB.BD = rBC.$$

Sættes Buen $AB = a$ og betegnes Chorden AB med c_a og Supplementchorden BD med s_a, saa faaer man:

$$1. \quad c_a s_a = r c_{2a}.$$

Produktet af en Bues Chorde og dens Supplementchorde er saa stort som Produktet af Cirkelens Radius og Chorden til den dobbelte Bue.

Naar man paa en Cirkels Peripheri afsætter to ligestore Buer $AB = AC$ (Fig. 2), drager Chorderne AB og BC, gjennem A Diameteren AD og gjennem C Diameteren CE og drager Chorderne AE, BE, BD og ED, saa har man efter den Ptolomæiske Læresætning:

$$AB.DE + AD.BE = AE.BD;$$

men

$$AB = DE, \; AE = BD \text{ og } AD = 2r,$$

$$AB^2 + 2rBE = BD^2,$$

$$BD^2 = 4r^2 - AB^2,$$

$$AB^2 + 2rBE = 4r^2 - AB^2,$$

$$2AB^2 + 2rBE = 4r^2,$$

$$AB^2 = 2r^2 - rBE.$$

Sættes istedetfor AB^2 den ligestore Værdi $4r^2 - BD^2$, faaer man:

$$BD^2 = 2r^2 + rBE.$$

Sættes Buen $AB = a$ og betegnes Chorden AB med c_a og Supplementchorden BD med s_a og bemærkes tillige, at Produktet rBE er i Udtrykket for Chorden negativt, naar Buen $a < 90^0$, men positivt, naar $a > 90^0$, og at derimod det Omvendte finder Sted for Supplementchorden, saa faaer man:

$$2. \quad \begin{cases} c_a^2 = 2r^2 - rs_{2a}, & a < 90^0, \\ c_a^2 = 2r^2 + rs_{2a}, & a > 90^0. \end{cases}$$

Qvadratet paa en Bues Chorde er saa stort som det Dobbelte af Radiens Qvadrat minus eller plus Produktet af Cirkelens Radius og Supplementchorden til den dobbelte Bue, eftersom Buen er mindre eller större end 90⁰.

$$3. \quad \begin{cases} s_a^2 = 2r^2 + rs_{2a}, & a < 90^0, \\ s_a^2 = 2r^2 - rs_{2a}, & a > 90^0. \end{cases}$$

Qvadratet paa en Bues Supplementchorde er saa stort som det Dobbelte af Radiens Qvadrat plus eller minus Produktet af Cirkelens Radius og Supplementchorden til den dobbelte Bue, eftersom Buen er mindre eller större end 90⁰.

Antages i (Fig. 3) Buen $AD = a$, Buen $AB = b$, saa er Buen $BD = a - b$ og antages Buen $BC = CD$, saa er hver af dem $= \frac{a-b}{2}$. Drages Chorderne AB, AC, AD, BC, BD og CD, saa er, naar man

bruger samme Betegning som för, $AD = c_a$, $AB = c_b$, $AC = c_{\frac{a+b}{2}}$, $BD = c_{a-b}$, og $BC = c_{\frac{a-b}{2}}$. Efter den Ptolomæiske Læresætning har man:

$$AD.BC + AB.CD = AC.BD;$$
$$BC = CD,$$
$$AD.BC + AB.BC = BD.AC,$$
$$AD + AB = \frac{BD}{BC} \cdot AC.$$

Indsættes ovenanförte Værdier, faaer man:

$$4. \quad c_a + c_b = \frac{c_{a-b}}{c_{\frac{a-b}{2}}} c_{\frac{a+b}{2}}.$$

Summen af to Buers Chorder er saa stor som det geometriske Forhold mellem Chorderne til Buernes Forskjel og halve Forskjel, multipliceret med Chorden til Buernes halve Sum.

Efter (1) har man $c_{\frac{a-b}{2}} s_{\frac{a-b}{2}} = r c_{a-b}$, altsaa $\frac{c_{a-b}}{c_{\frac{a-b}{2}}} = \frac{s_{\frac{a-b}{2}}}{r}$. Indsættes denne Værdie for $\frac{c_{a-b}}{c_{\frac{a-b}{2}}}$ i (4), faaer man:

$$5. \quad c_a + c_b = \frac{c_{\frac{a+b}{2}} \; s_{\frac{a-b}{2}}}{r}.$$

Summen af to Buers Chorder er saa stor som Produktet af Chorden til Buernes halve Sum og Supplementchorden til deres halve Forskjel, divideret med Cirkelens Radius.

Drages i (Fig. 3) Supplementchorderne BE, CE og DE, saa er, naar man bruger samme Betegning som i (4), $DE = s_a$, $BE = s_b$ og

$CE = s_{\frac{a+b}{2}}$. Efter (4) har man:

$$DE + BE = \frac{BD}{CD}\, CE.$$

Indsættes de ovenanförte Værdier, faaer man:

$$s_a + s_b = \frac{c_{a-b}}{c_{\frac{a-b}{2}}}\, s_{\frac{a+b}{2}},$$

men $\frac{c_{a-b}}{c_{\frac{a-b}{2}}} = \frac{s_{\frac{a-b}{2}}}{r}$ efter (1), altsaa:

$$6.\quad s_a + s_b = \frac{s_{\frac{a+b}{2}}\, s_{\frac{a-b}{2}}}{r}.$$

Summen af to Buers Supplementchorder er saa stor som Produktet af Supplementchorderne til Buernes halve Sum og halve Forskjel, divideret med Cirkelens Radius.

Anvendes i (Fig. 3) den samme Construktion og Betegning som i (4), har man:

$$BAC = FAD,$$
$$BCA = FDA,$$
$$\triangle ABC \sim \triangle AFD,$$
$$AB : AF = AC : AD,$$
$$AD.AB = AF.AC = (AC - CF)AC,$$
$$AD.AB = AC^2 - CF.AC;$$

men

$$CAD = CDF,$$
$$ACD = ACD,$$
$$\triangle ACD \sim \triangle CFD,$$

$$\frac{AC:CD = CD:CF,}{AC.CF = CD^2 = BC^2.}$$

Indsættes denne Værdie for $AC.CF$, faaer man:

$$AD.AB = AC^2 - BC^2,$$

og naar man bruger samme Betegning som för:

$$7. \quad c_a c_b = c^2_{\frac{a+b}{2}} - c^2_{\frac{a-b}{2}}.$$

Produktet af to Buers Chorder er saa stort som Forskjellen mellem Qvadraterne paa Chorderne til Buernes halve Sum og halve Forskjel.

Efter forrige Sætning har man at

$$DE.BE = CE^2 - CD^2, \text{ d. e.:}$$

$$8. \quad s_a s_b = s^2_{\frac{a+b}{2}} - c^2_{\frac{a-b}{2}}.$$

Produktet af to Buers Supplementchorder er saa stort som Forskjellen mellem Qvadraterne paa Supplementchorden til Buernes halve Sum og paa Chorden til deres halve Forskjel.

Efter (2) har man at $c^2_{\frac{a+b}{2}} = 2r^2 - rs_{a+b}$ og $c^2_{\frac{a-b}{2}} = 2r^2 - rs_{a-b}$.

Indsættes disse Værdier for $c^2_{\frac{a+b}{2}}$ og $c^2_{\frac{a-b}{2}}$ i (7), faaer man:

$$9. \quad c_a c_b = r(s_{a-b} - s_{a+b}).$$

Produktet af to Buers Chorder er saa stort som Produktet af Cirkelens Radius og Forskjellen mellem Supplementchorderne til Buernes Forskjel og Sum.

Efter (3) har man $s^2_{\frac{a+b}{2}} = 2r^2 + rs_{a+b}$ og efter (2) at $c^2_{\frac{a-b}{2}} = 2r^2 - rs_{a-b}$.

Indsættes disse Værdier for $s^2_{\frac{a+b}{2}}$ og $c^2_{\frac{a-b}{2}}$ i (8), faaer man:

10. $s_a s_b = r(s_{a-b} + s_{a+b})$.

Produktet af to Buers Supplementchorder er saa stort som Produktet af Cirkelens Radius og Summen af Supplementchorderne til Buernes Forskjel og Sum.

Det maa bemærkes med Hensyn paa Sætningerne (9) og (10), at naar $a + b$ er större end den halve Peripheri, saa er Supplementbuen negativ og fölgelig dens Chorde ogsaa negativ og lig Supplementchorden til $2\pi - (a + b)$ med modsat Fortegn, altsaa $s_{a+b} = - s_{2\pi-(a+b)}$. Herom mere i det Fölgende.

§ 2.

Forklaring. Naar et Punkt bevæger sig i en Cirkels Peripheri, saa vil Chorden, som forbinder det beskrivende Punkt med Begyndelsespunktet, ligeledes bevæge sig hen over Cirkelen, og naar Punktet har gjennemlöbet den hele Peripheri, vil Chorden kun have gjort en halv Omdreining i det den forsvinder. Naar nu Punktet begynder et nyt Omlöb, begynder Chorden at voxe paa den anden Side af Nulpunktet og maa derfor gives Fortegnet Minus, og naar Punktet har fuldendt sit andet Omlöb, vil Chorden komme i samme Stilling som om den havde gjort en heel Omdreining. Naar Punktet altsaa tredie Gang gjennemlöber Peripherien, saa er Chorden atter positiv. Heraf fölger at Chorden er positiv i ethvert ulige Antal Gange Peripherien og negativ i ethvert lige Antal Gange Peripherien. Under Punktets Bevægelse fra 0^0 til 180^0 voxer Chorden fra 0 til $2r$ og naar Punktet bevæger sig fra 180^0 til 360^0, aftager Chorden fra $2r$ til 0. Naar Punktet bevæger sig fra 360^0 til 540^0, saa voxer Chorden negativ fra 0 til $-2r$ og naar Punktet bevæger sig fra 540^0 til 720^0, saa aftager Chorden negativ fra $-2r$ til 0, o. s. v.

Da Supplementchorden er Chorde til en Bues Udfyldning til en halv Peripheri, saa fölger af ovenstaaende Forklaring, at Supplementchorden er positiv i förste Halvcirkel. Er Buen derimod over en halv Peripheri, saa er dens Udfyldning til en halv Peripheri naturligviis negativ og fölgelig Chorden til dens Udfyldning ligeledes negativ, saalænge Buen ikke er over tre halve Peripherier, d. e. saalænge Supplementbuen ikke er over en heel Peripheri. Overstiger derimod Buen tre halve Peripherier, d. e. overstiger Supplementbuen en heel Peripheri, saa vilde Chorden, ifald Buen var positiv, være negativ; fölgelig maa den nu, da Buen er negativ, være positiv. Heraf fölger altsaa at Supplementchorden er positiv i förste Halvcirkel, negativ i anden og tredie og positiv igjen i fjerde og femte, o. s. v.

Under Punktets Bevægelse i Peripherien fra 0 til 180^0 aftager Supplementchorden fra $2r$ til 0, og naar Punktet bevæger sig fra 180^0 til 360^0, voxer Supplementchorden negativ fra 0 til $-2r$. Naar Punktet bevæger sig fra 360^0 til 540^0, saa aftager Supplementchorden fra $-2r$ til 0, og naar Punktet bevæger sig fra 540^0 til 720^0, saa voxer Supplementchorden positiv fra 0 til $2r$, o. s. v.

Er Cirkelens Peripheri deelt f. Ex. i 17 ligestore Dele og man betegner Cirkelens Radius med r, Chorderne til 0; $\frac{1}{17}$, $\frac{2}{17}$, $\frac{3}{17}$, $\frac{4}{17}\ldots$, Peripheri med c_0, c_1, c_2, c_3, $c_4\ldots$, og Supplementchorderne til de samme Buer med $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\ldots$, saa er $c_0=c_{17}=c_{34}=0$, $c_1=c_{17-1}=c_{16}$, $c_5=c_{17-5}=c_{12}$, $c_{19}=c_{34-19}=-c_{15}=-c_{17-15}=-c_2$, $c_{47}=c_{51-47}=c_4$, o.s.v. $s_0=2r$, $s_1=-s_{17-1}=-s_{16}$, $s_{11}=-s_{17-11}=-s_6$, $s_{17}=-2r$, $s_{23}=s_{34-23}$ $=s_{11}=-s_{17-11}=-s_6$, $s_{28}=s_{34-28}=s_6$, o. s. v.

$s_7=c_{\frac{17}{2}-7}=c_{\frac{17}{2}-\frac{14}{2}}=c_{\frac{3}{2}}$, $s_6=c_{\frac{17}{2}-6}=c_{\frac{17}{2}-\frac{12}{2}}=c_{\frac{5}{2}}$, $s_8=c_{\frac{17}{2}-8}=c_{\frac{17}{2}-\frac{16}{2}}=c_{\frac{1}{2}}=$ $=$ Siden i 34kanten, o. s. v.

Geometrisk Behandling af den regulære 17kant.

§ 3.

Theorem. Betegnes Cirkelens Radius med r, Chorderne til $\frac{1}{17}$, $\frac{2}{17}$, $\frac{3}{17}$, $\frac{4}{17}$ ... Peripheri med c_1, c_2, c_3, c_4 ... og Supplementchorderne til de samme Buer med s_1, s_2, s_3, s_4 ..., saa er Produktet af hvilkesomhelst 4 Supplementchorder, hvis Buer eller Indices danne en geometrisk Række med 2 til Exponent, $= + r^4$, naar et lige Antal, men $= - r^4$, naar et ulige Antal Supplementchorder have samme Fortegn. Reduceres samtlige Supplementchorder i alle saadanne Produkter til förste Halvcirkel, faaer man kun to forskjellige Produkter, hvoraf hvert er $= r^4$.

Efter § 1 (1) har man:

$$c_1 s_1 = r c_2,$$
$$c_2 s_2 = r c_4,$$
$$c_4 s_4 = r c_8,$$
$$c_8 s_8 = r c_1, \text{ da } c_{16} = c_{17-16} = c_1.$$

Altsaa $\quad s_1 s_2 s_4 s_8 = r^4. \quad$ (A).

Ligeledes

$$c_3 s_3 = r c_6,$$
$$c_6 s_6 = r c_5, \text{ da } c_{12} = c_{17-12} = c_5,$$
$$c_5 s_5 = r c_7, \text{ da } c_{10} = c_{17-10} = c_7,$$
$$c_7 s_7 = r c_3, \text{ da } c_{14} = c_{17-14} = c_3.$$

Altsaa $\quad s_3 s_6 s_5 s_7 = r^4. \quad$ (A').

Havde man ved Dannelsen af det sidste Produkt först reduceret Chorden ved 4de Led, vilde man have faaet:

$$\begin{aligned} c_3\ s_3 &= rc_6, \\ c_6\ s_6 &= rc_{12}, \\ c_{12}s_{12} &= rc_{24}, \\ c_{24}s_{24} &= rc_3, \quad \text{da } c_{48} = c_{51-48} = c_3, \\ \hline s_3 s_6 s_{12} s_{24} &= r^4. \end{aligned}$$

Men da $s_{12} = -s_5$ og $s_{24} = s_{10} = -s_7$, saa faaer man, naar man indsætter disse Værdier, atter Produktet (A'). Det er ved Dannelsen af disse to Produkter (A) og (A') ligegyldigt, med hvilken Chorde man begynder, thi man kommer altid ved Reduktion til de samme Produkter, hvori alene Faktorernes Orden forandres.

Supplementchorderne i förste Halvcirkel ere saaledes deelte i to Grupper (A) og (A').

§ 4.

Oplöses Produkterne (A) og (A') efter § 1 (10) ved at forbinde to og to Supplementchorder, hvis Buer eller Indices, för nogen Reduktion er skeet, forholde sig til hinanden som 1 : 4, faaer man:

$$s_1 s_2 s_4 s_8 = (s_3 + s_5)r(s_6 - s_7)r = r^4,$$
$$s_3 s_6 s_5 s_7 = (s_2 + s_8)r(s_1 - s_4)r = r^4,$$

altsaa

$$(s_3 + s_5)r(s_6 - s_7)r = r^4,$$
$$(s_2 + s_8)r(s_1 - s_4)r = r^4.$$

Divideres disse Ligninger med r^2, faaer man:

$$\left.\begin{aligned} (s_3 + s_5)(s_6 - s_7) &= r^2, \\ (s_2 + s_8)(s_1 - s_4) &= r^2. \end{aligned}\right\} \quad \text{(B)}.$$

Udföres i en af Ligningerne (B) den antydede Multiplikation og oplöses de udkomne Produkter efter § 1 (10), faaer man:

$$(s_1 + s_3 + s_5 + s_7) - (s_2 + s_4 + s_6 + s_8) = r;$$

thi $(s_3 + s_5)(s_6 - s_7) = s_3 s_6 + s_5 s_6 - s_3 s_7 - s_5 s_7 =$
$= (s_3 - s_8 + s_1 - s_6 - s_4 + s_7 - s_2 + s_5)r = r^2$, altsaa:

$$(s_3 - s_8 + s_1 - s_6 - s_4 + s_7 - s_2 + s_5)r = r^2.$$

Divideres med r, faaer man, naar man ordner Ledene:

$$(s_1 + s_3 + s_5 + s_7) - (s_2 + s_4 + s_6 + s_8) = r. \quad \text{(C)}.$$

Theorem 1. Summen af alle Supplementchorder med ulige Indices minus Summen af alle Supplementchorder med lige Indices i samme Halvcirkel er lig Cirkelens Radius.

Ordner man derimod Ledene i Ligningen (C) efter Grupperne (A) og (A'), faaer man:

$$(s_3 + s_5 + s_7 - s_6) - (s_2 + s_4 + s_8 - s_1) = r. \quad \text{(C')}.$$

Theorem 2. Multipliceres den algebraiske Sum af Supplementchorderne af Gruppen (A') *med den algebraiske Sum af Supplementchorderne af Gruppen* (A), *begge Summer bestemte ved Ligningen* (C'), *saa er Produktet* $= 4r^2$.

Bev.

$$\begin{array}{l}
s_3 + s_5 + s_7 - s_6, \\
s_2 + s_4 + s_8 - s_1, \\
\hline
s_3 s_2 + s_5 s_2 + s_7 s_2 - s_6 s_2 = (s_1 + s_5 + s_3 + s_7 + s_5 - s_8 - s_4 - s_8)r, \\
s_3 s_4 + s_5 s_4 + s_7 s_4 - s_6 s_4 = (s_1 + s_7 + s_1 - s_8 + s_3 - s_6 - s_2 + s_7)r, \\
s_3 s_8 + s_5 s_8 + s_7 s_8 - s_6 s_8 = (s_5 - s_6 + s_3 - s_4 + s_1 - s_2 - s_2 + s_3)r, \\
-s_3 s_1 - s_5 s_1 - s_7 s_1 + s_6 s_1 = (-s_2 - s_4 - s_4 - s_6 - s_6 - s_8 + s_5 + s_7)r, \\
\hline
\text{altsaa } (s_3 + s_5 + s_7 - s_6)(s_2 + s_4 + s_8 - s_1) = (4s_1 + 4s_3 + 4s_5 + 4s_7 - 4s_2 - 4s_4 - 4s_6 - 4_8)r, \\
\qquad = 4(s_1 + s_3 + s_5 + s_7 - s_2 - s_4 - s_6 - s_8)r; \\
\text{men} \quad s_1 + s_3 + s_5 + s_7 - s_2 - s_4 - s_6 - s_8 = r. \\
\hline
\text{Altsaa} \quad (s_3 + s_5 + s_7 - s_6)(s_2 + s_4 + s_8 - s_1) = 4r^2. \quad \text{(D)}.
\end{array}$$

Ligningerne (C') og (D) kan ogsaa overeensstemmende med Ligningerne (B) skrives saaledes:

$$[(s_3+s_5)-(s_6-s_7)]-[(s_2+s_8)-(s_1-s_4)]=r, \quad (C'').$$

$$[(s_3+s_5)-(s_6-s_7)][(s_2+s_8)-(s_1-s_4)]=4r^2, \quad (D').$$

$$(s_3+s_5)(s_6-s_7)=r^2, \ (s_2+s_8)(s_1-s_4)=r^2. \quad (B).$$

Efter § 1 (10) findes:

$$\left.\begin{array}{l} s_3 s_5 = r(s_2+s_8), \ s_2 s_8 = r(s_6-s_7), \\ s_6 s_7 = r(s_1-s_4), \ s_1 s_4 = r(s_3+s_5). \end{array}\right\} \quad (E).$$

Ved at betragte de saaledes efter hinanden opstillede Ligninger, seer man let, at de indeholde en fuldstændig geometrisk Oplösning af den regulære 17kant.

§ 5.

Indsættes i Ligningen (C') forrige § istedetfor s_1 og s_6 de ligestore Værdier $-s_{16}$ og $-s_{11}$, faaer man:

$$(s_3+s_5+s_7+s_{11})-(s_2+s_4+s_8+s_{16})=r. \quad (C''').$$

Theorem 1. Summen af de fire Supplementchorder, hvis Indices ere de fire förste Primtal, der fölger efter 2, minus Summen af de fire Supplementchorder, hvis Indices ere de fire förste Potentser af 2, er lig Cirkelens Radius.

Indsættes de samme Værdier i Ligningen (D), faaer man:

$$(s_3+s_5+s_7+s_{11})(s_2+s_4+s_8+s_{16})=4r^2. \quad (D'').$$

Theorem 2. Naar Summen af de fire Supplementchorder, hvis Indices ere de fire förste Primtal, der fölger efter 2, multipliceres med Summen af de fire Supplementchorder, hvis Indices ere de fire förste Potentser af 2, saa er Produktet saa stort som det Fiirdobbelte af Radiens Qvadrat.

Dette Theorem kan ogsaa bevises saaledes:

$$s_3 + s_5 + s_7 + s_{11},$$
$$s_2 + s_4 + s_8 + s_{16},$$

$$s_3s_2 + s_5s_2 + s_7s_2 + s_{11}s_2 = (-s_{16} + s_5 + s_3 + s_7 + s_5 - s_8 - s_8 - s_4)r,$$
$$s_3s_4 + s_5s_4 + s_7s_4 + s_{11}s_4 = (-s_{16} + s_7 - s_{16} - s_8 + s_3 + s_{11} + s_7 - s_2)r,$$
$$s_3s_8 + s_5s_8 + s_7s_8 + s_{11}s_8 = (s_5 + s_{11} + s_3 - s_4 - s_{16} - s_2 + s_3 - s_2)r,$$
$$s_3s_{16} + s_5s_{16} + s_7s_{16} + s_{11}s_{16} = (-s_4 - s_2 + s_{11} - s_4 - s_8 + s_{11} + s_5 + s_7)r,$$

$$(s_3+s_5+s_7+s_{11})(s_2+s_4+s_8+s_{16}) = (4s_3+4s_5+4s_7+4s_{11}-4s_2-4s_4-4s_8-4s_{16})r,$$
$$= 4[(s_3+s_5+s_7+s_{11}) - (s_2+s_4+s_8+s_{16})]r;$$

men $\quad (s_3 + s_5 + s_7 + s_{11}) - (s_2 + s_4 + s_8 + s_{16}) = r.$

Altsaa $\quad (s_3 + s_5 + s_7 + s_{11})(s_2 + s_4 + s_8 + s_{16}) = 4r^2.$

Indsættes ligeledes i Ligningerne (B) istedetfor s_1 og s_6 de ligestore Værdier $-s_{16}$ og $-s_{11}$, faaer man:

$$\left.\begin{array}{l}(s_3 + s_5)(s_7 + s_{11}) = -r^2,\\ (s_2 + s_8)(s_4 + s_{16}) = -r^2.\end{array}\right\} \quad (B').$$

Efter § 1 (10) findes:

$$\left.\begin{array}{ll}s_3 s_5 = r(s_2 + s_8), & s_7 s_{11} = r(s_4 + s_{16}),\\ s_2 s_8 = -r(s_7 + s_{11}), & s_4 s_{16} = -r(s_3 + s_5).\end{array}\right\} \quad (E').$$

Ligningerne (C'''), (D''), (B') og (E') indeholde ogsaa en fuldstændig geometrisk Oplösning af den regulære 17kant.

§ 6.

Indsættes i Ligningerne (C'''), (D''), (B') og (E') istedetfor s_2, s_4, s_8 og s_{16} de ligestore Supplementchorder $-s_{15}$, $-s_{13}$, $-s_9$ og $-s_1$, faaer man et nyt System af Ligninger, der ligeledes indeholde en fuldstændig geometrisk Oplösning af den regulære 17kant.

$$(s_3+s_5+s_7+s_{11})+(s_1+s_9+s_{13}+s_{15})=r, \qquad (C''').$$

$$(s_3+s_5+s_7+s_{11})(s_1+s_9+s_{13}+s_{15})=-4r^2, \qquad (D''').$$

$$(s_3+s_5)(s_7+s_{11})=-r^2,\ (s_1+s_{13})(s_9+s_{15})=-r^2, \ (B'').$$

$$\left.\begin{array}{ll} s_3s_5=-r(s_9+s_{15}), & s_1s_{13}=-r(s_3+s_5), \\ s_7s_{11}=-r(s_1+s_{13}), & s_9s_{15}=-r(s_7+s_{11}). \end{array}\right\} \qquad (E'').$$

§ 7.

Efter § 4 har man fölgende to Ligninger:

$$[(s_3+s_5)-(s_6-s_7)]-[(s_2+s_8)-(s_1-s_4)]=r,$$
$$[(s_3+s_5)-(s_6-s_7)][(s_2+s_8)-(s_1-s_4)]=4r^2.$$

Sættes $(s_3+s_5)-(s_6-s_7)=y$ og $(s_2+s_8)-(s_1-s_4)=y_1$, saa har man:

$$y-y_1=r,$$
$$yy_1=4r^2,$$

$$y(y-r)=4r^2,$$

$$y^2-ry=4r^2,$$
$$\left(\frac{r}{2}\right)^2=\frac{r^2}{4},$$

$$y^2-ry+\left(\frac{r}{2}\right)^2=\frac{17}{4}r^2,$$

$$y-\frac{r}{2}=\frac{r}{2}\sqrt{17},$$

$$y=\frac{r}{2}(1+\sqrt{17}),$$

$$y_1=\frac{r}{2}(-1+\sqrt{17}).$$

Da y og y_1 ere positive, hvilket er let at see, saa maa $\sqrt{17}$ for begge tages med Fortegnet $+$.

Sættes $s_3+s_5=z$ og $s_6-s_7=z_1$, saa har man:

$$z-z_1=y,$$

$$zz_1=r^2, \text{ efter Lign. (B) § 4.}$$

$$z(z-y)=r^2,$$

$$z^2-yz=r^2,$$

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2=\frac{y^2}{4},$$

$$z^2-yz+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\frac{4r^2+y^2}{4},$$

$$z-\frac{y}{2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{(4r^2+y^2)},$$

$$z=\frac{y+\sqrt{(4r^2+y^2)}}{2},$$

$$z_1=\frac{-y+\sqrt{(4r^2+y^2)}}{2}.$$

Da z og z_1 ere positive, saa maa Rodstörrelsen tages med positivt Fortegn.

Indsættes Værdien for y, faaer man:

$$z=\frac{r}{4}[1+\sqrt{17}+\sqrt{(34+2\sqrt{17})}],$$

$$z_1=\frac{r}{4}[-1-\sqrt{17}+\sqrt{(34+2\sqrt{17})}].$$

Sættes $s_2+s_8=u$, og $s_1-s_4=u_1$, saa har man:

$$u-u_1=y_1,$$

$$uu_1=r^2, \text{ efter Lign. (B) § 4.}$$

$$u(u-y_1)=r^2,$$

$$u^2-y_1u=r^2,$$

$$\left(\frac{y_1}{2}\right)^2=\frac{y_1^2}{4},$$

$$u^2 - y_1 u + \left(\frac{y_1}{2}\right)^2 = \frac{4r^2 + y_1^2}{4},$$

$$u - \frac{y_1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4r^2 + y_1^2)},$$

$$u = \frac{y_1 + \sqrt{(4r^2 + y_1^2)}}{2},$$

$$u_1 = \frac{-y + \sqrt{(4r^2 + y_1^2)}}{2}.$$

Da u og u_1 ere positive, saa maa Rodstörrelsen for begge tages med positivt Fortegn.

Indsættes Værdien for y_1, faaer man:

$$u = \frac{r}{4}[-1 + \sqrt{17} + \sqrt{(34 - 2\sqrt{17})}],$$

$$u_1 = \frac{r}{4}[1 - \sqrt{17} + \sqrt{(34 - 2\sqrt{17})}].$$

Nu har man:

$$s_2 + s_8 = u,$$

$$s_2 s_8 = r z_1, \text{ efter Lign. (E) § 4.}$$

$$s_2(u - s_2) = r z_1,$$

$$s_2^2 - u s_2 = - r z_1,$$

$$\left(\frac{u}{2}\right)^2 = \frac{u^2}{4},$$

$$s_2^2 - u s_2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 = \frac{u^2 - 4 r z_1}{4},$$

$$s_2 - \frac{u}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(u^2 - 4 r z_1)},$$

$$s_2 = \frac{u + \sqrt{(u^2 - 4 r z_1)}}{2},$$

$$s_8 = \frac{u - \sqrt{(u^2 - 4 r z_1)}}{2}.$$

Da s_2 er större end s_8, altsaa $s_2 > \frac{u}{2}$, saa maa Rodstörrelsen i Udtrykket for s_2 tages med positivt Fortegn, hvoraf igjen fölger, at den i Udtrykket for s_8 maa tages med negativt Fortegn.

Indsættes Værdierne for u og z_1, faaer man:

$$s_2 = \frac{r}{8}[-1+\sqrt{17}+\sqrt{(34-2\sqrt{17})}+2\sqrt{(17+3\sqrt{17}-\sqrt{(170+38\sqrt{17})})}],$$

$$c_1^2 = 2r^2 - rs_2. \quad \S\ 1\ (2).$$

$$c_1^2 = \frac{32r^2}{16} - \frac{r^2}{16}[-2+2\sqrt{17}+2\sqrt{(34-2\sqrt{17})}+4\sqrt{(17+3\sqrt{17}-\sqrt{(170+38\sqrt{17})})}],$$

$$c_1^2 = \frac{r^2}{16}[34-2\sqrt{17}-2\sqrt{(34-2\sqrt{17})}-4\sqrt{(17+3\sqrt{17}-\sqrt{(170+38\sqrt{17})})}],$$

$$c_1 = \frac{r}{4}\sqrt{[34-2\sqrt{17}-2\sqrt{(34-2\sqrt{17})}-4\sqrt{(17+3\sqrt{17}-\sqrt{(170+38\sqrt{17})})}]},$$

$$s_8 = \frac{r}{8}[-1+\sqrt{17}+\sqrt{(34-2\sqrt{17})}-2\sqrt{(17+3\sqrt{17}-\sqrt{(170+38\sqrt{17})})}].$$

Ved numerisk Beregning finder man, at Siden i den regulære 17kant

$$c_1 = 0,\ 367\ 499\ 035\ 6\ .\ r,$$

og Siden i den regulære 34kant

$$s_8 = c_{\frac{1}{2}} = 0,\ 184\ 536\ 718\ 9\ .\ r.$$

Geometrisk Construktion.

§ 8.

For at construere Siden i den regulære 17kant og den regulære 34kant, har man:

1. at construere to rette Linier y og y_1, saaledes, at

$$y - y_1 = r, \quad yy_1 = 4r^2;$$

2. at construere fire rette Linier z, z_1, u og u_1, saaledes, at

$$z - z_1 = y, \quad zz_1 = r^2,$$
$$u - u_1 = y_1, \quad uu_1 = r^2;$$

3. at construere to rette Linier s_2 og s_8, saaledes, at

$$s_2 + s_8 = u, \quad s_2 s_8 = r z_1.$$

1. Opreises fra et Punkt i en ret Linie UV (Fig. 4) en lodret Linie $OA = r =$ Cirkelens Radius, gjöres $OC = \frac{1}{4}OA = \frac{1}{4}r$, og slaaes om Punktet C med en Radius CA en Cirkel, som skjær UV i Punkterne D og B, saa har man:

$$OD = \tfrac{1}{2}y, \quad OB = \tfrac{1}{2}y_1;$$

thi $\quad 2OD - 2OB = 4OC = OA = r$ og $2OD . 2OB = 4OA^2 = 4r^2$,

altsaa $\quad y - y_1 = r$ og $yy_1 = 4r^2$.

2. Drages en ret Linie fra A til D og slaaes om Punktet D med en Radius OD en Cirkel, som skjær den forlængede AD i Punkterne N og Q, saa har man:

$$AQ = z, \quad AN = z_1;$$

thi $\quad AQ - AN = 2OD = y$ og $AQ . AN = OA^2 = r^2$,

altsaa $\quad z - z_1 = y$ og $zz_1 = r^2$.

Drages ligeledes en ret Linie fra A til B og slaaes om Punktet B med en Radius OB en Cirkel, som skjær den forlængede AB i Punkterne P og M, saa har man:

$$AM = u, \quad AP = u_1;$$

thi $\quad AM - AP = 2OB = y_1$ og $AM . AP = OA^2 = r^2$,

altsaa $\quad u - u_1 = y_1$ og $uu_1 = r^2$.

3. Slaaes om A med en Radius OA en Cirkel, som skjær den forlængede AD i E, halveres NE og slaaes om dette Halveringspunkt med en Radius $= \frac{1}{2}NE$ en Cirkel, som skjær den forlængede AB i F, og om F med en Radius $AI = \frac{1}{2}AM$ en Cirkel, som skjær AD i G, og endelig om Punktet G med samme Radius en Cirkel, som skjær EQ i Punkterne

K og H, saa har man:

$$AK = s_8, \quad AH = s_2;$$

thi $$AK + AH = 2FG = 2AI = AM = u,$$

og $$AK.AH = AF^2 = AN.AE = OA.AN = rz_1,$$

altsaa $$s_2 + s_8 = u \text{ og } s_2 s_8 = rz_1.$$

$AK = s_8$ er altsaa Siden i en regulær 34kant, indskreven i en Cirkel, hvis Radius er OA, og $AH = s_2$ er Supplementchorden til $\frac{2}{17}$ af samme Cirkels Peripheri. Halverer man altsaa denne Bue, nemlig $\frac{2}{17}$ Peripheri, og drager Chorden til den ene Halvdeel, saa har man Siden i den regulære 17kant. Eller man kan afsætte Siden i 34kanten to Gange efter hinanden og drage Chorden til den Bue, som disse to Sider afskjære, saa har man ogsaa Siden i den regulære 17kant. Er altsaa $EL = LR = AK$, saa er EL Siden i den regulære 34kant, og ER Siden i den regulære 17kant.

§ 9.

Vil man have de övrige Supplementchorder, saa findes disse paa samme Maade som s_2 og s_8 fandtes.

Man har nemlig efter § 7, at

$$s_1 - s_4 = u_1, \quad s_6 - s_7 = z_1, \quad s_3 + s_5 = z,$$
$$s_1 s_4 = rz, \quad s_6 s_7 = ru_1, \quad s_3 s_5 = ru.$$

Löses disse Ligninger, finder man:

$$s_1 = \frac{r}{8}\left[1 - \sqrt{17} + \sqrt{(34 - 2\sqrt{17}) + 2\sqrt{(17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{(170 + 38\sqrt{17})})}}\right],$$

$$s_4 = \frac{r}{8}\left[-1 + \sqrt{17} - \sqrt{(34 - 2\sqrt{17}) + 2\sqrt{(17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{(170 + 38\sqrt{17})})}}\right],$$

$$s_6 = \frac{r}{8}\left[-1 - \sqrt{17} + \sqrt{(34 + 2\sqrt{17}) + 2\sqrt{(17 - 3\sqrt{17} + \sqrt{(170 - 38\sqrt{17})})}}\right],$$

$$s_7 = \frac{r}{8}\left[1+\sqrt{17}-\sqrt{(34+2\sqrt{17})}+2\sqrt{(17-3\sqrt{17}+\sqrt{(170-38\sqrt{17})})}\right],$$

$$s_3 = \frac{r}{8}\left[1+\sqrt{17}+\sqrt{(34+2\sqrt{17})}+2\sqrt{(17-3\sqrt{17}-\sqrt{(170-38\sqrt{17})})}\right],$$

$$s_5 = \frac{r}{8}\left[1+\sqrt{17}+\sqrt{(34+2\sqrt{17})}-2\sqrt{(17-3\sqrt{17}-\sqrt{(170-38\sqrt{17})})}\right].$$

Nu er:

$$\begin{aligned}
\sqrt{17} &= 4,123\,105\,6256\,17,\\
\sqrt{(17+2\sqrt{34})} &= 6,499\,708\,5512,\\
\sqrt{(17-2\sqrt{34})} &= 5,074\,819\,0853,\\
\sqrt{(170+38\sqrt{17})} &= 18,074\,236\,1878,\\
\sqrt{(170-38\sqrt{17})} &= 3,649\,929\,6184,\\
\sqrt{[17+3\sqrt{17}-\sqrt{(170+38\sqrt{17})}]} &= 3,360\,815\,4797,\\
\sqrt{[17+3\sqrt{17}+\sqrt{(170+38\sqrt{17})}]} &= 6,887\,927\,9950,\\
\sqrt{[17-3\sqrt{17}+\sqrt{(170-38\sqrt{17})}]} &= 2,877\,605\,3834,\\
\sqrt{[17-3\sqrt{17}-\sqrt{(170-38\sqrt{17})}]} &= 0,990\,329\,9974.
\end{aligned}$$

Heraf findes:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1,965\,946\,1812.r,\\
s_2 &= 1,864\,944\,4588.r,\\
s_3 &= 1,700\,434\,2714.r,\\
s_4 &= 1,478\,017\,8163.r,\\
s_5 &= 1,205\,269\,2727.r,\\
s_6 &= 0,891\,476\,7115.r,\\
s_7 &= 0,547\,325\,9801.r,\\
s_8 &= 0,184\,536\,7189.r.
\end{aligned}$$

Efter § 1 (2) har man:

$$c_1^2 = 2r^2 - rs_2, \text{ altsaa } c_1 = \sqrt{(2r^2 - rs_2)},$$
$$c_2^2 = 2r^2 - rs_4, \quad - \quad c_2 = \sqrt{(2r^2 - rs_4)},$$

$$c_3^2 = 2r^2 - rs_6, \text{ altsaa } c_3 = \sqrt{(2r^2 - rs_6)},$$
$$c_4^2 = 2r^2 - rs_8, \quad - \quad c_4 = \sqrt{(2r^2 - rs_8)},$$
$$c_5^2 = 2r^2 + rs_7, \quad - \quad c_5 = \sqrt{(2r^2 + rs_7)},$$
$$c_6^2 = 2r^2 + rs_5, \quad - \quad c_6 = \sqrt{(2r^2 + rs_5)},$$
$$c_7^2 = 2r^2 + rs_3, \quad - \quad c_7 = \sqrt{(2r^2 + rs_3)},$$
$$c_8^2 = 2r^2 + rs_1, \quad - \quad c_8 = \sqrt{(2r^2 + rs_1)}.$$

Indsættes heri de ovenfor fundne Værdier for s_1, s_2, s_3, . . ., findes c_1, c_2, c_3, c_4 . . .

Om den regulære 51kant og 85kant.

§ 10.

1. Naar man fra et Punkt i en Cirkels Peripheri afsætter en Chorde saa stor som Cirkelens Radius og fra samme Punkt en Chorde saa stor som Chorden til $\frac{5}{34}$ Peripheri eller Supplementchorden til $\frac{6}{17}$ Peripheri, saa er Forskjellen mellem de to Buer, som disse Chorder afskjære, saa stor som en $\frac{1}{51}$ Peripheri, og altsaa Chorden til disse Buers Forskjel lig Siden i en i Cirkelen indskreven regulær 51kant.

Bev. $$\frac{1}{6} - \frac{5}{34} = \frac{34-30}{204} = \frac{4}{204} = \frac{1}{51}.$$

Betegnes Siden i den regulære 51kant med $\mathfrak{s}_{51}$ og Supplementchorden til $\frac{6}{17}$ Peripheri som för med s_6, saa findes let efter den Ptolomæiske Læresætning, at $$\mathfrak{s}_{51} = \frac{rc_6 - rs_6\sqrt{3}}{2r} = \frac{c_6 - s_6\sqrt{3}}{2} \text{ eller}$$
$$\mathfrak{s}_{51} = \tfrac{1}{2}[\sqrt{(2r^2 + s_5)} - s_6\sqrt{3}].$$

Indsættes heri Værdierne for s_5 og s_6, faaer man:

$$\mathfrak{s}_{51} = \frac{r}{8}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{[34+2\sqrt{17}+2\sqrt{(34+2\sqrt{17})}-4\sqrt{(17-3\sqrt{17}-\sqrt{(170-38\sqrt{17})})}]} \\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}[-1-\sqrt{17}+\sqrt{(34+2\sqrt{17})}+2\sqrt{(17-3\sqrt{17}+\sqrt{(170-38\sqrt{17})})}].\end{array}\right.$$

Udföres Beregningen, finder man:

$$\mathfrak{s}_{51} = 0,\ 123\ 121\ 8508 . r.$$

2. Naar en Cirkels Radius er deelt i det ydre og mellemste Forhold og man fra et Punkt i Peripherien afsætter en Chorde saa stor som den störste Deel, og fra samme Punkt en Chorde saa stor som Chorden til $\frac{3}{34}$ Peripheri eller Supplementchorden til $\frac{7}{17}$ Peripheri, saa er Forskjellen mellem de to Buer, som disse Chorder afskjære, lig $\frac{1}{85}$ Peripheri, og altsaa Chorden til disse Buers Forskjel lig Siden i en i Cirkelen indskreven regulær 85kant.

Bev. $$\frac{1}{10}-\frac{3}{34}=\frac{34-30}{340}=\frac{4}{340}=\frac{1}{85}.$$

Betegnes Siden i den regulære 85kant med $\mathfrak{s}_{85}$ og Supplementchorden til $\frac{7}{17}$ Peripheri som för med s_7, saa har man efter den Ptolomæiske Læresætning:

$$2r\mathfrak{s}_{85}+s_7\sqrt{\left(4r^2-\frac{r^2}{4}(6-2\sqrt{5})\right)}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)c_7,$$

$$\mathfrak{s}_{85}=\frac{\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)c_7-\frac{r}{2}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}s_7}{2r},$$

$$\mathfrak{s}_{85}=\tfrac{1}{4}[(\sqrt{5}-1)\sqrt{(2r^2+rs_3)}-\sqrt{(10+2\sqrt{5})}s_7].$$

Indsættes heri Værdierne for s_3 og s_7, faaer man:

$$\mathfrak{s}_{85}=\frac{r}{16}\left\{\begin{array}{l}(\sqrt{5}-1)\sqrt{[34+2\sqrt{17}+2\sqrt{(34+2\sqrt{17})}+4\sqrt{(17-3\sqrt{17}-\sqrt{(170-38\sqrt{17})})}]}\\ -\frac{1}{2}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}[1+\sqrt{17}-\sqrt{(34+2\sqrt{17})}+2\sqrt{(17-3\sqrt{17}+\sqrt{(170-38\sqrt{17})})}].\end{array}\right.$$

Udföres Beregningen, findes:

$$\mathfrak{s}_{85}=0,073\ 902\ 9937.r.$$

Anmærkning.

Medens nærværende Afhandling var under Pressen, har jeg fundet, at naar n er et Primtal og $\frac{n-1}{2}$ et sammensat Tal $= 2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}\ldots$, saa kan Cirkelperipheriens Deling i n ligestore Dele ved de i § 1 anförte Sætninger i Forbindelse med Læren om Ligninger reduceres til Oplösningen af α Ligninger af 2den Grad, β Ligninger af 3die Grad, γ Ligninger af 5te Grad, o. s. v. Herover agter jeg ved en anden Leilighed at levere en Afhandling.

Dimittenderne fra Christiania Kathedralskole
1854.

---

1. *Niels Johan Julius Aars*, 18 Aar gl., Sön af afg. Overkrigscommissær *Aars* i Christiania.
2. *Carl Martin Bader*, 19 Aar gl., Sön af afg. Instrumentmager *Bader* i Christiania.
3. *Carl Johan Due*, 17 Aar gl., Sön af Statsminister *Due* i Stockholm, R. af Seraphimer O., m. m.
4. *Peter Andreas Hagbarth Fougner*, 17 Aar gl., Sön af Sorenskriver *G. Fougner* paa Ringerike, R. V. O.
5. *Justin Gottfried Andreas Hoffmann*, 17 Aar gl., Sön af Kjöbmand *P. C. Hoffmann* i Christiania.
6. *Marcus Plöen Ingstad*, 17 Aar gl., Sön af Assessor *Ingstad* i Christiania.
7. *Johan Theodor Anastasius Stang*, 17 Aar gl., Sön af Statsraad *Stang* i Christiania, C. St. O., C. D. O.

Paa Rektors, övrige Medlæreres og egne Vegne giver jeg mig den Ære at indbyde Disciplenes Forældre og Foresatte, samt enhver Anden, der interesserer sig for Underviisningen, til at overvære den offentlige Examen, der begynder Tirsdag den 27de Juni og fortsættes de fölgende Dage i den Orden, som hosföiede Tabel udviser.

Christiania den 15de Juni 1854.

J. Odén.

Examens-Tabel.

Dage.	Formiddag.	Eftermiddag.
Tirsdag den 27de Juni.	7 Klasse, 6 —, 5 —, 4 —, 3 — Latinsk Stiil. 2 — a. Regning. *Odén.* 1 — Religion. *Vogt.*	3 Klasse Græsk. *Brock.* 2 — b. Religion. *Vogt.*
Onsdag den 28de Juni.	7 Klasse, 6 —, 5 —, 4 —, 3 — Norsk Stiil. 2 — a. Religion. *Vogt.* 1 — Historie. *Coucheron.*	7 og 6 Klasse Lat. Oversættelse. 5 — Fransk. *Bekkevold.* 4 — b. Græsk. *Brock.*
Torsdag den 29de Juni.	7 Klasse Latin. *Thaasen.* 6 — Religion. *Vogt.* 5 — a. Mathematik. *Odén.* 4 — Fransk. *Bekkevold.* 3 — b. Historie. *Brock.* 2 — b. Norsk. *Coucheron.*	5 Klasse Tysk. *Bekkevold.* 4 — a. Mathematik. *Odén.* 3 — a. Tysk. *Coucheron.* 2 — a. Geographi. *Vogt.*
Fredag den 30te Juni.	6 Klasse a. Latin. *Thaasen.* 5 — Geographi. *Bekkevold.* 4 — b. Mathematik. *Odén.* 3 — b. Tysk. *Coucheron.* 2 — a. Norsk. *Knudsen.* 1 — a. Latin. *Magnus.*	4 Klasse a. Græsk. *Brock.* 3 — Religion. *Vogt.* 2 — b. Regning. *Coucheron.*
Löverdag den 1ste Juli.	6 Klasse Fransk og Tysk. *Bekkevold.* 5 — a. Græsk. *Brock.* 4 — Tysk. *Bödtker.* 3 — a. Mathematik. *Odén.* 2 — b. Geographi. *Vogt.* 1 — Regning. *Coucheron.*	7 Klasse Religion. *Vogt.* 5 — b. Mathematik. *Odén.* 4 — b. Historie. *Brock.* 3 —, 2 —, 1 — Kalligr. og Tegn. *Magnus.*

Dage.	Formiddag.	Eftermiddag.
Mandag den 3die Juli.	7 Klasse Fransk og Tysk. *Bekkevold.* 6 — Græsk. *Rector.* 5 — Historie. *Brock.* 4 — a. Latin. *Bödtker.* 3 — b. Mathematik. *Odén.* 2 — a. Tysk. *Coucheron.* 1 — b. Latin. *Magnus.*	7 og 6 Klasse Gymnastik Kl. 4 5 - 4 — Do. - 4½ 3 — Do. - 5 2 — Do. - 5½ 1 — Do. - 6 *Hagemann.*
Tirsdag den 4de Juli.	7 Klasse Historie og Geogr. *Bekkevold.* 6 — a. Mathematik. *Odén.* 5 — Religion. *Vogt.* 4 — b. Latin. *Bödtker.* 3 — a. Latin. *Kinck.* 2 — a. Historie. *Brock.*	6 Klasse b. Latin. *Thaasen.* 5 — b. Græsk. *Brock.* 3 — a. Norsk. *Knudsen.*
Onsdag den 5te Juli.	7 Klasse Mathematik. *Odén.* 6 — Historie og Geogr. *Bekkevold.* 5 — Latin. *Bödtker.* 4 — a. Historie. *Brock.* 3 — b. Latin. *Kinck.* 2 — b. Tysk. *Coucheron.* 1 — Geographi. *Vogt.*	6 Klasse b. Mathematik. *Odén.* 4 — Religion. *Vogt.* 3 — b. Norsk. *Knudsen.* 3 — a. Historie. *Brock.* 2 — b. Latin. *Kinck.*
Torsdag den 6te Juli.	7 Klasse Græsk. *Rector.* 4 — Geographi. *Bekkevold.* 3 — Geographi. *Vogt.* 2 — a. Latin. *Kinck.* 2 — b. Historie. *Coucheron.* 1 — Norsk. *Magnus.*	

Examen begynder hver Formiddag Kl. 8, og hver Eftermiddag Kl. 4.

Fig. 1.

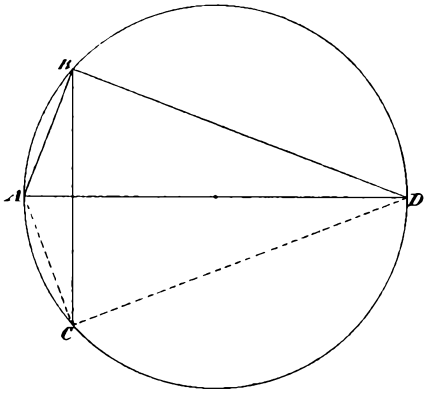


Fig. 2.

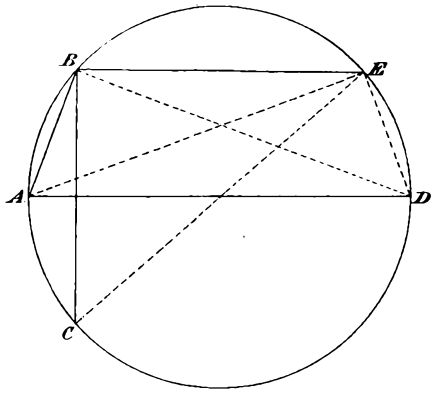


Fig. 3.

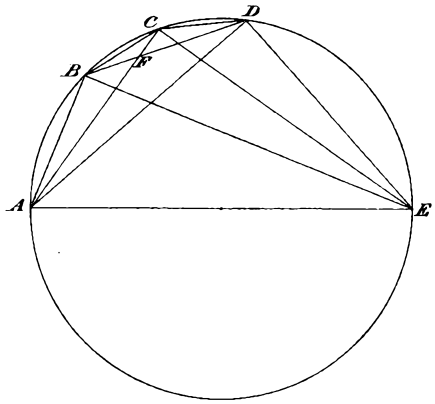
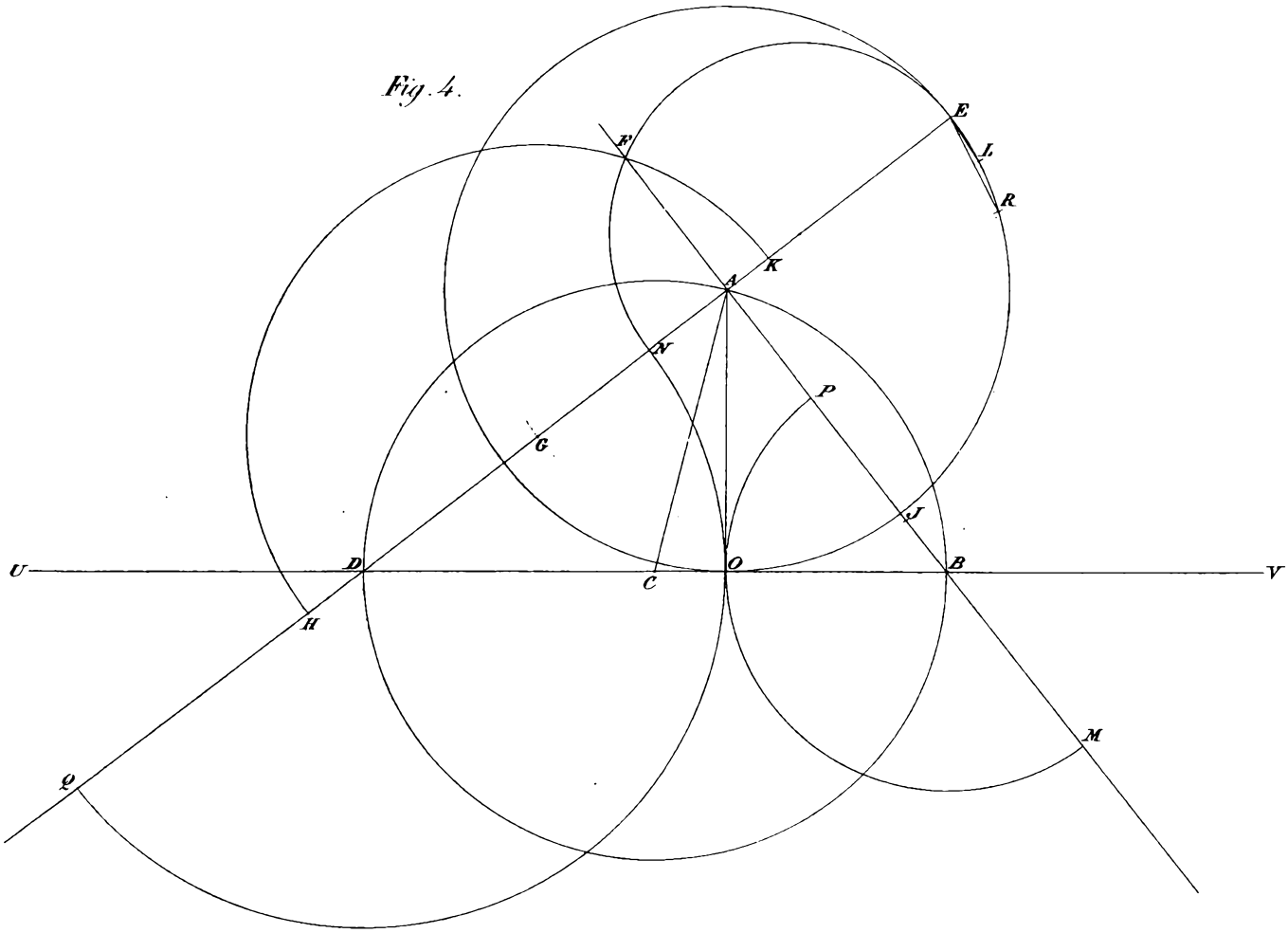


Fig. 4.



Fehr jun litho