Indbydelsesskrift

TIL

DEN OFFENTLIGE EXAMEN

I

CHRISTIANIA KATHEDRALSKOLE

1856.

Om Cirkelliniens Deling i n ligestore Dele, samt Anvendelse af en ny Methode til at reducere denne Opgave, naar n er et Primtal og $\frac{n-1}{2}$ et sammensat Tal $= 2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}\ldots$, til en Opløsning af α Ligninger af 2den Grad, β Ligninger af 3die Grad, γ Ligninger af 5te Grad o. s. v. Af J. Odén.

CHRISTIANIA.

Trykt i P. T. Mallings Bogtrykkeri.

Indbydelsesskrift

TIL

DEN OFFENTLIGE EXAMEN

I

CHRISTIANIA KATHEDRALSKOLE

1856.

Om Cirkelliniens Deling i n ligestore Dele, samt Anvendelse af en ny Methode til at reducere denne Opgave, naar n er et Primtal og $\frac{n-1}{2}$ et sammensat Tal $= 2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}\ldots$, til en Opløsning af α Ligninger af 2den Grad, β Ligninger af 3die Grad, γ Ligninger af 5te Grad o. s. v. Af J. Odén.

CHRISTIANIA.

Trykt i P. T. Mallings Bogtrykkeri.

OM

CIRKELLINIENS DELING I N LIGESTORE DELE,

samt

Anvendelse af en ny Methode til at reducere denne Opgave, naar n er et Primtal og $\frac{n-1}{2}$ et sammensat Tal $= 2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}\ldots$, til en Oplösning af α Ligninger af 2den Grad, β Ligninger af 3die Grad, γ Ligninger af 5te Grad o. s. v.

Af

J. Odén,

Adjunkt ved Christiania Kathedralskole.

INDLEDNING.

I mit Program „Geometrisk Behandling og Construktion af den regulære 17kant, Chr. 1854“ har jeg i en Anmærkning anført, at jeg havde fundet, at Cirkelliniens Deling i n ligestore Dele, naar n er et Primtal og $\frac{n-1}{2}$ et sammensat Tal $= 2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}\ldots.$, kan ved Hjælp af de i ovennævnte Program anførte Sætninger i Forbindelse med Læren om Ligninger reduceres til Opløsningen af α Ligninger af 2den Grad, β Ligninger af 3die Grad, γ Ligninger af 5te Grad o. s. v. Det er den heri udtalte Sætning, jeg har gjort til Gjenstand for nærværende Afhandling, idet jeg tillige har forudskikket en Udvikling af de Ligninger, af hvis Opløsning Cirkelliniens Deling i et givet Antal ligestore Dele i Almindelighed er afhængig.

Som bekjendt har den for kort siden afdøde Geometer Professor Gauss i Gøttingen i sit Værk Disquisitiones arithmeticæ ved Hjælp af den høiere Arithmetik først beviist, at, naar n er et Primtal og $n-1 = 2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}\ldots$, saa kan Cirkelliniens Deling i n ligestore Dele stedse reduceres til Opløsningen af α Ligninger af 2den Grad, β Ligninger af 3die Grad, γ Ligninger af 5te Grad o. s. v., hvilken Sætning ikke er væsentlig forskjellig fra den Sætning, jeg her har behandlet. Over Gauss's Opfindelse yttrer Professor Grunert sig i sin Fortsættelse af Klügels mathematische Wörterbuch 5ter Theil pag. 801 saaledes: „- - - und in der That ist seit Euclid die Theorie der Eintheilung des Kreises in gleiche Theile um keinen Schritt wesentlich gefördert worden, bis im Jahre 1801 Gauss eine seiner glänzendsten Entdeckungen bekant machte. Er hat nämlich folgenden merkwürdigen Satz gefunden: Wenn die Seitenzahl n eines regulären Polygons eine Primzahl, und $n-1 = 2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}\ldots$ ist; so läszt sich die Eintheilung des Kreises in n gleiche Theile immer auf die Auflösung von α Gleichungen des 2ten, β Gleichungen des 3ten, γ Gleichungen des 5ten Grades u. s. f. zurückführen. Der Beweis dieses Satzes beruht auf sehr feinen Unter-

suchungen der höhern Arithmetik, und hängt unmittelbar mit der Auflösung einer gewissen merkwürdigen Klasse von Gleichungen zusammen, kann aber hier, ohne zu grosse Weitläufigkeit nicht mitgetheilt werden. Wir haben daher diese merkwürdige und wichtige Theorie in die Zusätze zu diesem Werke, in den Artikel Gleichung, verwiesen, wo sie ganz und im Zusammenhange dargestellt werden soll.*) Der 7te Abschnitt (De æquationibus circuli sectiones definientibus) der Disquisitiones arithmeticæ (Lips. 1801.) des berühmten deutschen Geometers giebt über diesen Gegenstand die vollständigste und beste Belehrung, hängt aber innig mit dem Gegenstande des ganzen Werkes zusammen. Auch in Legendre Théorie des nombres, V. Partie p. 435—480, ist eine klare Darstellung dieser Untersuchungen gegeben. Ausserdem s. m. noch eine Abhandlung von Abel in Crelles Journal. IV. 2. 5. 131, (Oeuvres complétes de N. H. Abel Tome I. XI p. 114), wo die Untersuchung zugleich noch erweitert ist.“ Hertil maa endnu føies, at Lagrange ogsaa har behandlet den samme Materie i Traité de la resolution des équations numériques de tous les degrés. Nouvelle edition. Note XIV. Endelig har Serret i Cours d'Algèbre supérieure, Paris 1849, givet en temmelig udførlig Fremstilling af den hele Theori.

Af det Anførte sees, at de største og skarpsindigste Geometere have gjort den omhandlede Sætning til Gjenstand for deres Undersøgelser. Imidlertid forekommer det mig dog, at de hidtil givne Fremstillinger lade Adskilligt tilbage at ønske med Hensyn til Klarhed og Simpelhed. Grunden hertil er efter min Formening deels den, at man ikke synes at have valgt det rette Standpunkt at betragte Sagen fra, deels ogsaa at, uagtet det er et geometrisk Spørgsmaal, som her afhandles, man dog i de givne Fremstillinger intet anskueligt Billede har at fæste Tanken til, hvilket bevirker, at Opfattelsen bliver vanskelig og har tillige til Følge, at man i den praktiske Anvendelse er let udsat for at feile.

I nærværende Afhandling ligesom i mit Program „Geometrisk Behandling og Construktion af den regulære 17kant,“ har jeg betragtet Sagen fra et geometrisk Standpunkt. Istedetfor de imaginære Størrelser $r, r^2, r^3, r^4 \ldots r^{n-1}$, $\left(r = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$ hos Gauss, Legendre, Abel o. f. har jeg substitueret de reelle Størrelser $s_1, s_2, s_3, s_4 \ldots s_{n-1}$, hvilke ere Supplementchorder til $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}$ Cirkellinie, og man har saaledes blot geometriske og let anskuelige Størrelser at behandle. Efter først at have godtgjort, at Summen af alle Supplementchorder med ulige Indices minus Summen af alle

*) Hvilket saavidt mig bekjendt endnu ikke er skeet, thi i de to Supplementbind, som Forfatteren har udgivet, findes Intet derom.

Supplementchorder med lige Indices i første Halvcirkel af enhver i en Cirkel indskreven regulær $(2p + 1)$ kant er lig Cirkelens Radius, hvilket ogsaa følger af Ligningen for den regulære $(2p + 1)$ kant, har jeg dernæst viist, at man ved Anvendelse af den geometriske Sætning § 1. 1 i mit ovennævnte Program kan, naar $2p + 1$ er et Primtal, ordne Supplementchorderne i en geometrisk Række, og, naar p er et sammensat Tal, dele dem i Grupper eller Perioder bestemte ved de Faktorer, som p indeholder. For Multiplikationen af to Perioder bestaaende af samme Antal Led, forresten lige eller ulige, har jeg fundet et høist mærkeligt Theorem, hvorved Multiplikationen reduceres til en simpel Addition og Subtraktion af et eneste Leds Index i den ene Faktor til og fra hvert Leds Index i den anden Faktor. Ved de her i Korthed antydede Sætninger har jeg viist, at den omhandlede Reduktion kan udføres.

Da nærværende Afhandling for største Delen grunder sig paa de 10 i mit Program „Geometrisk Behandling og Construktion af den regulære 17kant" Christiania 1854 § 1 fremsatte og beviste Sætninger af den elementære Geometri, saa har jeg troet for større Beqvemheds Skyld at burde anføre dem samlede her, for siden at kunne henvise hertil, idet jeg fremdeles hvad Beviserne angaaer maa henvise til ovennævnte Program.

§ 1.

Betegnes en Cirkelbue med a, saa betegnes stedse Chorden til denne Bue med c_a og Supplementchorden med s_a.

1) *Produktet af en Bues Chorde og dens Supplementchorde er saa stort som Produktet af Cirkelens Radius og Chorden til den dobbelte Bue.*

$$c_a s_a = r c_{2a}.$$

2) *Qvadratet paa en Bues Chorde er saa stort som det Dobbelte af Radiens Qvadrat minus Produktet af Cirkelens Radius og Supplementchorden til den dobbelte Bue.*

$$c_a^2 = 2r^2 - r s_{2a}.$$

3) *Qvadratet paa en Bues Supplementchorde er saa stort som det Dobbelte af Radiens Qvadrat plus Produktet af Cirkelens Radius og Supplementchorden til den dobbelte Bue.*

$$s_a^2 = 2r^2 + r s_{2a}.$$

4) *Summen af to Buers Chorder er saa stor som det geometriske Forhold mellem Chorderne til Buernes Forskjel og halve Forskjel, multipliceret med Chorden til Buernes halve Sum.*

$$c_a + c_b = \frac{c_{a-b}}{c_{\frac{a-b}{2}}} c_{\frac{a+b}{2}}.$$

5) *Summen af to Buers Chorder er saa stor som Produktet af Chorden til Buernes halve Sum og Supplementchorden til deres halve Forskjel, divideret med Cirkelens Radius.*

$$c_a + c_b = \frac{c_{\frac{a+b}{2}} \; s_{\frac{a-b}{2}}}{r}.$$

6) *Summen af to Buers Supplementchorder er saa stor som Produktet af Supplementchorderne til Buernes halve Sum og halve Forskjel, divideret med Cirkelens Radius.*

$$s_a + s_b = \frac{s_{\frac{a+b}{2}} \; s_{\frac{a-b}{2}}}{r}.$$

7) *Produktet af to Buers Chorder er saa stort som Forskjellen mellem Qvadraterne paa Chorderne til Buernes halve Sum og halve Forskjel.*

$$c_a c_b = c^2_{\frac{a+b}{2}} - c^2_{\frac{a-b}{2}}.$$

8) *Produktel af to Buers Supplementchorder er saa stort som Forskjellen mellem Qvadraterne paa Supplementchorden til Buernes halve Sum og paa Chorden til deres halve Forskjel.*

$$s_a s_b = s^2_{\frac{a+b}{2}} - c^2_{\frac{a-b}{2}}.$$

9) *Produktet af to Buers Chorder er saa stort som Produktet af Cirkelens Radius og Forskjellen mellem Supplementchorderne til Buernes Forskjel og Sum.*

$$c_a c_b = r(s_{a-b} - s_{a+b}).$$

10) *Produktet af to Buers Supplementchorder er saa stort som Produktet af Cirkelens Radius og Summen af Supplementchorderne til Buernes Forskjel og Sum.*

$$s_a s_b = r(s_{a-b} + s_{a+b}).$$

Om Cirkelliniens Deling i n ligestore Dele.

§ 1.

Tænkes Cirkellinien deelt i n ligestore Dele og rette Linier dragne fra et af Delingspunkterne til alle de øvrige og, saafremt n er et ulige Tal, tillige en Diameter dragen fra samme Punkt; tænkes fremdeles rette Linier dragne fra Diameterens andet Endepunkt til alle Delingspunkter, saa faaer man n—1 Chorder og n—1 Supplementchorder, hvoriblandt Diameteren ogsaa er regnet, naar n er et lige Tal. Betegnes Chorderne til o, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, . . . $\frac{n-1}{n}$ Cirkellinie med c_0, c_1, c_2, c_3 . . c_{n-1} og Supplementchorderne til de samme Buer med s_0, s_1, s_2 . . . . s_{n-1}, saa er $c_0 = o$, c_1 er Siden i en regulær nkant, c_2, c_3, c_4 . . . . c_{n-1} ere Diagonaler i nkanten eller Sider i regulære nkantede Stjernepolygoner; $s_0 = 2r$, og er n et ulige Tal, saa er $s_{\frac{n-1}{2}}$ Siden i en regulær 2nkant, $s_{\frac{n-1}{2}} = c_{\frac{n}{2} - \frac{n-1}{2}} = c_{\frac{1}{2}}$, og s_1, s_2, s_3 . . o. s. v. ere Sider i regulære 2nkantede Stjernepolygoner. Er derimod n et lige Tal, saa er $c_{\frac{n}{2}} = s_0 = 2r$, $s_1 = c_{\frac{n}{2} - 1} = c_{\frac{n-2}{2}}$, $s_2 = c_{\frac{n}{2} - 2} = c_{\frac{n-4}{2}}$ o. s. v. f. Ex. i den regulære 12kant er

$$s_1 = c_{\frac{12}{2} - 1} = c_{\frac{12-2}{2}} = c_5,$$

$$s_2 = c_{\frac{12}{2} - 2} = c_{\frac{12-4}{2}} = c_4,$$

$$s_3 = c_{\frac{12}{2} - 3} = c_{\frac{12-6}{2}} = c_3,$$

$$s_4 = c_{\frac{12}{2} - 4} = c_{\frac{12-8}{2}} = c_2,$$

$$s_5 = c_{\frac{12}{2} - 5} = c_{\frac{12-10}{2}} = c_1.$$

Naar altsaa n er et lige Tal, saa danne Supplementchorderne Sider i regulære Stjernepolygoner, der ere congruente med de Stjernepolygoner, som dannes af Chorderne. Da Chorderne i første Halvcirkel ere parviis ligestore med Chorderne i anden Halvcirkel $c_1 = c_{n-1}$, $c_2 = c_{n-2}$, $c_3 = c_{n-3}$ o. s. v., og da Supplementchorderne i første Halvcirkel ere parviis ligestore med Supplementchorderne i anden Halvcirkel $s_1 = -s_{n-1}$, $s_2 = -s_{n-2}$, $s_3 = -s_{n-3}$ o. s. v. og blot forskjellige med Hensyn til Fortegnet, saa kan man a priori slutte, at Opgaven at dele Cirkellinien i n ligestore Dele ikke kan stige høiere end til $\frac{n-1}{2}$ Grad eller i alt Fald let maa kunne reduceres dertil, thi hvad enten man vælger Chorderne eller Supplementchorderne til denne Bestemmelse, saa har man kun $\frac{n-1}{2}$ forskjellige Størrelser, og

disse maae kunne bestemmes ved en Ligning af $\frac{n-1}{2}$ Grad. Er n et sammensat Tal, saa indsees det let af Cirkelliniens Natur, at Opgaven maa kunne reduceres til lavere Grader. Jeg skal i det Følgende udvikle de Ligninger, af hvis Opløsning Cirkelliniens Deling i et givet Antal ligestore Dele er afhængig og vise, at disse Ligninger stedse kunne reduceres til $\frac{n-1}{2}$ Grad.

Om den Afhængighed, der finder Sted mellem Siden i en regulær nkant og Siderne i nkantede Stjernepolygoner, eller Diagonalerne i nkanten.

§ 2.

Efter § 1. 4 i mit Program Geometrisk Behandling og Construktion af den regulære 17kant (Indl. § 1. 4.) har man:

$$c_1 + c_3 = \frac{c_2}{c_1} c_2, \text{ altsaa } \frac{c_3}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \frac{c_2}{c_1} - 1.$$

$$c_2 + c_4 = \frac{c_2}{c_1} c_3, \quad - \quad \frac{c_4}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \frac{c_3}{c_1} - \frac{c_2}{c_1},$$

$$c_3 + c_5 = \frac{c_2}{c_1} c_4, \quad - \quad \frac{c_5}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \frac{c_4}{c_1} - \frac{c_3}{c_1},$$

$$c_4 + c_6 = \frac{c_2}{c_1} c_5, \quad - \quad \frac{c_6}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \frac{c_5}{c_1} - \frac{c_4}{c_1},$$

$$c_5 + c_7 = \frac{c_2}{c_1} c_6, \quad - \quad \frac{c_7}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \frac{c_6}{c_1} - \frac{c_5}{c_1},$$

$$c_6 + c_8 = \frac{c_2}{c_1} c_7, \quad - \quad \frac{c_8}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \frac{c_7}{c_1} - \frac{c_6}{c_1},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$c_{n-2} + c_n = \frac{c_2}{c_1} c_{n-1}, \text{ altsaa } \frac{c_n}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \frac{c_{n-1}}{c_1} - \frac{c_{n-2}}{c_1}.$$

Heraf findes ved at indsætte Værdien af hver foregaaende Ligning i den efterfølgende:

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^1,$$

$$\frac{c_3}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 - 1,$$

$$\frac{c_4}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^3 - 2\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^1,$$

$$\frac{c_5}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^4 - 3\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 + 1,$$

$$\frac{c_6}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^5 - 4\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^3 + 3\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^1,$$

$$\frac{c_7}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^6 - 5\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^4 + 6\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 - 1,$$

$$\frac{c_8}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^7 - 6\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^5 + 10\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^3 - 4\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^1,$$

$$\frac{c_9}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^8 - 7\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^6 + 15\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^4 - 10\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 + 1,$$

$$\frac{c_{10}}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^9 - 8\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^7 + 21\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^5 - 20\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^3 + 5\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^1,$$

$$\frac{c_{11}}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{10} - 9\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^8 + 28\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^6 - 35\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^4 + 15\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 - 1,$$

$$\frac{c_{12}}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{11} - 10\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^9 + 36\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^7 - 56\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^5 + 35\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^3 - 6\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^1,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{c_n}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-1} - (n-2)\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3.}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-7} +$$

$$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4.}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-9} - \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)\,n-10)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5.}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-11} + \ldots.$$

Ved at betragte denne Udvikling sees, at Coefficienten for

2det Led er det	almindelige	Led i Rækken	1, 2, 3, 4, 5, 6	n.
3die Led er det	—	Led i Rækken	1, 3, 6, 10, 15	$\frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}$.
4de Led er det	—	Led i Rækken	1, 4, 10, 20, 35	$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$.
5te Led er det	—	Led i Rækken	1, 5, 15, 35	$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$
o. s. v.			o. s. v.	

Naar det nu bemærkes, at Coefficienten for 2det Led er det (n—2)det Led af 1ste Række, Coefficienten for 3die Led er det (n—4)de Led af 2den Række, Coefficienten for 4de Led er det (n—6)te Led af 3die Række, o. s. v., saa indsees Rigtigheden af ovenstaaende Udvikling for $\frac{c_n}{c_1}$.

Efter mit Program Geom. Constr. og Behandling af den regulære 17kant § 1. 1. (Indl. § 1. 1.) har man $c_1 s_1 = r c_2$, altsaa $\frac{c_2}{c_1} = \frac{s_1}{r} = \frac{\sqrt{4r^2 - c_1^2}}{r}$. Indsættes denne Værdi for $\frac{c_2}{c_1}$ i de foregaaende Ligninger, saa kunne Siderne i de regulære Stjernepolygoner findes, naar Siden i den regulære Polygon, hvori de ere Diagonaler, er given.

Supplementchordernes Afhængighed af hinanden.

§ 3.

Er Cirkellinien deelt i n ligestore Dele, saa har man efter Indl. § 1 . 6

$$s_0 + s_2 = \frac{s_1^2}{r}, \quad \text{altsaa} \quad rs_2 = s_1^2 - 2r^2,$$

$$s_1 + s_3 = \frac{s_1 s_2}{r}, \quad - \quad rs_3 = s_1 s_2 - rs_1,$$

$$s_2 + s_4 = \frac{s_1 s_3}{r}, \quad - \quad rs_4 = s_1 s_3 - rs_2,$$

$$s_3 + s_5 = \frac{s_1 s_4}{r}, \quad - \quad rs_5 = s_1 s_4 - rs_3,$$

$$s_4 + s_6 = \frac{s_1 s_5}{r}, \quad - \quad rs_6 = s_1 s_5 - rs_4,$$

$$s_5 + s_7 = \frac{s_1 s_6}{r}, \quad - \quad rs_7 = s_1 s_6 - rs_5,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$s_{n-2} + s_n = \frac{s_1 s_{n-1}}{r}, \quad - \quad rs_n = s_1 s_{n-1} - rs_{n-2}.$$

Heraf findes Supplementchorderne bestemte ved s_1

$$\begin{aligned}
rs_2 &= s_1^2 - 2r^2, \\
r^2 s_3 &= s_1^3 - 3r^2 s_1, \\
r^3 s_4 &= s_1^4 - 4r^2 s_1^2 + 2r^4, \\
r^4 s_5 &= s_1^5 - 5r^2 s_1^3 + 5r^4 s_1, \\
r^5 s_6 &= s_1^6 - 6r^2 s_1^4 + 9r^4 s_1^2 - 2r^6, \\
r^6 s_7 &= s_1^7 - 7r^2 s_1^5 + 14r^4 s_1^3 - 7r^6 s_1,
\end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$r^{n-1}s_n = s_1^n - nr^2s_1^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\,.\,2}r^4s_1^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}r^6s_1^{n-6} + \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^p\, n(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+2)(n-2p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,p}r^{2p}s_1^{n-2p} + \ldots$$

$$s_0 + s_4 = \frac{s_2{}^2}{r}, \quad \text{altsaa} \quad rs_4 = s_2{}^2 - 2r^2,$$

$$s_2 + s_6 = \frac{s_2s_4}{r}, \quad - \quad rs_6 = s_2s_4 - rs_2,$$

$$s_4 + s_8 = \frac{s_2s_6}{r}, \quad - \quad rs_8 = s_2s_6 - rs_4,$$

$$s_6 + s_{10} = \frac{s_2s_8}{r}, \quad - \quad rs_{10} = s_2s_8 - rs_6,$$

$$s_8 + s_{12} = \frac{s_2s_{10}}{r}, \quad - \quad rs_{12} = s_2s_{10} - rs_8,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$s_{2n-4} + s_{2n} = \frac{s_2s_{2n-2}}{r}, \quad - \quad rs_{2n} = s_2s_{2n-2} - rs_{2n-4}.$$

Heraf findes Supplementchorderne bestemte ved s_2

$$\begin{aligned}
rs_4 &= s_2{}^2 - 2r^2,\\
r^2s_6 &= s_2{}^3 - 3r^2s_2,\\
r^3s_8 &= s_2{}^4 - 4r^2s_2{}^2 + 2r^4,\\
r^4s_{10} &= s_2{}^5 - 5r^2s_2{}^3 + 5r^4s_2, \qquad\qquad (B)\\
r^5s_{12} &= s_2{}^6 - 6r^2s_2{}^4 + 9r^4s_2{}^2 - 2r^6,\\
r^6s_{14} &= s_2{}^7 - 7r^2s_2{}^5 + 14r^4s_2{}^3 - 7r^6s_2,\\
r^7s_{16} &= s_2{}^8 - 8r^2s_2{}^6 + 20r^4s_2{}^4 - 16r^6s_2{}^2 + 2r^8,
\end{aligned}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$r^{n-1}s_{2n} = s_2^n - nr^2s_2^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\,.\,2}r^4s_2^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}r^6s_2^{n-6} +$$

$$\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}r^8s_2^{n-8} \ldots + \frac{(-1)^p\, n(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,p}r^{2p}s_2^{n-2p} + \ldots$$

$$s_0 + s_6 = \frac{s_3^2}{r}, \quad \text{altsaa} \quad rs_6 = s_3^2 - 2r^2,$$

$$s_3 + s_9 = \frac{s_3 s_6}{r}, \quad - \quad rs_9 = s_3 s_6 - rs_3,$$

$$s_6 + s_{12} = \frac{s_3 s_9}{r}, \quad - \quad rs_{12} = s_3 s_9 - rs_6,$$

$$s_9 + s_{15} = \frac{s_3 s_{12}}{r}, \quad - \quad rs_{15} = s_3 s_{12} - rs_9,$$

$$s_{12} + s_{18} = \frac{s_3 s_{15}}{r}, \quad - \quad rs_{18} = s_3 s_{15} - rs_{12},$$

$$s_{15} + s_{21} = \frac{s_3 s_{18}}{r}, \quad - \quad rs_{21} = s_3 s_{18} - rs_{15},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$s_{3n-6} + s_{3n} = \frac{s_3 s_{3n-3}}{r}, \quad - \quad rs_{3n} = s_3 s_{3n-3} - rs_{3n-6}.$$

Heraf findes Supplementchorderne bestemte ved s_3

$$\begin{aligned}
rs_6 &= s_3^2 - 2r^2, \\
r^2 s_9 &= s_3^3 - 3r^2 s_3, \\
r^3 s_{12} &= s_3^4 - 4r^2 s_3^2 + 2r^4, \\
r^4 s_{15} &= s_3^5 - 5r^2 s_3^3 + 5r^4 s_3, \\
r^5 s_{18} &= s_3^6 - 6r^2 s_3^4 + 9r^4 s_3^2 - 2r^6, \\
r^6 s_{21} &= s_3^7 - 7r^2 s_3^5 + 14r^4 s_3^3 - 7r^6 s_3, \\
r^7 s_{24} &= s_3^8 - 8r^2 s_3^6 + 20r^4 s_3^4 - 16r^6 s_3^2 + 2r^8,
\end{aligned} \tag{C}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$r^{n-1} s_{3n} = s_3^n - nr^2 s_3^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \,.\, 2} r^4 s_3^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} r^6 s_3^{n-6} -$$

$$\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} r^8 s_3^{n-8} \ldots + \frac{(-1)^p n(n-p-1)\ldots(n-2p+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, \ldots \,.\, p} r^{2p} s_3^{n-2p} + \ldots$$

$$s_0 + s_8 = \frac{s_4^2}{r}, \quad \text{altsaa} \quad rs_8 = s_4^2 - 2r^2,$$

$$s_4 + s_{12} = \frac{s_4 s_8}{r}, \quad - \quad rs_{12} = s_4 s_8 - rs_4,$$

$$s_8 + s_{16} = \frac{s_4 s_{12}}{r}, \quad \text{altsaa} \quad rs_{16} = s_4 s_{12} - rs_8,$$

$$s_{12} + s_{20} = \frac{s_4 s_{16}}{r}, \quad - \quad rs_{20} = s_4 s_{16} - rs_{12},$$

$$s_{16} + s_{24} = \frac{s_4 s_{20}}{r}, \quad - \quad rs_{24} = s_4 s_{20} - rs_{16},$$

$$s_{20} + s_{28} = \frac{s_4 s_{24}}{r}, \quad - \quad rs_{28} = s_4 s_{24} - rs_{20},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$s_{4n-8} + s_{4n} = \frac{s_4 s_{4n-4}}{r}, \quad - \quad rs_{4n} = s_4 s_{4n-4} - rs_{4n-8}.$$

Heraf findes Supplementchorderne bestemte ved s_4

$$\begin{aligned}
rs_8 &= s_4^2 - 2r^2, \\
r^2 s_{12} &= s_4^3 - 3r^2 s_4, \\
r^3 s_{16} &= s_4^4 - 4r^2 s_4^2 + 2r^4, \\
r^4 s_{20} &= s_4^5 - 5r^2 s_4^3 + 5r^4 s_4, \\
r^5 s_{24} &= s_4^6 - 6r^2 s_4^4 + 9r^4 s_4^2 - 2r^6, \\
r^6 s_{28} &= s_4^7 - 7r^2 s_4^5 + 14r^4 s_4^3 - 7r^6 s_4, \\
r^7 s_{32} &= s_4^8 - 8r^2 s_4^6 + 20r^4 s_4^4 - 16r^6 s_4^2 + 2r^8,
\end{aligned} \tag{D}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$r^{n-1} s_{4n} = s_4^n - nr^2 s_4^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \,.\, 2} r^4 s_4^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} r^6 s_4^{n-6} +$$

$$\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} r^8 s_4^{n-8} \ldots + \frac{(-1)^p \, n(n-p-1)\ldots(n-2p+2)(n-2p+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, \ldots \,.\, p} r^{2p} s_4^{n-2p} + \ldots$$

$$s_0 + s_{10} = \frac{s_5^2}{r}, \quad \text{altsaa} \quad rs_{10} = s_5^2 - 2r^2,$$

$$s_5 + s_{15} = \frac{s_5 s_{10}}{r}, \quad - \quad rs_{15} = s_5 s_{10} - rs_5,$$

$$s_{10} + s_{20} = \frac{s_5 s_{15}}{r}, \quad - \quad rs_{20} = s_5 s_{15} - rs_{10},$$

$$s_{15} + s_{25} = \frac{s_5 s_{20}}{r}, \quad - \quad rs_{25} = s_5 s_{20} - rs_{15},$$

$$s_{20} + s_{30} = \frac{s_5 s_{25}}{r}, \quad \text{altsaa} \quad rs_{30} = s_5 s_{25} - rs_{20},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$s_{5n-10} + s_{5n} = \frac{s_5 s_{5n-5}}{r}, \quad - \quad rs_{5n} = s_5 s_{5n-5} - rs_{5n-10}.$$

Heraf findes Supplementchorderne bestemte ved s_5

$$\begin{aligned}
rs_{10} &= s_5^2 - 2r^2, \\
r^2 s_{15} &= s_5^3 - 3r^2 s_5, \\
r^3 s_{20} &= s_5^4 - 4r^2 s_5^2 + 2r^4, \\
r^4 s_{25} &= s_5^5 - 5r^2 s_5^3 + 5r^4 s_5, \\
r^5 s_{30} &= s_5^6 - 6r^2 s_5^4 + 9r^4 s_5^2 - 2r^6, \\
r^6 s_{35} &= s_5^7 - 7r^2 s_5^5 + 14r^4 s_5^3 - 7r^6 s_5, \\
r^7 s_{40} &= s_5^8 - 8r^2 s_5^6 + 20r^4 s_5^4 - 16r^6 s_5^2 + 2r^8,
\end{aligned} \tag{E}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$r^{n-1} s_{5n} = s_5^n - nr^2 s_5^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \,.\, 2} r^4 s_5^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} r^6 s_5^{n-6} +$$

$$\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} r^8 s_5^{n-8} \ldots + \frac{(-1)^p n(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+2)(n-2p+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, p} r^{2p} s_5^{n-2p} + \ldots$$

Paa samme Maade findes Supplementchorderne bestemte ved s_6

$$\begin{aligned}
rs_{12} &= s_6^2 - 2r^2, \\
r^2 s_{18} &= s_6^3 - 3r^2 s_6, \\
r^3 s_{24} &= s_6^4 - 4r^2 s_6^2 + 2r^4, \\
r^4 s_{30} &= s_6^5 - 5r^2 s_6^3 + 5r^4 s_6, \\
r^5 s_{36} &= s_6^6 - 6r^2 s_6^4 + 9r^4 s_6^2 - 2r^6, \\
r^6 s_{42} &= s_6^7 - 7r^2 s_6^5 + 14r^4 s_6^3 - 7r^6 s_6, \\
r^7 s_{48} &= s_6^8 - 8r^2 s_6^6 + 20r^4 s_6^4 - 16r^6 s_6^2 + 2r^8,
\end{aligned} \tag{F}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$r^{n-1} s_{6n} = s_6^n - nr^2 s_6^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \,.\, 2} r^4 s_6^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} r^6 s_6^{n-6} +$$

$$\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\,.\,2\,.\,3}\,r^3 s_6^{n-8} \ldots + \frac{(-1)^p n(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+2)(n-2p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,p}\,r^{2p} s_6^{n-2p} + \ldots$$

o. s. v.

§ 4.

Om Chordernes og Supplementchordernes Fortegn.

Af § 2 i mit Program Geometrisk Behandling og Construktion af den regulære 17kant følger, 1) at Chorden er positiv i ethvert ulige Antal Gange Cirkellinien, men negativ i ethvert lige Antal, 2) at Supplementchorden er positiv i første Halvcirkel, negativ i anden og tredie, positiv i fjerde og femte, negativ i sjette og syvende o. s. v. Subtraheres altsaa en Supplementchordes Index fra et ulige Antal Gange Cirkellinien, er den udkomne Supplementchorde negativ, subtraheres den derimod fra et lige Antal Gange Cirkellinien, er den positiv. Er den udkomne Supplementchordes Index over en halv Cirkellinie, subtraheres den atter fra en heel Cirkellinie, og den udkomne Supplementchorde skifter da Fortegn. Er Cirkellinien f. Ex. deelt i 19 ligestore Dele, saa er: $s_{12} = -s_{19-12} = -s_7$; $s_{25} = s_{38-25} = s_{13} = -s_{19-13} = -s_6$; $s_{37} = -s_{51-37} = -s_{14} = s_{19-14} = s_5$; $s_{91} = -s_{95-91} = -s_4$; $s_{113} = s_{114-113} = s_1$ o. s. v.

Antages i en regulær 19kant s_6 bekjendt, saa findes hver af de øvrige Supplementchorder, bestemte ved s_6 af Ligningerne (F) i § 3, naar disse reduceres efter ovenstaaende Regler:

$$\begin{aligned}
s_6 &= s_6,\\
-\ rs_7 &= s_6^2 - 2r^2,\\
-\ r^2 s_1 &= s_6^3 - 3r^2 s_6,\\
-\ r^3 s_5 &= s_6^4 - 4r^2 s_6^2 + 2r^4,\\
r^4 s_8 &= s_6^5 - 5r^2 s_6^3 + 5r^4 s_6,\\
r^5 s_2 &= s_6^6 - 6r^2 s_6^4 + 9r^4 s_6^2 - 2r^6,\\
r^6 s_4 &= s_6^7 - 7r^2 s_6^5 + 14r^4 s_6^3 - 7r^6 s_6,\\
-\ r^7 s_9 &= s_6^8 - 8r^2 s_6^6 + 20r^4 s_6^4 - 16r^6 s_6^2 + 2r^8,\\
-\ r^8 s_3 &= s_6^9 - 9r^2 s_6^7 + 27r^4 s_6^5 - 30r^6 s_6^3 + 9r^8 s_6.
\end{aligned}$$

Multipliceres den første af de foregaaende Ligninger med r^8, den anden med r^7, den tredie med r^6 o. s. v., den næstsidste med r, og adderes de, faaer man:

1) $r^8(-s_1 + s_2 - s_3 + s_4 - s_5 + s_6 - s_7 + s_8 - s_9) = s_6^9 + rs_6^8 - 8r^2 s_6^7 - 7r^3 s_6^6 + 21r^4 s_6^5 + 15r^5 s_6^4 - 20r^6 s_6^3 - 10r^7 s_6^2 + 5r^8 s_6$.

Efter Indledn. § 1. 1. har man i den regulære 19kant.

$$c_1 s_1 = rc_2$$
$$c_2 s_2 = rc_4$$
$$c_4 s_4 = rc_8$$
$$c_8 s_8 = rc_3$$
$$c_3 s_3 = rc_6$$
$$c_6 s_6 = rc_7$$
$$c_7 s_7 = rc_5$$
$$c_5 s_5 = rc_9$$
$$c_9 s_9 = rc_1$$

$$s_1 s_2 s_4 s_8 s_3 s_6 s_7 s_5 s_9 = r^9.$$

Opløses dette Produkt efter Indledn. § 1. 10, faaer man:

2) $- s_1 + s_2 - s_3 + s_4 - s_5 + s_6 - s_7 + s_8 - s_9 = - r.$

Bev. $s_1 s_2 s_4 s_8 s_3 s_6 s_7 s_5 s_9 = s_1 s_2 s_4 s_8 s_3 s_6 s_7 (s_4 - s_5) r = s_1 s_2 s_4 s_8 s_3 s_6 (s_3 - s_8 - s_2 + s_7) r^2 = s_1 s_2 s_4 s_8 s_3 (s_3 + s_9 - s_2 + s_5 - s_4 - s_8 + s_1 - s_6) r^3 = s_1 s_2 s_4 s_8 (s_0 + s_6 + s_6 - s_7 - s_1 - s_5 + s_2 + s_8 - s_1 - s_7 - s_5 + s_8 + s_2 + s_4 - s_3 - s_9) r^4 = s_1 s_2 s_4 s_8 (- 2s_1 + 2s_2 - s_3 + s_4 - 2s_5 + 2s_6 - 2s_7 + 2s_8 - s_9 + s_0) r^4 = s_1 s_2 s_4 (- 2s_7 - 2s_9 + 2s_6 - 2s_9 - s_5 + s_8 + s_4 - s_7 - 2s_3 + 2s_6 + 2s_2 - 2s_5 - 2s_1 + 2s_4 + 2s_0 - 2s_3 - s_1 + s_2 + 2s_8) r^5 = s_1 s_2 s_4 (- 3s_1 + 3s_2 - 4s_3 + 3s_4 - 3s_5 + 4s_6 - 3s_7 + 3s_8 - 4s_9 + 2s_0) r^5 = s_1 s_2 (- 3s_3 - 3s_5 + 3s_2 + 3s_6 - 4s_1 - 4s_7 + 3s_0 + 3s_8 - 3s_1 - 3s_9 + 4s_2 - 4s_9 - 3s_3 + 3s_8 + 3s_4 - 3s_7 - 4s_5 + 4s_6 + 4s_4) r^6 = s_1 s_2 (- 7s_1 + 7s_2 - 6s_3 + 7s_4 - 7s_5 + 7s_6 - 7s_7 + 6s_8 - 7s_9 + 3s_0) r^6 = s_1 (- 7s_1 - 7s_3 + 7s_0 + 7s_4 - 6s_1 - 6s_5 + 7s_2 + 7s_6 - 7s_3 - 7s_7 + 7s_4 + 7s_8 - 7s_5 - 7s_9 + 6s_6 - 6s_9 - 7s_7 + 7s_8 + 6 s_2) r^7 = s_1 (- 13s_1 + 13s_2 - 14s_3 + 14s_4 - 13s_5 + 13s_6 - 14s_7 + 14s_8 - 13s_9 + 7s_0) r^7 = (- 13s_0 - 13s_2 + 13s_1 + 13s_3 - 14s_2 - 14s_4 + 14s_3 + 14s_5 - 13s_4 - 13s_6 + 13s_5 + 13s_7 - 14s_6 - 14s_8 + 14s_7 + 14s_9 - 13s_8 + 13s_9 + 14s_1) r^8 = (27s_1 - 27s_2 + 27s_3 - 27s_4 + 27s_5 - 27s_6 + 27s_7 - 27s_8 + 27s_9 - 13s_0) r^8 = r^9.$

Altsaa $27s_1 - 27s_2 + 27s_3 - 27s_4 + 27s_5 - 27s_6 + 27s_7 - 27s_8 + 27s_9 - 13s_0 = r.$

Altsaa $27s_1 - 27s_2 + 27s_3 - 27s_4 + 27s_5 - 27s_6 + 27s_7 - 27s_8 + 27s_9 = 27r.$

Altsaa $s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + s_5 - s_6 + s_7 - s_8 + s_9 = r.$

eller $- s_1 + s_2 - s_3 + s_4 - s_5 + s_6 - s_7 + s_8 - s_9 = - r.$

Indsættes denne Værdie i Ligning (1), faaer man $- r^9 = s_6{}^9 + rs_6{}^8 - 8r^2 s_6{}^7 - 7r^3 s_6{}^6 + 21r^4 s_6{}^5 + 15r^5 s_6{}^4 - 20r^6 s_6{}^3 - 10r^7 s_6{}^2 + 5r^8 s_6.$

Altsaa $s_6^9 + rs_6^8 - 8r^2s_6^7 - 7r^3s_6^6 + 21r^4s_6^5 + 15r^5s_6^4 - 20r^6s_6^3 - 10r^7s_6^2 + 5r^8s_6 + r^9 = 0$.

Betegnes hvilkensomhelst af Rødderne i denne Ligning med s, faaer man Ligningen for den regulære 19kant:

3) $s^9 + rs^8 - 8r^2s^7 - 7r^3s^6 + 21r^4s^5 + 15r^5s^4 - 20r^6s^3 - 10r^7s^2 + 5r^8s + r^9 = 0$.

Det samme Resultat vilde man have erholdt af hvilkesomhelst af Ligningerne A, B, C, D og E med den Forskjel, at man af Ligningerne A, C og E, hvilke ere bestemte ved en Supplementchorde med ulige Index, vilde faaet den samme Forandring af Fortegn, som naar man istedetfor s sætter — s, hvilket man forud kan vide, da Supplementchorder med lige og ulige Indices efter Ligning (2) have modsatte Fortegn.

§ 5.

At finde Ligningen for den regulære nkant, udtrykt ved Supplementchorden.

Efter § 2 har man, naar n er et hvilketsomhelst heelt Tal:

$$\frac{c_n}{c_1} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-1} - (n-2)\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-7} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-9} - \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-11} + \ldots$$

Er Cirkellinien deelt i n ligestore Dele, saa er

$$c_n = c_0 = 0, \text{ og altsaa } \frac{c_n}{c_1} = 0.$$

Man faaer altsaa:

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-1} - (n-2)\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-7} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-9} - \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{n-11} + \ldots = 0.$$

Efter Indledningen § 1. 1. har man $c_1s_1 = rc_2$, altsaa $\frac{c_2}{c_1} = \frac{s_1}{r}$. Indsættes denne Værdi for $\frac{c_2}{c_1}$, faaer man:

$$\frac{s_1^{n-1}}{r^{n-1}} - (n-2)\frac{s_1^{n-3}}{r^{n-3}} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}\frac{s_1^{n-5}}{r^{n-5}} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{s_1^{n-7}}{r^{n-7}} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\frac{s_1^{n-9}}{r^{n-9}} - \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\frac{s_1^{n-11}}{r^{n-11}} + \ldots = 0.$$

Multipliceres hele Ligningen med r^{n-1}, faaer man:

$$s_1^{n-1} - (n-2)\, r^2 s_1^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2} r^4 s_1^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3} r^6 s_1^{n-7} +$$

$$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} r^8 s_1^{n-9} - \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} r^{10} s_1^{n-11} + \ldots = 0.$$

Betegnes hvilkensomhelst af Rødderne med s, saa har man altsaa for

Den regulære nkant.

$$1)\quad s^{n-1} - (n-2)\, r^2 s^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2} r^4 s^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3} r^6 s^{n-7} +$$

$$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} r^8 s^{n-9} - \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} r^{10} s^{n-11} + \ldots = 0.$$

Er n et ulige Tal 2p + 1, saa har man for

Den regulære (2p + 1)*kant.*

$$2)\quad s^{2p} - (2p-1)\, r^2 s^{2p-2} + \frac{(2p-2)(2p-3)}{1\,.\,2} r^4 s^{2p-4} - \frac{(2p-3)(2p-4)(2p-5)}{1\,.\,2\,.\,3} r^6 s^{2p-6} +$$

$$\frac{(2p-4)(2p-5)(2p-6)(2p-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} r^8 s^{2p-8} - \frac{(2p-5)(2p-6)(2p-7)(2p-8)(2p-9)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} r^{10} s^{2p-10} +$$

$$\ldots = 0.$$

Er n et lige Tal 2p, saa kan hele Ligningen divideres med s, og man faaer da for

Den regulære 2p*kant.*

$$3)\quad s^{2p-2} - (2p-2)\, r^2 s^{2p-4} + \frac{(2p-3)(2p-4)}{1\,.\,2} r^4 s^{2p-6} - \frac{(2p-4)(2p-5)(2p-6)}{1\,.\,2\,.\,3} r^6 s^{2p-8} +$$

$$\frac{(2p-5)(2p-6)(2p-7)(2p-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} r^8 s^{2p-10} - \frac{(2p-6)(2p-7)(2p-8)(2p-9)(2p-10)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} r^{10} s^{2p-12} +$$

$$\ldots = 0.$$

Da Ligningerne (2) og (3) have afvexlende Fortegn, saa ere Rødderne i begge positive, og da den ubekjendte Størrelse blot forekommer i de lige Potentser, saa ere Rødderne Qvadrater. Begge Ligninger kunne derfor reduceres til den halve Grad ved blot istedetfor s^2 at sætte y.

§ 6.

Af Ligning (2) udledes følgende Theoremer:

1) *Theorem. I enhver regulær* (2p + 1)*kant er Summen af Qvadraterne paa alle Supplementchorderne i förste Halvcirkel lig Sidernes Antal minus 2 Gange Radiens Qvadrat.*

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + \ldots s_p^2 = (2p-1)\, r^2.$$

2) *Theorem. I enhver regulær* $(2p+1)$*kant er Produktet af Qvadraterne paa alle Supplementchorder i förste Halvcirkel lig Cirkelens Radius ophöiet til en Potents, hvis Exponent er lig Sidernes Antal minus een.*

$$s_1^2 s_2^2 s_3^2 s_4^2 \ldots s_p^2 = r^{2p}.$$

Af Ligning (3) udledes:

3) *Theorem. I enhver regulær* $2p$*kant er Summen af Qvadraterne paa alle Supplementchorder i förste Halvcirkel lig Radiens Qvadrat multipliceret med Sidernes Antal minus to.*

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + \ldots + s_{p-1}^2 = (2p - 2)\, r^2.$$

4) *Theorem. I enhver regulær* $2p$*kant er Produktet af Qvadraterne paa alle Supplementchorder i förste Halvcirkel lig* p *multipliceret med Cirkelens Radius ophöiet til en Potents, hvis Exponent er Sidernes Antal minus to.*

$$s_1^2 s_2^2 s_3^2 s_4^2 \ldots s_{p-1}^2 = p r^{2p-2}.$$

5) *Theorem. I enhver regulær* $(2p+1)$*kant er 1) Summen af alle Supplementchorder med lige Indices lig* $-r$, *2) Summen af alle Supplementchorder med ulige Indices lig* $+r$ *og 3) Summen af alle Supplementchorder lig* 0.

1) $s_2 + s_4 + s_6 + s_8 + \ldots + s_{2p-6} + s_{2p-4} + s_{2p-2} + s_{2p} = -r.$

2) $s_1 + s_3 + s_5 + s_7 + \ldots + s_{2p-7} + s_{2p-5} + s_{2p-3} + s_{2p-1} = +r.$

3) $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \ldots + s_{2p-5} + s_{2p-4} + s_{2p-3} + s_{2p-2} + s_{2p-1} + s_{2p} = 0.$

Bev.

$$\begin{aligned}
s_1^2 &= 2r^2 + rs_2, \text{ (Indledn. § 1. 3.)}\\
s_2^2 &= 2r^2 + rs_4,\\
s_3^2 &= 2r^2 + rs_6,\\
s_4^2 &= 2r^2 + rs_8,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\\
s_{p-3}^2 &= 2r^2 + rs_{2p-6},\\
s_{p-2}^2 &= 2r^2 + rs_{2p-4},\\
s_{p-1}^2 &= 2r^2 + rs_{2p-2},\\
s_p^2 &= 2r^2 + rs_{2p}.
\end{aligned}$$

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + \ldots + s_{p-3}^2 + s_{p-2}^2 + s_{p-1}^2 + s_p^2 = 2pr^2 + r(s_2 + s_4 + s_6 + \ldots + s_{2p-4} + s_{2p-2} + s_{2p}),$$

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + \ldots + s_{p-3}^2 + s_{p-2}^2 + s_{p-1}^2 + s_p^2 = (2p - 1)\, r^2, \text{ (§ 6. 1.)}$$

$$2pr^2 + r(s_2 + s_4 + s_6 + s_8 + \ldots + s_{2p-6} + s_{2p-4} + s_{2p-2} + s_{2p}) = (2p - 1)\, r^2.$$

1) $s_2 + s_4 + s_6 + s_8 + \ldots + s_{2p-6} + s_{2p-4} + s_{2p-2} + s_{2p} = -r$, hvilket var det første, som skulde bevises.

Da $s_2 = -s_{2p-1}$, $s_4 = -s_{2p-3}$, o. s. v., $s_{2p-6} = -s_7$, $s_{2p-4} = -s_5$, $s_{2p-2} = -s_3$ o. s. v., saa faaer man, naar disse Værdier indsættes i (1):

$-s_1 - s_3 - s_5 - s_7 - \ldots - s_{2p-5} - s_{2p-3} - s_{2p-1} = -r$, altsaa

2) $s_1 + s_3 + s_5 + s_7 + \ldots + s_{2p-5} + s_{2p-3} + s_{2p-1} = r$, hvilket var det andet, som skulde bevises.

Af (1) og (2) følger:

3) $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \ldots + s_{2p-5} + s_{2p-4} + s_{2p-3} + s_{2p-2} + s_{2p-1} + s_{2p} = 0$, hvilket var det tredie, som skulde bevises.

6) Theorem. Naar Cirkellinien er deelt i $2p+1$ *ligestore Dele, saa er Summen af alle Supplementchorder med ulige Indices minus Summen af alle Supplementchorder med lige Indices i samme Halvcirkel lig Cirkelens Radius.*

Bev. Reduceres alle Supplementchorder i Ligning (1) til samme Halvcirkel, faaer man:

$s_2 + s_4 + s_6 + s_8 + \ldots - s_7 - s_5 - s_3 - s_1 = -r$ eller

$(s_1 + s_3 + s_5 + s_7 + \ldots) - (s_2 + s_4 + s_6 + s_8 + \ldots) = r.$

§ 7.

At finde en Ligning, der udtrykker Forbindelsen mellem Siden i en regulær $(2p+1)$-*kant og den omskrevne Cirkels Radius.*

Ligning (2) i § 5 kan ogsaa skrives saaledes:

$$\text{A)}\quad (s_1^2)^p - (2p-1)\,r^2\,(s_1^2)^{p-1} + \frac{(2p-2)(2p-3)}{1\,.\,2}\,r^4\,(s_1^2)^{p-2} -$$

$$\frac{(2p-3)(2p-4)(2p-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\,r^6(s_1^2)^{p-3} + \frac{(2p-4)(2p-5)(2p-6)(2p-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,r^8(s_1^2)^{p-4} - \ldots = 0,$$

naar man istedetfor s sætter s_1, som er en af Rødderne i Ligningen.

Sættes i denne Ligning istedetfor s_1^2 den ligestore Værdi $4r^2 - c_1^2 = (-1)r^2\left(\frac{c_1^2}{r^2} - 4\right)$,

faaer man: $(-1)^p\,r^{2p}\left(\frac{c_1^2}{r^2} - 4\right)^p - (2p-1)(-1)^{p-1}\,r^{2p}\left(\frac{c_1^2}{r^2} - 4\right)^{p-1} +$

$$\frac{(2p-2)(2p-3)}{1\,.\,2}(-1)^{p-2}\,r^{2p}\left(\frac{c_1^2}{r^2} - 4\right)^{p-2} - \frac{(2p-3)(2p-4)(2p-5)}{1\,.\,2\,.\,3}(-1)^{p-3}r^{2p}\left(\frac{c_1^2}{r^2} - 4\right)^{p-3} +$$

$$\frac{(2p-4)(2p-5)(2p-6)(2p-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(-1)^{p-4}r^{2p}\left(\frac{c_1^2}{r^2} - 4\right)^{p-4} -$$

$$\frac{(2p-5)(2p-6)(2p-7)(2p-8)(2p-9)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}(-1)^{p-5}\,r^{2p}\left(\frac{c_1^2}{r^2} - 4\right)^{p-5} + \ldots = 0.$$

Divideres hele Ligningen med r^{2p}, faaer man:

$$(-1)^p\left(\frac{c_1{}^2}{r^2}-4\right)^p-(2p-1)(-1)^{p-1}\left(\frac{c_1{}^2}{r^2}-4\right)^{p-1}+\frac{(2p-2)(2p-3)}{1\,.\,2}(-1)^{p-2}\left(\frac{c_1{}^2}{r^2}-4\right)^{p-2}$$

$$-\frac{(2p-3)(2p-4)(2p-5)}{1\,.\,2\,.\,3}(-1)^{p-3}\left(\frac{c_1{}^2}{r^2}-4\right)^{p-3}+$$

$$\frac{(2p-4)(2p-5)(2p-6)(2p-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(-1)^{p-4}\left(\frac{c_1{}^2}{r^2}-4\right)^{p-4}-\ldots=0.$$

Udvikles hvert Led i denne Ligning efter Binominalformelen, faaes:

$$(-1)^p\left(\frac{c_1{}^2}{r^2}-4\right)^p=(-1)^p\left(\frac{c_1^{2p}}{r^{2p}}-p\frac{c_1^{2p-2}}{r^{2p-2}}.4+\frac{p(p-1)}{1\,.\,2}\frac{c_1^{2p-4}}{r^{2p-4}}.4^2-\frac{p(p-1)(p-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{c_1^{2p-6}}{r^{2p-6}}.4^3+\ldots\right)$$

$$-(2p-1)(-1)^{p-1}\left(\frac{c_1{}^2}{r^2}-4\right)^{p-1}=(-1)^p\left((2p-1)\frac{c_1^{2p-2}}{r^{2p-2}}-\frac{(2p-1)(p-1)}{1\,.\,2}\frac{c_1^{2p-4}}{r^{2p-4}}.4+\frac{(2p-1)(p-1)(p-2)}{1\,.\,2}\frac{c_1^{2p-6}}{r^{2p-6}}.4^2-\ldots\right)$$

$$\frac{(2p-2)(2p-3)(-1)^{p-2}}{1\,.\,2}\left(\frac{c_1{}^2}{r^2}-4\right)^{p-2}=(-1)^p\left(\frac{(2p-2)(2p-3)}{1\,.\,2}\frac{c_1^{2p-4}}{r^{2p-4}}-\frac{(2p-2)(2p-3)(p-2)}{1\,.\,2}\frac{c_1^{2p-6}}{r^{2p-6}}.4+\ldots\right)$$

$$-\frac{(2p-3)(2p-4)(2p-5)(-1)^{p-3}}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{c_1{}^2}{r^2}-4\right)^{p-3}=(-1)^p\left(\frac{(2p-3)(2p-4)(2p-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{c_1^{2p-6}}{r^{2p-6}}-\ldots\right)$$

Altsaa $\frac{c_1^{2p}}{r^{2p}}-(2p+1)\frac{c_1^{2p-2}}{r^{2p-2}}+\frac{(2p+1)(2p-2)}{1\,.\,2}\frac{c_1^{2p-4}}{r^{2p-4}}-\frac{(2p+1)(2p-3)(2p-4)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{c_1^{2p-6}}{r^{2p-6}}+$

$$\frac{(2p+1)(2p-4)(2p-5)(2p-6)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\frac{c_1^{2p-8}}{r^{2p-8}}-\frac{(2p+1)(2p-5)(2p-6)(2p-7)(2p-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\frac{c_1^{2p-10}}{r^{2p-10}}+\ldots=0.$$

Multipliceres hele Ligningen med r^{2p}, faaer man, naar c betegner hvilkensomhelst af Rødderne,

Ligningen for den regulære (2p + 1)*kant.*

$$4)\quad c^{2p}-(2p+1)r^2c^{2p-2}+\frac{(2p+1)(2p-2)}{1\,.\,2}r^4c^{2p-4}-\frac{(2p+1)(2p-3)(2p-4)}{1\,.\,2\,.\,3}r^6c^{2p-6}+$$

$$\frac{(2p+1)(2p-4)(2p-5)(2p-6)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}r^8c^{2p-8}-\frac{(2p+1)(2p-5)(2p-6)(2p-7)(2p-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}r^{10}c^{2p-10}+\ldots$$

$$+(-1)^q\frac{(2p+1)(2p-q)(2p-q-1)\ldots(2p-2q+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,q}r^{2q}c^{2p-2q}+\ldots=0.$$

I denne Ligning ere Rødderne $c_1{}^2$, $c_2{}^2$, $c_3{}^2$, $c_4{}^2$ . . . . c_p^2.

Ligningen for den regulære 2p*kant.*

$$5)\quad c^{2p-2}-(2p-2)r^2c^{2p-4}+\frac{(2p-3)(2p-4)}{1\,.\,2}r^4c^{2p-6}-\frac{(2p-4)(2p-5)(2p-6)}{1\,.\,2\,.\,3}r^6c^{2p-8}+$$

$$\frac{(2p-5)(2p-6)(2p-7)(2p-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}r^8c^{2p-10}-\ldots+(-1)^q\frac{(2p-q-1)(2p-q-2)\ldots(2p-2q)}{1\,.\,2\,.\,.\,q}r^{2q}c^{2p-2q-2}+\ldots=0.$$

Ligning (5) eller Ligningen for den regulære 2pkant, udtrykt ved Siden, er den

samme som Ligning (3), udtrykt ved Supplementchorden, hvilket er en nødvendig Følge af, hvad der er viist i § 1.

Sættes i Ligning (4) p = 1, 2, 3, 4, 5, o. s. v., faaer man for

Den regulære 3kant.

$$c^2 - 3r^2 = 0.$$

Den regulære 5kant.

$$c^4 - 5r^2c^2 + \frac{5 \,.\, 2}{1 \,.\, 2} r^4 = 0, \text{ d. e.}$$

$$c^4 - 5r^2c^2 + 5r^4 = 0.$$

Den regulære 7kant.

$$c^6 - 7r^2c^4 + \frac{7 \,.\, 4}{1 \,.\, 2} r^4c^2 - \frac{7 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} r^6 = 0, \text{ d. e.}$$

$$c^6 - 7r^2c^4 + 14r^4c^2 - 7r^6 = 0.$$

Den regulære 9kant.

$$c^8 - 9r^2c^6 + \frac{9 \,.\, 6}{1 \,.\, 2} r^4c^4 - \frac{9 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} r^6c^2 + \frac{9 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} r^8 = 0, \text{ d. e.}$$

$$c^8 - 9r^2c^6 + 27r^4c^4 - 30r^6c^2 + 9r^8 = 0.$$

Denne Ligning kan opløses i to Faktorer:

$(c^2 - 3r^2)\,(c^6 - 6r^2c^4 + 9r^4c^2 - 3r^6) = 0.$

Altsaa $c^2 - 3r^2 = 0$, og $c^6 - 6r^2c^4 + 9r^4c^2 - 3r^6 = 0$.

Den regulære 11kant.

$$c^{10} - 11r^2c^8 + \frac{11 \,.\, 8}{1 \,.\, 2} r^4c^6 - \frac{11 \,.\, 7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} r^6c^4 + \frac{11 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} r^8c^2 -$$

$$\frac{11 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} r^{10} = 0, \text{ d. e.}$$

$$c^{10} - 11r^2c^8 + 44r^4c^6 - 77r^6c^4 + 55r^8c^2 - 11r^{10} = 0.$$

Den regulære 13kant.

$$c^{12} - 13r^2c^{10} + \frac{13 \,.\, 10}{1 \,.\, 2} r^4c^8 - \frac{13 \,.\, 9 \,.\, 8}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} r^6c^6 + \frac{13 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} r^8c^4 -$$

$$\frac{13 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} r^{10}c^2 + \frac{13 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6} r^{12} = 0, \text{ d. e.}$$

$$c^{12} - 13r^2c^{10} + 65r^4c^8 - 156r^6c^6 + 182r^8c^4 - 91r^{10}c^2 + 13r^{12} = 0.$$

Den regulære 15*kant.*

$$c^{14} - 15r^2c^{12} + \frac{15 \cdot 12}{1 \cdot 2} r^4c^{10} - \frac{15 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^6c^8 + \frac{15 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} r^8c^6 -$$

$$\frac{15 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} r^{10}c^4 + \frac{15 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} r^{12}c^2 - \frac{15 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} r^{14} = 0, \text{ d. e.}$$

$$c^{14} - 15r^2c^{12} + 90r^4c^{10} - 275r^6c^8 + 450r^8c^6 - 378r^{10}c^4 + 140r^{12}c^2 - 15r^{14} = 0.$$

$$(c^2 - 3r^2)(c^4 - 5r^2c^2 + 5r^4)(c^8 - 7r^2c^6 + 14r^4c^4 - 8r^6c^2 + r^8) = 0.$$

Altsaa $c^8 - 7r^2c^6 + 14r^4c^4 - 8r^6c^2 + r^8 = 0.$

$$c^4 - 5r^2c^2 + 5r^4 = 0, \quad c^2 - 3r^2 = 0.$$

Den regulære 17*kant.*

$$c^{16} - 17r^2c^{14} + \frac{17 \cdot 14}{1 \cdot 2} r^4c^{12} - \frac{17 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^6c^{10} + \frac{17 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} r^8c^8 -$$

$$\frac{17 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} r^{10}c^6 + \frac{17 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} r^{12}c^4 - \frac{17 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} r^{14}c^2$$

$$+ \frac{17 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} r^{16} = 0, \text{ d. e.}$$

$$c^{16} - 17r^2c^{14} + 119r^4c^{12} - 442r^6c^{10} + 935r^8c^8 - 1122r^{10}c^6 + 714r^{12}c^4 - 204r^{14}c^2 + 17r^{16} = 0.$$

Den regulære 19*kant.*

$$c^{18} - 19r^2c^{16} + \frac{19 \cdot 16}{1 \cdot 2} r^4c^{14} - \frac{19 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^6c^{12} + \frac{19 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} r^8c^{10}$$

$$- \frac{19 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} r^{10}c^8 + \frac{19 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} r^{12}c^6 -$$

$$\frac{19 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} r^{14}c^4 + \frac{19 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} r^{16}c^2 -$$

$$\frac{19 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} r^{18} = 0, \text{ d. e.}$$

$$c^{18} - 19r^2c^{16} + 152r^4c^{14} - 665r^6c^{12} + 1729r^8c^{10} - 2717r^{10}c^8 + 2508r^{12}c^6 - 1254r^{14}c^4 + 285r^{16}c^2 - 19r^{18} = 0.$$

o. s. v.

Sættes i Ligning (5) $p = 2, 3, 4, 5$, o. s. v., faaer man for

Den regulære 4*kant.*

$$c^2 - 2r^2 = 0.$$

Den regulære 6*kant.*

$$c^4 - 4r^2c^2 + 3r^4 = 0 = (c^2 - r^2)(c^2 - 3r^2).$$

Den regulære 8kant.

$$c^6 - 6r^2c^4 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} r^4c^2 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^6 = 0, \text{ d. e.}$$

$$c^6 - 6r^2c^4 - 10r^4c^2 + 4r^6 = 0 = (c^2 - 2r^2)(c^4 - 4r^2c^2 + 2r^4).$$

Den regulære 10kant.

$$c^8 - 8r^2c^6 + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} r^4c^4 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^6c^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} r^8 = 0, \text{ d. e.}$$

$$c^8 - 8r^2c^6 + 21r^4c^4 - 20r^6c^2 + 5r^8 = 0.$$

$$(c^4 - 5r^2c^2 + 5r^4)(c^4 - 3r^2c^2 + r^4) = 0.$$

Altsaa $c^4 - 5r^2c^2 + 5r^4 = 0$ og $c^4 - 3r^2c^2 + r^4 = 0$.

Den regulære 12kant.

$$c^{10} - 10r^2c^8 + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} r^4c^6 - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^6c^4 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} r^8c^2 -$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} r^{10} = 0, \text{ d. e.}$$

$$c^{10} - 10r^2c^8 + 36r^4c^6 - 56r^6c^4 + 35r^8c^2 - 6r^{10} = 0.$$

$$(c^2 - r^2)(c^2 - 3r^2)(c^6 - 6r^2c^4 + 9r^4c^2 - 2r^6) = 0.$$

Altsaa $c^2 - r^2 = 0$, $c^2 - 3r^2 = 0$, $c^6 - 6r^2c^4 + 9r^4c^2 - 2r^6 = 0$.

Den regulære 14kant.

$$c^{12} - 12r^2c^{10} + \frac{11 \cdot 10}{1 \cdot 2} r^4c^8 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^6c^6 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} r^8c^4 -$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} r^{10}c^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} r^{12} = 0, \text{ d. e.}$$

$$c^{12} - 12r^2c^{10} + 55r^4c^8 - 120r^6c^6 + 126r^8c^4 - 56r^{10}c^2 + 7r^{12} = 0.$$

$$(c^6 - 7r^2c^4 + 14r^4c^2 - 7r^6)(c^6 - 5r^2c^4 + 6r^4c^2 - r^6) = 0.$$

Altsaa $c^6 - 7r^2c^4 + 14r^4c^2 - 7r^6 = 0$, $c^6 - 5r^2c^4 + 6r^4c^2 - r^6 = 0$.

o. s. v.

§ 8.

Af Ligning (4) udledes følgende Theoremer:

1. *Theorem. I enhver regulær* (2p + 1)*kant er Summen af Qvadraterne paa Siden og paa Diagonalerne i samme Halvcirkel lig Sidernes Antal Gange Radiens Qvadrat.*

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 + \ldots + c_p^2 = (2p + 1) r^2.$$

2. *Theorem. I enhver regulær* (2p + 1)*kant er Produktet af Qvadraterne paa Siden*

og paa Diagonalerne i samme Halvcirkel lig Sidernes Antal Gange Cirkelens Radius ophöiet i 2p*te Potents.*

$$c_1{}^2 c_2{}^2 c_3{}^2 c_4{}^2 c_5{}^2 \ldots . c_p^2 = (2p + 1) r^{2p}.$$

Af Ligning (5) udledes følgende Theoremer:

3. *Theorem. I enhver regulær* 2p*kant er Summen af Qvadraterne paa Siden og paa Diagonalerne i samme Halvcirkel lig Sidernes Antal minus to Gange Radiens Qvadrat.*

$$c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2 + c_4{}^2 + \ldots + c_{p-1}^2 = (2p - 2) r^2.$$

4. *Theorem. I enhver regulær* 2p*kant er Produktet af Qvadraterne paa Siden og paa Diagonalerne i samme Halvcirkel lig Sidernes halve Antal Gange Radius ophöiet i en Potents, hvis Exponent er Sidernes Antal minus to.*

$$c_1{}^2 c_2{}^2 c_3{}^2 c_4{}^2 c_5{}^2 \ldots c_{p-1}^2 = p r^{2p-2}.$$

§ 9.

At finde en Ligning af pte Grad for den regulære (2p + 1)*kant.*

Efter § 7 (A) har man:

$$(s_1{}^2)^p - (2p - 1) r^2 (s_1{}^2)^{p-1} + \frac{(2p-2)(2p-3)}{1 \,.\, 2} r^4 (s_1{}^2)^{p-2} -$$
$$\frac{(2p-3)(2p-4)(2p-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} r^6 (s_1{}^2)^{p-3} + \frac{(2p-4)(2p-5)(2p-6)(2p-7)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} r^8 (s_1{}^2)^{p-4} -$$
$$\frac{(2p-5)(2p-6)(2p-7)(2p-8)(2p-9)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} r^{10} (s_1{}^2)^{p-5} + \ldots = 0.$$

Nu har man (Indledn. § 1. 3.) $s_1{}^2 = 2r^2 + rs_2$, altsaa $s_1{}^2 = r^2\left(\frac{s_2}{r} + 2\right)$.

Indsættes denne Værdi for $s_1{}^2$, faaer man:

$$r^{2p}\left(\frac{s_2}{r} + 2\right)^p - (2p-1) r^{2p} \left(\frac{s_2}{r} + 2\right)^{p-1} + \frac{(2p-2)(2p-3)}{1 \,.\, 2} r^{2p} \left(\frac{s_2}{r} + 2\right)^{p-2} -$$
$$\frac{(2p-3)(2p-4)(2p-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} r^{2p} \left(\frac{s_2}{r} + 2\right)^{p-3} + \frac{(2p-4)(2p-5)(2p-6)(2p-7)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} r^{2p} \left(\frac{s_2}{r} + 2\right)^{p-4}$$
$$- \ldots = 0.$$

Divideres hele Ligningen med r^{2p}, faaer man:

$$\left(\frac{s_2}{r} + 2\right)^p - (2p-1)\left(\frac{s_2}{r} + 2\right)^{p-1} + \frac{(2p-2)(2p-3)}{1 \,.\, 2} \left(\frac{s_2}{r} + 2\right)^{p-2} -$$
$$\frac{(2p-3)(2p-4)(2p-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \left(\frac{s_2}{r} + 2\right)^{p-3} + \frac{(2p-4)(2p-5)(2p-6)(2p-7)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \left(\frac{s_2}{r} + 2\right)^{p-4} -$$
$$\ldots = 0.$$

Udvikles hvert Led i denne Ligning efter Binominalformelen, faaer man:

$$\left(\frac{s_2}{r}+2\right)^p = \frac{s_2^p}{r^p} + p\,\frac{s_2^{p-1}}{r^{p-1}}\cdot 2 + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}\,\frac{s_2^{p-2}}{r^{p-2}}\cdot 2^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{s_2^{p-3}}{r^{p-3}}\cdot 2^3 + \ldots$$

$$-(2p-1)\left(\frac{s_2}{r}+2\right)^{p-1} = -(2p-1)\frac{s_2^{p-1}}{r^{p-1}} - (2p-1)(p-1)\frac{s_2^{p-2}}{r^{p-2}}\cdot 2 - \frac{(2p-1)(p-1)(p-2)}{1\,.\,2}\,\frac{s_2^{p-3}}{r^{p-3}}\cdot 2^2 - \ldots$$

$$+\frac{(2p-2)\,(2p-3)}{1\,.\,2}\left(\frac{s_2}{r}+2\right)^{p-2} = \frac{(2p-2)\,(2p-3)}{1\,.\,2}\,\frac{s_2^{p-2}}{r^{p-2}} + \frac{(2p-2)(2p-3)(p-2)}{1\,.\,2}\,\frac{s_2^{p-3}}{r^{p-3}}\cdot 2 + \ldots$$

$$-\frac{(2p-3)\,(2p-4)(2p-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{s_2}{r}+2\right)^{p-3} = -\frac{(2p-3)\,(2p-4)\,(2p-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{s_2^{p-3}}{r^{p-3}} - \ldots\ldots$$

Altsaa $\frac{s_2^p}{r^p} + \frac{s_2^{p-1}}{r^{p-1}} - (p-1)\frac{s_2^{p-2}}{r^{p-2}} - (p-2)\cdot\frac{s_2^{p-3}}{r^{p-3}} + \frac{(p-2)\,(p-3)}{1\,.\,2}\,\frac{s_2^{p-4}}{r^{p-4}} + \frac{(p-3)\,(p-4)}{1\,.\,2}\,\frac{s_2^{p-5}}{r^{p-5}} - \ldots$

$$+(-1)^q\,\frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-2q+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,q}\,\frac{s_2^{p-2q}}{r^{p-2q}} + (-1)^q\,\frac{(p-q-1)(p-q-2)\ldots(p-2q)}{1\,.\,2\,.\,.\,q}\,\frac{s_2^{p-2q-1}}{r^{p-2q-1}} + \ldots = 0.$$

Multipliceres denne Ligning med r^p, faaer man, naar s betegner hvilkensomhelst af Rødderne:

$$6)\quad s^p + rs^{p-1} - (p-1)\,r^2s^{p-2} - (p-2)\,r^3s^{p-3} + \frac{(p-2)\,(p-3)}{1\,.\,2}\,r^4s^{p-4} + \frac{(p-3)\,(p-4)}{1\,.\,2}\,r^5s^{p-5} - \ldots.$$

$$+(-1)^q\,\frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-2q+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,q}\,r^{2q}s^{p-2q} + (-1)^q\,\frac{(p-q-1)(p-q-2)\ldots(p-2q)}{1\,.\,2\,.\,.\,q}\,r^{2q+1}s^{p-2q-1} + \ldots = 0.$$

Af denne Ligning følger:

a) $-s_1 + s_2 - s_3 + s_4 - s_5 + s_6 - s_7 + \ldots \pm s_p = -r.$

Øverste Fortegn for s_p gjælder, naar p er et lige Tal, men nederste, naar p er et ulige Tal.

b) $s_1s_2s_3s_4s_5s_6s_7 \ldots . s_p = r^p.$

Sættes i Ligning (6) p = 1, 2, 3, 4, o. s. v., faaer man:

For den regulære 3kant.

$$s + r = 0.$$

Herved maa bemærkes, at s er her $= s_2$, men $s_2 = -s_1$, altsaa er $s_1 = r$ og $s_2 = -r$.

For den regulære 5kant.

$$s^2 + rs - r^2 = 0.$$

Rødderne i denne Ligning ere s_2 og $-s_1$, $s_2 - s_1 = -r$, $s_1s_2 = r^2$.

For den regulære 7kant.

$$s^3 + rs^2 - 2r^2s - r^3 = 0.$$

Rødderne i denne Ligning ere: $s = s_2$, $s = -s_1$ og $s = -s_3$, $s_2 - s_1 - s_3 = -r$, $s_1 s_2 s_3 = r^3$.

For den regulære 9kant.

$$s^4 + rs^3 - 3r^2s^2 - 2r^3s + r^4 = 0.$$

Denne Ligning kan opløses i de to Faktorer:

$$(s + r)(s^3 - 3r^2s + r^3) = 0,$$

altsaa $s + r = 0$, $s^3 - 3r^2s + r^3 = 0$.

Af denne Ligning sees, at $s_2 + s_4 - s_1 - s_3 = -r$.

Den ene af Faktorerne $s + r = 0$ giver $s = -s_3 = -r$.

Den anden Faktor giver $s = s_2$, $s = s_4$ og $s = -s_1$, $s_2 + s_4 - s_1 = 0$.

For den regulære 11kant.

$$s^5 + rs^4 - 4r^2s^3 - 3r^3s^2 + 3r^4s + r^5 = 0.$$

For den regulære 13kant.

$$s^6 + rs^5 - 5r^2s^4 - 4r^3s^3 + 6r^4s^2 + 3r^5s - r^6 = 0.$$

For den regulære 15kant.

$$s^7 + rs^6 - 6r^2s^5 - 5r^3s^4 + 10r^4s^3 + 6r^5s^2 - 4r^6s - r^7 = 0.$$

Denne Ligning kan opløses i 3 Faktorer:

$$(s + r)(s^2 + rs - r^2)(s^4 - rs^3 - 4r^2s^2 + 4r^3s + r^4) = 0.$$

Altsaa $s + r = 0$, $s^2 + rs - r^2 = 0$, $s^4 - rs^3 - 4r^2s^2 + 4r^3s + r^4 = 0$.

Den første af disse 3 Ligninger er Ligningen for den regulære 3kant, den anden er Ligningen for den regulære 5kant, og den tredie Ligning indeholder de Rødder, som ere egne for 15kanten. Den første Ligning giver $s = -s_5 = -r$, altsaa $s_5 = r$, den anden giver $s = -s_3$, $s = s_6$, den tredie giver de övrige 4 Rødder $s = -s_1$, $s = s_2$, $s = s_4$, $s = -s_7$, $s_2 + s_4 - s_1 - s_7 = -r$, $s_6 - s_3 = -r$ og $s_2 + s_4 + s_6 - s_1 - s_3 - s_5 - s_7 = -r$.

For den regulære 17kant.

$$s^8 + rs^7 - 7r^2s^6 - 6r^3s^5 + 15r^4s^4 + 10r^5s^3 - 10r^6s^2 - 4r^7s + r^8 = 0.$$

For den regulære 19kant.

$$s^9 + rs^8 - 8r^2s^7 - 7r^3s^6 + 21r^4s^5 + 15r^5s^4 - 20r^6s^3 - 10r^7s^2 + 5r^8s + r^9 = 0.$$

o. s. v.

Anvendelse af en ny Methode til at reducere Cirkelliniens Deling i n ligestore Dele, naar n er et Primtal = 2p + 1, og p et sammensat Tal = $2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}\ldots$, til en Opløsning af α Ligninger af 2den Grad, β Ligninger af 3die Grad, γ Ligninger af 5te Grad o. s. v.

§ 10.

Af det Foregaaende har man seet, at Ligningen for den regulære nkant, naar n er et sammensat Tal, kan reduceres til lavere Grader ved at opløses i Faktorer. Saaledes kan Ligningen for den regulære 15kant opløses i 3 Faktorer, hvoraf den ene Faktor er Ligningen for den regulære 3kant, og den anden Faktor Ligningen for den regulære 5kant. Den tredie Faktor indeholder altsaa blot de Rødder, som ere egne for 15kanten eller som den ikke har fælles med 3kanten og 5kanten. Er derimod n et Primtal, kan en saadan Reduktion naturligviis ikke finde Sted. Imidlertid have Supplementchorderne i dette Tilfælde den mærkelige Egenskab, at de, naar p er et sammensat Tal, stedse kunne deles i Grupper eller Perioder, bestemte ved de Faktorer, som p indeholder. Produktet af to saadanne Perioder kan altid udtrykkes rationalt ved de Perioder, hvori Supplementchorderne ere deelte. Ved en simpel Anvendelse af den geometriske Sætning (Indledn. § 1. 1) faaer man Produktet enten af alle p Supplementchorder eller af en aliqvot Deel af disse p Supplementchorder, d. e. en Gruppe eller Periode, ordnet efter deres Indices i en geometrisk Række, hvis Exponent er 2. Naar en Periode saaledes er funden, findes den anden paa samme Maade ved at gaae ud fra en Supplementchorde, som ikke findes i første Periode. Er der endnu flere Supplementchorder tilbage, som ikke findes i de to første Perioder, saa gaaer man ud fra en af dem og danner paa samme Maade den tredie Periode, og saa fremdeles, indtil der ikke ere flere Supplementchorder tilbage; eller den anden Periode findes ved at multiplicere Indices i den første med et af Tallene 1, 2, 3, 4 . . . p, som ikke findes i første Periode. Er der flere Supplementchorder tilbage, multipliceres atter Indices i den første Periode med et af Tallene 1, 2, 3, 4 . . . p, som ikke findes i de to første Perioder, og man faaer saaledes den tredie Periode. Paa samme Maade fortsættes, saafremt der endnu ere flere Supplementchorder, som ikke findes i de tre første Perioder, indtil alle p Supplementchorder ere udtømte. Har man derimod ved Anvendelsen af ovennævnte Sætning faaet en geometrisk Række, der indeholder alle p Supplementchorder, saa findes Perioderne saaledes: Indeholder p Faktoren 2, saa udgjøre Rækkens Led med ulige Ordenstal Ledene i første Periode, og Rækkens Led med lige Ordenstal Ledene i anden Periode. Indeholder p Faktoren 3, saa udgjøre første, fjerde, syvende Led o. s. v. Ledene i første Periode, andet, femte, ottende Led o. s. v. Ledene i anden

Periode, og tredie, sjette, niende Led o. s. v. Ledene i tredie Periode. Indeholder p Faktorerne 5, 7, 11, o. s. v., saa findes Perioderne paa lignende Maade.

Er $n = 13$, altsaa $p = 6 = 2 \,.\, 3$, saa kunne Supplementchorderne deles i 2 Perioder, hver paa 3 Led eller i 3 Perioder, hver paa 2 Led.

Efter Indledn. § 1. 1 har man:

$$\begin{aligned} c_1 s_1 &= r c_2, \\ c_2 s_2 &= r c_4, \\ c_4 s_4 &= r c_5, \\ c_5 s_5 &= r c_3, \\ c_3 s_3 &= r c_6, \\ c_6 s_6 &= r c_1, \\ \hline (1) \qquad s_1 s_2 s_4 s_5 s_3 s_6 &= r^6. \end{aligned}$$

Dette Produkt kan efter Indledn. § 1. 10 opløses saaledes:

$s_1 s_2 s_4 s_5 s_3 s_6 = s_1 s_2 s_4 s_5 (s_3 - s_4) r = s_1 s_2 s_4 (s_2 - s_5 - s_1 + s_4) r^2 = s_1 s_2 (s_2 + s_6 - s_1 + s_4 - s_3 - s_5 + s_0 - s_5) r^3 = r^6$. $s_1 s_2 (s_2 + s_6 - s_1 + s_4 - s_3 - 2s_5 + s_0) r^3 = s_1 (s_0 + s_4 + s_4 - s_5 - s_1 - s_3 + s_2 + s_6 - s_1 - s_5 - 2s_3 + 2s_6 + 2s_2) r^4 = r^6$. $s_1 (s_0 - 2s_1 + 3s_2 - 3s_3 + 2s_4 - 2s_5 + 3s_6) r^4 = (2s_1 - 2s_0 - 2s_2 + 3s_1 + 3s_3 - 3s_2 - 3s_4 + 2s_3 + 2s_5 - 2s_4 - 2s_6 + 3s_5 - 3s_6) r^5 = (5s_1 - 5s_2 + 5s_3 - 5s_4 + 5s_5 - 5s_6 - 4r) r^5 = r^6$.

Altsaa $5s_1 - 5s_2 + 5s_3 - 5s_4 + 5s_5 - 5s_6 = 5r$.

$s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + s_5 - s_6 = r$, eller

(2) $\quad - s_1 + s_2 - s_3 + s_4 - s_5 + s_6 = - r$, hvilket man forud veed af § 6. 6.

Ordnes Ledene i denne Ligning saaledes som de følge efter hinanden i Ligning (1), faaer man en geometrisk Række, hvis Exponent er 2:

(3) $\quad - s_1 + s_2 + s_4 - s_5 - s_3 + s_6 = - r.$

Betegnes de to Perioder, hvori Supplementchorderne i en regulær 13kant kunne deles, med p_1 og p_2, saa er:

$$\begin{aligned} p_1 &= - s_1 + s_4 - s_3, \\ p_2 &= s_2 - s_5 + s_6. \end{aligned}$$

Multipliceres disse to Perioder med hinanden, og opløses de udkomne Produkter efter Indledn. § 1. 10, faaer man:

$$p_1 = -s_1 + s_4 - s_3,$$
$$p_2 = s_2 - s_5 + s_6,$$

$$-s_1s_2 + s_4s_2 - s_3s_2 = r(-s_1 - s_3 + s_2 + s_6 - s_1 - s_5),$$
$$s_1s_5 - s_4s_5 + s_3s_5 = r(s_4 + s_6 - s_1 + s_4 + s_2 - s_5),$$
$$-s_1s_6 + s_4s_6 - s_3s_6 = r(-s_5 + s_6 + s_2 - s_3 - s_3 + s_4),$$

$$p_1p_2 = r(-3s_1 + 3s_2 - 3s_3 + 3s_4 - 3s_5 + 3s_6).$$

Altsaa $p_1p_2 = 3r(-s_1 + s_2 - s_3 + s_4 - s_5 + s_6) = -3r^2$.

Man har altsaa $p_1 + p_2 = -r$ og

$$p_1p_2 = -3r^2.$$

Nu ere p_1 og p_2 Rødder i den qvadratiske Ligning:

$$x^2 - (p_1 + p_2)x + p_1p_2 = 0.$$

Indsættes altsaa heri de fundne Værdier for Coefficienterne, faaer man:

$$x^2 + rx - 3r^2 = 0.$$

Naar p_1 og p_2 ere fundne af denne Ligning, saa har man:

$$-s_1 + s_4 - s_3 = p_1,$$
$$-s_1s_4 + s_1s_3 - s_3s_4 = r(-s_3 - s_5 + s_2 + s_4 - s_1 + s_6) =$$
$$= r(-s_1 + s_4 - s_3) + r(s_2 - s_5 + s_6) = r(p_1 + p_2) = -r^2,$$
$$s_1s_4s_3 = s_1(s_1 - s_6)r = (s_0 + s_2 - s_5 + s_6)r^2 = (2r + p_2)r^2.$$

Nu ere $-s_1$, s_4 og $-s_3$ Rødder i den kubiske Ligning:

$$x^3 - (-s_1 + s_4 - s_3)x^2 + (-s_1s_4 + s_1s_3 - s_3s_4)x - s_1s_4s_3 = 0.$$

Indsættes heri de fundne Værdier, faaer man:

$$x^3 - p_1x^2 - r^2x - (2r + p_2)r^2 = 0.$$

Af $p_2 = s_2 - s_5 + s_6$ findes paa samme Maade:

$$x^3 - p_2x^2 - r^2x - (2r + p_1)r^2 = 0.$$

Man behøver ikke at løse mere end den ene af disse Ligninger, ja man behøver blot at finde een eneste Rod af een af dem, saa kunne alle de andre Supplementchorder findes af Ligningerne A, B, C, D o. s. v. § 3, naar man sætter $n = 13$.

Cirkelliniens Deling i 13 ligestore Dele er saaledes paa en elementær Maade reduceret til en Opløsning af 1 Ligning af 2den Grad og 1 Ligning af 3die Grad, uden at Ligningen for den regulære 13kant er bleven benyttet.

§ 11.

Vil man have alle Ledene i en Periode positive, saa indsees let af § 6. 5, 1, at man blot behøver at subtrahere Index i de negative Led fra $2p + 1$. Den udkomne Rest er da Index i et ligegjældende positivt Led.

En Periode, bestaaende af m Led, hvoraf s_α er et af Ledene, kan paa en almindelig Maade betegnes med (m, s_α), en anden Periode med samme Antal Led, hvoraf s_β er et af Ledene, med (m, s_β). Er et af Periodens Led s_α, saa kunne alle Periodens Led betegnes saaledes:

$$s_\alpha,\ s_{\alpha h},\ s_{\alpha h^2},\ s_{\alpha h^3},\ s_{\alpha h^4},\ \ldots\ s_{\alpha h^{m-1}}.$$

Er et af Periodens Led s_β, saa kunne alle Periodens Led betegnes saaledes:

$$s_\beta,\ s_{\beta h},\ s_{\beta h^2},\ s_{\beta h^3},\ s_{\beta h^4},\ldots + s_{\beta h^{m-1}}.$$

Betegnes Summen af Ledene i Perioden (m, s_α) med $\int(m, s_\alpha)$, saa har man altsaa:

$$\int(m, s_\alpha) = s_\alpha + s_{\alpha h} + s_{\alpha h^2} + s_{\alpha h^3} + s_{\alpha h^4} + \ldots + s_{\alpha h^{m-1}},$$

og ligeledes:

$$\int(m, s_\beta) = s_\beta + s_{\beta h} + s_{\beta h^2} + s_{\beta h^3} + s_{\beta h^4} + \ldots\ s_{\beta h^{m-1}}.$$

Summen af hver af de to Perioder i 13kanten kan altsaa betegnes saaledes:

$$\int(3, -s_1) = -s_1 + s_4 - s_3,$$

$$\int(3, s_2) = s_2 - s_5 + s_6.$$

§ 12.

Theorem. Betegnes en Periode, bestaaende af m *Led, hvoraf* s_α *er et af Ledene, med* (m, s_α), *og Summen af Ledene med* $\int(m, s_\alpha)$, *og betegnes en anden Periode lig eller forskjellig fra den förste med samme Antal Led, hvoraf* s_β *er et af Ledene, med* (m, s_β), *og Summen af Ledene med* $\int(m, s_\beta)$, *saa er, naar Produktet betegnes med P:*

$$P = r\left[\int(m, s_{\alpha-\beta}) + \int(m, s_{\alpha+\beta}) + \int(m, s_{\alpha h-\beta}) + \int(m, s_{\alpha h+\beta}) + \int(m, s_{\alpha h^2-\beta}) + \int(m, s_{\alpha h^2+\beta}) + \ldots + \int(m, s_{\alpha h^{m-1}-\beta}) + \int(m, s_{\alpha h^{m-1}+\beta})\right].$$

Bev. Da $(m, s_\alpha) = (m, s_{\alpha h}) = (m, s_{\alpha h^2}) = \ldots = (m, s_{\alpha h^{m-1}})$ og $\int(m, s_\beta) = s_\beta + s_{\beta h} + s_{\beta h^2} + s_{\beta h^3} + \ldots + s_{\beta h^{m-1}}$, saa kan Produktet $\int(m, s_\alpha) \times \int(m, s_\beta)$ fremstilles saaledes:

$$P = s_\beta \int(m, s_\alpha) + s_{\beta h} \int(m, s_{\alpha h}) + s_{\beta h^2} \int(m, s_{\alpha h^2}) + \ldots + s_{\beta h^{m-1}} \int(m, s_{\alpha h^{m-1}}).$$

Udvikles disse Produkter og bemærkes, at $s_\alpha \times s_\beta = r(s_{\alpha-\beta} + s_{\alpha+\beta})$ (Indledn. § 1. 10), faaer man:

$$
\begin{array}{l}
r[s_{\alpha-\beta} + s_{\alpha+\beta} + s_{\alpha h-\beta} + s_{\alpha h+\beta} + \ldots + s_{\alpha h^{m-1}-\beta} + s_{\alpha h^{m-1}+\beta} \\
+ s_{\alpha h-\beta h} + s_{\alpha h+\beta h} + s_{\alpha h^2-\beta h} + s_{\alpha h^2+\beta h} + \ldots + s_{\alpha h^m-\beta h} + s_{\alpha h^m+\beta h} \\
+ s_{\alpha h^2-\beta h^2} + s_{\alpha h^2+\beta h^2} + s_{\alpha h^3-\beta h^2} + s_{\alpha h^3+\beta h^2} + \ldots + s_{\alpha h^{m+1}-\beta h^2} + s_{\alpha h^{m+1}+\beta h^2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ s_{\alpha h^{m-1}-\beta h^{m-1}} + s_{\alpha h^{m-1}+\beta h^{m-1}} + s_{\alpha h^m-\beta h^{m-1}} + s_{\alpha h^m+\beta h^{m-1}} + \ldots + s_{\alpha h^{2m-2}-\beta h^{m-1}} + s_{\alpha h^{2m-2}+\beta h^{m-1}}].
\end{array}
$$

Tages Summen af de vertikale Collonner, hvoraf hver udgjør Summen af en Periode, faaer man:

$$
P = r\Big[\int(m, s_{\alpha-\beta}) + \int m, s_{\alpha+\beta}) + \int(m, s_{\alpha h-\beta}) + \int(m, s_{\alpha h+\beta}) + \int(m, s_{\alpha h^2-\beta}) +
\int(m, s_{\alpha h^2+\beta}) + \ldots + \int(m, s_{\alpha h^{m-1}-\beta}) + \int(m, s_{\alpha h^{m-1}+\beta})\Big].
$$

Multiplikationen af de to Perioder i 13kanten kan altsaa udføres saaledes:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \int(3, -s_1) = -s_1 + s_4 - s_3, \\
p_2 &= \int(3, s_2) = s_2 - s_5 + s_6, \\
\hline
p_1p_2 &= r(\int(3, -s_1) + \int(3, -s_3) + \int(3, s_2) + \int(3, s_6) + \int(3, -s_1) + \int(3, -s_5)) \\
&= r(p_1 + p_1 + p_2 + p_2 + p_1 + p_2) \\
&= r(3p_1 + 3p_2) = -3r^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \int(3, -s_1) = -s_1 + s_4 - s_3, \\
p_1 &= \int(3, -s_1) = -s_1 + s_4 - s_3, \\
\hline
p_1^2 &= r(\int(3, s_0) + \int(3, s_2) + \int(3, -s_3) + \int(3, -s_5) + \int(3, s_2) + \int(3, s_4)) \\
p_1^2 &= r(6r + p_2 + p_1 + p_2 + p_2 + p_1) \\
p_1^2 &= r(6r + 2p_1 + 3p_2) = r(6r + 3(p_1 + p_2) - p_1) = r(6r - 3r - p_1) = r(3r - p_1) \\
&= 3r^2 - rp_1.
\end{aligned}
$$

Altsaa $p_1^2 + rp_1 - 3r^2 = 0$, ligesom forhen blot med den Forskjel, at en af Rødderne er sat istedetfor x.

For lettere at forstaae Beviset for ovenstaaende vigtige Theorem, fremsættes det her specielt for de to Perioder i 13kanten:

$$p_1 = - s_1 + s_4 - s_3,$$
$$p_2 = s_2 - s_5 + s_6,$$

$$r(- s_1 - s_3 + s_2 + s_6 - s_1 - s_5$$
$$+ s_4 - s_1 - s_5 + s_2 + s_4 + s_6$$
$$- s_3 + s_4 + s_6 - s_5 - s_3 + s_2)$$

$$p_1 p_2 = r(p_1 + p_1 + p_2 + p_2 + p_1 + p_2)$$
$$= r(3p_1 + 3p_2) = 3r(p_1 + p_2) = - 3r^2.$$

Man multiplicerer hvert Led i Perioden p_1 med s_2 og opløser Produktet (Indledn. § 1. 10) uden at nedskrive Faktorerne ved Siden af hinanden, derpaa hvert Led med — s_5 paa samme Maade, idet man begynder med det ligeoverfor staaende Led s_4 og slutter med — s_1, og endelig hvert Led med s_6, idet man begynder med det ligeoverfor staaende Led — s_3 og slutter med s_4. Naar de enkelte Produkter ere stillede saaledes, sees tydeligen, at Summen af hver af de vertikale Collonner udgjør Summen af en Periode. Man behøver altsaa blot at multiplicere hvert Led i den ene Periode med et eneste Led af den anden og regne hvert af de udkomne Led for Summen af en Periode.

§ 13.

Den regulære 19*kant.*

Er $n = 19$, altsaa $\frac{n-1}{2} = p = 9 = 3 . 3$, saa kunne Supplementchorderne deles i 3 Perioder. Efter Indledn. § 1. 1 har man:

$$c_1 s_1 = r c_2,$$
$$c_2 s_2 = r c_4,$$
$$c_4 s_4 = r c_8,$$
$$c_8 s_8 = r c_3,$$
$$c_3 s_3 = r c_6,$$
$$c_6 s_6 = r c_7,$$
$$c_7 s_7 = r c_5,$$
$$c_5 s_5 = r c_9,$$
$$c_9 s_9 = r c_1,$$

(1) $$s_1 s_2 s_4 s_8 s_3 s_6 s_7 s_5 s_9 = r^9.$$

Opløses dette Produkt efter Indledn. § 1. 10, faaer man:

(2) $$- s_1 + s_2 - s_3 + s_4 - s_5 + s_6 - s_7 + s_8 - s_9 = - r.$$

Ordnes Ledene i Ligning (2) efter Ligning (1), faaer man en sammenhængende geometrisk Række:

(3) $-s_1 + s_2 + s_4 + s_8 - s_3 + s_6 - s_7 - s_5 - s_9 = -r.$

Betegnes nu de tre Perioder, hvori Supplementchorderne kunne deles, med p_1, p_2, p_3, saa har man:

$$p_1 = -s_1 + s_8 - s_7,$$
$$p_2 = s_2 - s_3 - s_5,$$
$$p_3 = s_4 + s_6 - s_9.$$

Da nu p_1, p_2 og p_3 ere Rødder i den kubiske Ligning:

(4) $x^3 - (p_1 + p_2 + p_3)x^2 + (p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3)x - p_1p_2p_3 = 0$, saa maa man altsaa først finde Coefficienterne i denne Ligning.

Man har, at $p_1 + p_2 + p_3 = -r$.

$$p_1 = \int(3, -s_1) = -s_1 + s_8 - s_7,$$
$$p_2 = \int(3, s_2) = s_2 - s_3 - s_5,$$

$$p_1p_2 = r(\int(3, -s_1) + \int(3, -s_3) + \int(3, s_6) + \int(3, -s_9) + \int(3, -s_5) + \int(3, -s_9))$$
$$= r(p_1 + p_2 + p_3 + p_3 + p_2 + p_3),$$
$$p_1p_2 = r(p_1 + 2p_2 + 3p_3).$$

$$p_1 = \int(3, -s_1) = -s_1 + s_8 - s_7,$$
$$p_3 = \int(3, s_4) = s_4 + s_6 - s_9,$$

$$p_1p_3 = r(\int(3, -s_3) + \int(3, -s_5) + \int(3, s_4) + \int(3, -s_7) + \int(3, -s_3) + \int(3, s_8))$$
$$= r(p_2 + p_2 + p_3 + p_1 + p_2 + p_1),$$
$$p_1p_3 = r(2p_1 + 3p_2 + p_3).$$

$$p_2 = \int(3, s_2) = s_2 - s_3 - s_5,$$
$$p_3 = \int(3, s_4) = s_4 + s_6 - s_9,$$

$$p_2p_3 = r(\int(3, s_2) + \int(3, s_6) + \int(3, -s_1) + \int(3, -s_7) + \int(3, -s_1) + \int(3, -s_9))$$
$$= r(p_2 + p_3 + p_1 + p_1 + p_1 + p_3).$$

$$p_2p_3 = r(3p_1 + p_2 + 2p_3),$$
$$p_1p_2 = r(p_1 + 2p_2 + 3p_3),$$
$$p_1p_3 = r(2p_1 + 3p_2 + p_3),$$

Altsaa $p_1p_3 + p_1p_3 + p_2p_3 = r(6p_1 + 6p_2 + 6p_3) = 6r(p_1 + p_2 + p_3) = -6r^2.$

Multipliceres den første af ovenstaaende Ligninger med p_1, faaer man:

$$p_1p_2p_3 = r(3p_1^2 + p_1p_2 + 2p_1p_3).$$

$$p_1 = \int(3, -s_1) = -s_1 + s_8 - s_7,$$

$$p_1 = \int(3, -s_1) = -s_1 + s_8 - s_7,$$

$$p_1^2 = r(\int(3, s_0) + \int(3, s_2) + \int(3, -s_7) + \int(3, -s_9) + \int(3, s_6) + \int(3, s_8))$$

$$= r(6r + p_2 + p_1 + p_3 + p_3 + p_1),$$

$$p_1^2 = r(6r + 2p_1 + p_2 + 2p_3).$$

$$3p_1^2 = r(18r + 6p_1 + 3p_2 + 6p_3),$$

$$p_1p_2 = r(\ \text{„}\ + p_1 + 2p_2 + 3p_3),$$

$$2p_1p_3 = r(\ \text{„}\ + 4p_1 + 6p_2 + 2p_3),$$

Altsaa $p_1p_2p_3 = r^2(18r + 11p_1 + 11p_2 + 11p_3)$

$$= r^2(18r + 11(p_1 + p_2 + p_3)) = r^2(18r - 11r) = 7r^3.$$

Indsættes de saaledes fundne Værdier i Ligning (4), faaer man:

$$x^3 + rx^2 - 6r^2x - 7r^3 = 0.$$

Naar een Rod er funden af denne Ligning, kunne de andre to Rødder findes af Ligningerne:

$$p_1 + p_2 + p_3 = -r.$$

$$p_1^2 = r(6r + 2p_1 + p_2 + 2p_3).$$

Multipliceres den sidste Ligning med p_1, faaer man:

$$p_1^3 = r(6rp_1 + 2p_1^2 + p_1p_2 + 2p_1p_3),$$

$$6rp_1 = r(\ \text{„}\ + 6p_1 + \text{„}\ + \text{„}\ ),$$

$$2p_1^2 = r(12r + 4p_1 + 2p_2 + 4p_3),$$

$$p_1p_2 = r(\ \text{„}\ + p_1 + 2p_2 + 3p_3),$$

$$2p_1p_3 = r(\ \text{„}\ + 4p_1 + 6p_2 + 2p_3),$$

Altsaa $p_1^3 = r(12r + 15p_1 + 10p_2 + 9p_3).$

Man har altsaa følgende 3 Ligninger:

$$p_1 + p_2 + p_3 = -r,$$

$$p_1^2 = r(6r + 2p_1 + p_2 + 2p_3),$$

$$p_1^3 = r(12r + 15p_1 + 10p_2 + 9p_3).$$

Elimineres p_2 og p_3 af disse Ligninger, faaer man:

$$p_1^3 + rp_1 - 6r^2p_1 - 7r^3 = 0.$$

Nu er $-s_1 + s_8 - s_7 = p_1$,

$$- s_1 s_8 + s_1 s_7 - s_7 s_8 = (- s_7 - s_9 + s_6 + s_8 - s_1 + s_4) r = r(- s_1 + s_8 - s_7) + r(s_4 + s_6 - s_9) = r(p_1 + p_3),$$

$$s_1 s_8 s_7 = s_1 (s_1 - s_4) r = (s_0 + s_2 - s_3 - s_5) r^2 = (2r + p_2).$$

Altsaa ere $- s_1$, s_8 og $- s_7$ Rødder i den kubiske Ligning:

$$x^3 - p_1 x^2 + (p_1 + p_3) rx - (2r + p_2) r^2 = 0.$$

Paa samme Maade kunne Supplementchorderne i hver af Perioderne p_2 og p_3 findes:

$$s_2 - s_3 - s_5 = p_2,$$

$$- s_2 s_3 - s_2 s_5 + s_3 s_5 = (- s_1 - s_5 - s_3 - s_7 + s_2 + s_8) r = ((- s_1 + s_8 - s_7) + (s_2 - s_3 - s_5)) r = (p_1 + p_2) r,$$

$$s_2 s_3 s_5 = s_2 (s_2 + s_8) r = (s_0 + s_4 + s_6 - s_9) r^2 = (2r + p_3) r^2.$$

Altsaa ere s_2, $- s_3$ og $- s_5$ Rødder i Ligningen:

$$x^3 - p_2 x^2 + (p_1 + p_2) x - (2r + p_3) = 0.$$

$$s_4 + s_6 - s_9 = p_3,$$

$$s_4 s_6 - s_4 s_9 - s_6 s_9 = (s_2 - s_9 - s_5 + s_6 - s_3 + s_4) r = ((s_2 - s_3 - s_5) + (s_4 + s_6 - s_9)) r = (p_2 + p_3) r,$$

$$- s_4 s_6 s_9 = - s_4 (s_3 - s_4) r = (- s_1 - s_7 + s_0 + s_8) r^2 = (2r + p_1) r^2.$$

Altsaa ere s_4, s_6 og $- s_9$ Rødder i Ligningen:

$$x^3 - p_3 x^2 + (p_2 + p_3) rx - (2r + p_1) r^2 = 0.$$

Naar man har fundet een Rod af hvilkensomhelst af disse 3 Ligninger, kunne de øvrige findes af de i § 3 anførte Ligninger, naar man deri sætter $n = 19$.

§ 14.

Den regulære 31kant.

Da $\frac{31-1}{2} = 15 = 3.\ 5$, saa kunne Supplementchorderne deles i 3 Perioder, hver paa 5 Led eller i 5 Perioder, hver paa 3 Led. Anvendes § 1. 1, saa faaer man:

$c_1 s_1 = rc_2$,	$c_3 s_3 = rc_6$,	$c_5 s_5 = rc_{10}$,
$c_2 s_2 = rc_4$,	$c_6 s_6 = rc_{12}$,	$c_{10} s_{10} = rc_{11}$,
$c_4 s_4 = rc_8$,	$c_{12} s_{12} = rc_7$,	$c_{11} s_{11} = rc_9$,
$c_8 s_8 = rc_{15}$,	$c_7 s_7 = rc_{14}$,	$c_9 s_9 = rc_{13}$,
$c_{15} s_{15} = rc_1$,	$c_{14} s_{14} = rc_3$,	$c_{13} s_{13} = rc_5$,
$s_1 s_2 s_4 s_8 s_{15} = r^5$.	$s_3 s_6 s_{12} s_7 s_{14} = r^5$.	$s_5 s_{10} s_{11} s_9 s_{13} = r^5$.

Udvikles eet af disse 3 Produkter efter § 1. 10, faaer man:

$$- s_1 + s_2 - s_3 + s_4 - s_5 + s_6 - s_7 + s_8 - s_9 + s_{10} - s_{11} + s_{12} - s_{13} + s_{14} - s_{15} = - r.$$

Ordnes nu disse Supplementchorder efter ovenstaaende Produkter i 3 Perioder, faaer man:

$$(-s_1 + s_2 + s_4 + s_8 - s_{15}) + (-s_3 + s_6 + s_{12} - s_7 + s_{14}) + (-s_5 + s_{10} - s_{11} - s_9 - s_{13}) = -r.$$

Betegnes disse Perioder med p_1, p_2, p_3, saa har man:

$$p_1 + p_2 + p_3 = -r.$$

$$p_1 = -s_1 + s_2 + s_4 + s_8 - s_{15},$$

$$p_2 = -s_3 + s_6 + s_{12} - s_7 + s_{14},$$

$$p_3 = -s_5 + s_{10} - s_{11} - s_9 - s_{13}.$$

$$p_1 = \int^{\circ}(5, -s_1) = -s_1 + s_2 + s_4 + s_8 - s_{15},$$

$$p_2 = \int^{\circ}(5, -s_3) = -s_3 + s_6 + s_{12} - s_7 + s_{14},$$

$$p_1p_2 = r(\int^{\circ}(5, s_2) + \int^{\circ}(5, s_4) + \int^{\circ}(5, -s_5) + \int^{\circ}(5, -s_7) + \int^{\circ}(5, -s_{11}) + \int^{\circ}(5, -s_{13}) + \int^{\circ}(5, s_6) + \int^{\circ}(5, s_8) + \int^{\circ}(5, -s_{13}) + \int^{\circ}(5, -s_{15})) = r(p_1 + p_1 + p_3 + p_2 + p_3 + p_3 + p_2 + p_1 + p_3 + p_1),$$

$$p_1p_2 = r(4p_1 + 2p_2 + 4p_3).$$

$$p_1 = \int^{\circ}(5, -s_1) = -s_1 + s_2 + s_4 + s_8 - s_{15},$$

$$p_3 = \int^{\circ}(5, -s_5) = -s_5 + s_{10} - s_{11} - s_9 - s_{13},$$

$$p_1p_3 = r(\int^{\circ}(5, s_4) + \int^{\circ}(5, s_6) + \int^{\circ}(5, -s_9) + \int^{\circ}(5, -s_{11}) + \int^{\circ}(5, s_{10}) + \int^{\circ}(5, s_{12}) + \int^{\circ}(5, s_8) + \int^{\circ}(5, s_{10}) + \int^{\circ}(5, s_{12}) + \int^{\circ}(5, s_{14})) = r(p_1 + p_2 + p_3 + p_3 + p_3 + p_2 + p_1 + p_3 + p_2 + p_2),$$

$$p_1p_3 = r(2p_1 + 4p_2 + 4p_3).$$

$$p_2 = \int^{\circ}(5, -s_3) = -s_3 + s_6 + s_{12} - s_7 + s_{14},$$

$$p_3 = \int^{\circ}(5, -s_5) = -s_5 + s_{10} - s_{11} - s_9 - s_{13},$$

$$p_2p_3 = r(\int^{\circ}(5, s_2) + \int^{\circ}(5, s_8) + \int^{\circ}(5, -s_7) + \int^{\circ}(5, -s_{13}) + \int^{\circ}(5, s_8) + \int^{\circ}(5, s_{14}) + \int^{\circ}(5, s_6) + \int^{\circ}(5, s_{12}) + \int^{\circ}(5, s_{10}) + \int^{\circ}(5, -s_{15})) = r(p_1 + p_1 + p_2 + p_3 + p_1 + p_2 p_2 + p_2 + p_3 + p_1),$$

$$p_2p_3 = r(4p_1 + 4p_2 + 2p_3),$$
$$p_1p_2 = r(4p_1 + 2p_2 + 4p_3),$$
$$p_1p_3 = r(2p_1 + 4p_2 + 4p_3),$$

Altsaa $p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 = r(10p_1 + 10p_2 + 10p_3) = 10r(p_1 + p_2 + p_3) = -10r^2.$

$$p_1 = \int(5, -s_1) = -s_1 + s_2 + s_4 + s_8 - s_{15},$$

$$p_1 = \int(5, -s_1) = -s_1 + s_2 + s_4 + s_8 - s_{15},$$

$$p_1^2 = r(\int(5, s_0) + \int(5, s_2) + \int(5, -s_1) + \int(5, -s_3) + \int(5, -s_3) + \int(5, -s_5) + \int(5, -s_7) + \int(5, -s_9) + \int(5, s_{14}) + \int(5, -s_{15})) = r(10r + p_1 + p_1 + p_2 + p_2 + p_3 + p_2 + p_3 + p_2 + p_1),$$

$$p_1^2 = r(10r + 3p_1 + 4p_2 + 2p_3).$$

Efter det Foregaaende har man:

$$p_2p_3 = r(4p_1 + 4p_2 + 2p_3).$$

Altsaa $p_1p_2p_3 = r(4p_1^2 + 4p_1p_2 + 2p_1p_3).$

Nu er
$$4p_1^2 = r(40r + 12p_1 + 16p_2 + 8p_3),$$
$$4p_1p_2 = r(\text{„} + 16p_1 + 8p_2 + 16p_3),$$
$$2p_1p_3 = r(\text{„} + 4p_1 + 8p_2 + 8p_3),$$

$$p_1p_2p_3 = r^2(40r + 32p_1 + 32p_2 + 32p_3)$$
$$= r^2(40r + 32(p_1 + p_2 + p_3)) = 40r^3 - 32r^3 = 8r^3.$$

Nu ere p_1, p_2 og p_3 Rødder i den kubiske Ligning:

$$x^3 - (p_1 + p_2 + p_3)x^2 + (p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3)x - p_1p_2p_3 = 0.$$

Indsættes heri de fundne Værdier, faaer man:

$$x^3 + rx^2 - 10r^2x - 8r^3 = 0.$$

Naar nu een af Rødderne ere fundne af denne Ligning, kunne de andre to Rødder findes af Ligningerne:

$$p_1 + p_2 + p_3 = -r,$$
$$p_1^2 = r(10r + 3p_1 + 4p_2 + 2p_3).$$

Ere nu p_1, p_2 og p_3 fundne, saa kan hvert Led i hvilkensomhelst af disse Perioder findes ved Opløsning af en Ligning af 5te Grad, thi $-s_1$, s_2, s_4, s_8, $-s_{15}$ i Perioden p_1 ere Rødder i Ligningen:

$$x^5 - (-s_1 + s_2 + s_4 + s_8 - s_{15})x^4 + (-s_1s_2 - s_1s_4 - s_1s_8 + s_1s_{15} + s_2s_4 + s_2s_8 - s_2s_{15} + s_4s_8 - s_4s_{15} - s_8s_{15})x^3 - (-s_1s_2s_4 - s_1s_4s_8 + s_1s_8s_{15}$$

$+ s_2s_4s_8 - s_2s_4s_{15} - s_4s_8s_{15} - s_1s_2s_8 + s_1s_2s_{15} + s_1s_4s_{15} - s_2s_8s_{15})x^2 +$
$(- s_1s_2s_4s_8 + s_1s_2s_4s_{15} + s_1s_2s_8s_{15} + s_1s_4s_8s_{15} - s_2s_4s_8s_{15})x - s_1s_2s_4s_8s_{15}$
$= 0.$

Coefficienterne i denne Ligning kunne reduceres saaledes:

$- s_1s_2 - s_1s_4 - s_1s_8 + s_1s_{15} + s_2s_4 + s_2s_8 - s_2s_{15} + s_4s_8 - s_4s_{15} - s_8s_{15} =$
$r(- s_1 - s_3 - s_3 - s_5 - s_7 - s_9 + s_{14} - s_{15} + s_2 + s_6 + s_6 + s_{10} - s_{13}$
$+ s_{14} + s_4 + s_{12} - s_{11} + s_{12} - s_7 + s_8) = r((- s_1 + s_2 + s_4 + s_8 - s_{15}) +$
$(-2s_3 + 2s_6 + 2s_{12} - 2s_7 + 2s_{14}) + (- s_5 + s_{10} - s_{11} - s_9 - s_{13})) = r(p_1$
$+ 2p_2 + p_3) = (p_2 - r)r.$

$$- s_1s_2s_4 = - s_1(s_2 + s_6)r = (- s_1 - s_3 - s_5 - s_7)r^2,$$
$$- s_1s_4s_8 = - s_1(s_4 + s_{12})r = (- s_3 - s_5 - s_{11} - s_{13})r^2,$$
$$+ s_1s_8s_{15} = s_1(s_7 - s_8)r = (s_6 + s_8 - s_7 - s_9)r^2,$$
$$+ s_2s_4s_8 = s_2(s_4 + s_{12})r = (s_2 + s_6 + s_{10} + s_{14})r^2,$$
$$- s_2s_4s_{15} = - s_2(s_{11} - s_{12})r = (- s_9 - s_{13} + s_{10} + s_{14})r^2,$$
$$- s_4s_8s_{15} = - s_4(s_7 - s_8)r = (- s_3 - s_{11} + s_4 + s_{12})r^2,$$
$$- s_1s_2s_8 = - s_1(s_6 + s_{10})r = (- s_5 - s_7 - s_9 - s_{11})r^2,$$
$$+ s_1s_2s_{15} = s_1(s_{13} - s_{14})r = (s_{12} + s_{14} - s_{13} - s_{15})r^2,$$
$$+ s_1s_4s_{15} = s_1(s_{11} - s_{12})r = (s_{10} + s_{12} - s_{11} - s_{13})r^2,$$
$$- s_2s_8s_{15} = - s_2(s_7 - s_8)r = (- s_5 - s_9 + s_6 + s_{10})r^2,$$

$$((- s_1 + s_2 + s_4 + s_8 - s_{15}) + (-3s_3 + 3s_6 + 3s_{12} - 3s_7 + 3s_{14}) + (-4s_5 + 4s_{10} - 4s_{11} - 4s_9 - 4s_{13}))r^2$$
$$= (p_1 + 3p_2 + 4p_3)r^2.$$

$$- s_1s_2s_4s_8 = - s_1s_2(s_4 + s_{12})r = - s_1(s_2 + s_6 + s_{10} + s_{14})r^2 = (-s_1 - s_3 - s_5 - s_7 - s_9 - s_{11} - s_{13} - s_{15})r^3,$$
$$+ s_1s_2s_4s_{15} = s_1s_2(s_{11} - s_{12})r = s_1(s_9 + s_{13} - s_{10} - s_{14})r^2 = (s_8 + s_{10} + s_{12} + s_{14} - s_9 - s_{11} - s_{13} - s_{15})r^3,$$
$$+ s_1s_2s_8s_{15} = s_1s_2(s_7 - s_8)r = s_1(s_5 + s_9 - s_6 - s_{10})r^2 = (s_4 + s_6 + s_8 + s_{10} - s_5 - s_7 - s_9 - s_{11})r^3,$$
$$+ s_1s_4s_8s_{15} = s_1s_4(s_7 - s_8)r = s_1(s_3 + s_{11} - s_4 - s_{12})r^2 = (s_2 + s_4 + s_{10} + s_{12} - s_3 - s_5 - s_{11} - s_{13})r^3,$$
$$- s_2s_4s_8s_{15} = - s_2s_4(s_7 - s_8)r = - s_2(s_3 + s_{11} - s_4 - s_{12})r^2 = (-s_1 - s_5 - s_9 - s_{13} + s_2 + s_6 + s_{10} + s_{14})r^3,$$

$$((-2s_1 + 2s_2 + 2s_4 + 2s_8 - 2s_{15}) + (-2s_3 + 2s_6 + 2s_{12} - 2s_7 + 2s_{14}) + (-4s_5 + 4s_{10} - 4s_{11} - 4s_9 - 4s_{13}))r^3 =$$
$$= (2p_1 + 2p_2 + 4p_3)r^3.$$

$s_1s_2s_4s_8s_{15} = s_1s_2s_4(s_7 - s_8)r = s_1s_2(s_3 + s_{11} - s_4 - s_{12})r^2 = s_1(s_1 + s_5 +$
$s_9 + s_{13} - s_2 - s_6 - s_{10} - s_{14})r^3 = (s_0 + s_2 + s_4 + s_6 + s_8 + s_{10} + s_{12} -$
$s_{14} - s_1 - s_3 - s_5 - s_7 - s_9 - s_{11} - s_{13} - s_{15})r^4 = (2r - r))r^4 = r^5,$
hvilket forud er bekjendt.

Indsættes de saaledes fundne Værdier, faaer man:

$$x^5 - p_1x^4 + (p_2 - r)rx^3 - (p_1 + 3p_2 + 4p_3)r^2x^2 + (2p_1 + 2p_2 + 4p_3)r^3x - r^5 = 0.$$

Cirkelliniens Deling i 31 ligestore Dele er saaledes reduceret til Opløsningen af 1 Ligning af 3die Grad og 1 Ligning af 5te Grad.

§ 15.

Foruden at anvende den geometriske Sætning (Indledn. § 1. 1) til at ordne Supplementchorderne i en regulær (2p + 1)kant i en geometrisk Række, hvis Exponent er 2, saaledes som i § 10 omhandlet, kan den ogsaa anvendes til at ordne dem i geometriske Rækker, hvis Exponenter ere hvilketsomhelst af Tallene 2, 3, 4, 5 . . . p.

Er n = 13, altsaa $\frac{n-1}{2} = p = 6 = 2 \,.\, 3$, saa kunne Supplementchorderne ordnes i geometriske Rækker, hvis Exponenter ere 2, 3, 4, 5, 6, saaledes:

A.

Exp. 2.

$$\begin{aligned} c_1s_1 &= rc_2, \\ c_2s_2 &= rc_4, \\ c_4s_4 &= rc_5, \\ c_5s_5 &= rc_3, \\ c_3s_3 &= rc_6, \\ c_6s_6 &= rc_1, \end{aligned}$$

$$s_1s_2s_4s_5s_3s_6 = r^6.$$

B.

Exp. 3.

$$\begin{aligned} c_1s_1 &= rc_2, \\ c_3s_3 &= rc_6, \\ c_4s_4 &= rc_5, \\ c_2s_2 &= rc_4, \\ c_6s_6 &= rc_1, \\ c_5s_5 &= rc_3, \end{aligned}$$

$$s_1s_3s_4 \,\vdots\, s_2s_6s_5 = r^6.$$

C.

Exp. 4.

$$\begin{aligned} c_1s_1 &= rc_2, \\ c_4s_4 &= rc_5, \\ c_3s_3 &= rc_6, \\ c_2s_2 &= rc_4, \\ c_5s_5 &= rc_3, \\ c_6s_6 &= rc_1, \end{aligned}$$

$$s_1s_4s_3 \,\vdots\, s_2s_5s_6 = r^6.$$

D.

Exp. 5.

$$\begin{aligned} c_1s_1 &= rc_2, \\ c_5s_5 &= rc_3, \\ c_2s_2 &= rc_4, \\ c_3s_3 &= rc_6, \\ c_4s_4 &= rc_5, \\ c_6s_6 &= rc_1. \end{aligned}$$

$$s_1s_5 \,\vdots\, s_2s_3 \,\vdots\, s_4s_6 = r^6.$$

E.

Exp. 6.

$$\begin{aligned} c_1s_1 &= rc_2, \\ c_6s_6 &= rc_1, \\ c_3s_3 &= rc_6, \\ c_5s_5 &= rc_3, \\ c_4s_4 &= rc_5, \\ c_2s_2 &= rc_4, \end{aligned}$$

$$s_1s_6s_3s_5s_4s_2 = r^6.$$

Perioderne ere her adskilte ved punkterede Linier for lettere at kunne overskues.

Man seer af ovenstaaende Fremstilling, at, naar 2 eller 6 vælges til Exponent, faaer man alle Supplementchorderne ordnede i en geometrisk Række. Vælges derimod 3 eller 4, faaer man 2 Perioder, og, naar 5 vælges, faaer man 3 Perioder.

Er $n = 17$, altsaa $\frac{n-1}{2} = 8 = 2 \,.\, 4 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2$, saa kunne Supplementchorderne ordnes i geometriske Rækker, hvis Exponenter ere 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

A.

Exp. 2.

$$c_1 s_1 = rc_2,$$
$$c_2 s_2 = rc_4,$$
$$c_4 s_4 = rc_8,$$
$$c_8 s_8 = rc_1,$$
$$s_1 s_2 s_4 s_8 = r^4.$$
$$c_3 s_3 = rc_6,$$
$$c_6 s_6 = rc_5,$$
$$c_5 s_5 = rc_7,$$
$$c_7 s_7 = rc_3,$$
$$s_3 s_6 s_5 s_7 = r^4.$$

B.

Exp. 3.

$$c_1 s_1 = rc_2,$$
$$c_3 s_3 = rc_6,$$
$$c_8 s_8 = rc_1,$$
$$c_7 s_7 = rc_3,$$
$$c_4 s_4 = rc_8,$$
$$c_5 s_5 = rc_7,$$
$$c_2 s_2 = rc_4,$$
$$c_6 s_6 = rc_5,$$
$$s_1 s_3 s_8 s_7 s_4 s_5 s_2 s_6 = r^8.$$

C.

Exp. 4.

$$c_1 s_1 = rc_2,$$
$$c_4 s_4 = rc_8,$$
$$c_2 s_2 = rc_4,$$
$$c_8 s_8 = rc_1,$$
$$c_3 s_3 = rc_6,$$
$$c_5 s_5 = rc_7,$$
$$c_6 s_6 = rc_5,$$
$$c_7 s_7 = rc_3,$$
$$s_1 s_4 \,\vdots\, s_2 s_8 \,\vdots\, s_3 s_5 \,\vdots\, s_6 s_7 = r^8.$$

D.

Exp. 5.

$$c_1 s_1 = rc_2,$$
$$c_5 s_5 = rc_7,$$
$$c_8 s_8 = rc_1,$$
$$c_6 s_6 = rc_5,$$
$$c_4 s_4 = rc'_8,$$
$$c_3 s_3 = rc_6,$$
$$c_2 s_2 = rc_4,$$
$$c_7 s_7 = rc_3,$$
$$s_1 s_5 s_8 s_6 s_4 s_3 s_2 s_7 = r^8.$$

E.

Exp. 6.

$$c_1 s_1 = rc_2,$$
$$c_6 s_6 = rc_5,$$
$$c_2 s_2 = rc_4,$$
$$c_5 s_5 = rc_7,$$
$$c_4 s_4 = rc_8,$$
$$c_7 s_7 = rc_3,$$
$$c_8 s_8 = rc_1,$$
$$c_3 s_3 = rc_6,$$
$$s_1 s_6 s_2 s_5 s_4 s_7 s_8 s_3 = r^8.$$

F.

Exp. 7.

$$c_1 s_1 = rc_2,$$
$$c_7 s_7 = rc_3,$$
$$c_2 s_2 = rc_4,$$
$$c_3 s_3 = rc_6,$$
$$c_4 s_4 = rc_8,$$
$$c_6 s_6 = rc_5,$$
$$c_8 s_8 = rc_1,$$
$$c_5 s_5 = rc_7,$$
$$s_1 s_7 s_2 s_3 s_4 s_6 s_8 s_5 = r^8.$$

G.

Exp. 8.

$$c_1 s_1 = rc_2,$$
$$c_8 s_8 = rc_1,$$
$$c_4 s_4 = rc_8,$$
$$c_2 s_2 = rc_4,$$
$$s_1 s_8 s_4 s_2 = r^4.$$

G.

Exp. 8.

$$c_3 s_3 = rc_6,$$
$$c_7 s_7 = rc_3,$$
$$c_5 s_5 = rc_7,$$
$$c_6 s_6 = rc_5,$$
$$s_3 s_7 s_5 s_6 = r^4.$$

Af foranstaaende Udvikling sees, at, naar 3, 5, 6 eller 7 vælges til Exponent, faaer man alle Supplementchorder i første Halvcirkel ordnede i en geometrisk Række. Vælges 2 eller 8, faaer man 2 Perioder, hver paa 4 Led, og, naar 4 vælges, faaer man 4 Perioder, hver paa 2 Led.

Man seer tillige heraf, at, hvis man betegner hvilketsomhelst af Tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 med x, saa ere Indices bestemte ved Ligningen $x^8 = \pm 1 + M(17)$, hvor $M(17)$ betegner et Multiplum af 17.

§ 16.

Vil man ved Opløsningen af den regulære 31kant først løse en Ligning af 5te Grad og derpaa en Ligning af 3die Grad, saa maa man efter § 15 blandt Tallene 1, 2, 3, 4, 5 . . . 15 enten vælge et Tal til Exponent, som giver alle Supplementchorderne, ordnede i en geometrisk Række, eller et saadant Tal, som giver Perioder paa tre Led. Vælges 3 til Exponent, faaer man en geometrisk Række, der indeholder alle 15 Supplementchorder. Vælges derimod 5, faaer man Perioder paa 3 Led, hvilket sees af følgende Udviklinger:

Exp. 3.	Exp. 5.
$c_1s_1 = rc_2$,	$c_1s_1 = rc_2$,
$c_3s_3 = rc_6$,	$c_5s_5 = rc_{10}$,
$c_9s_9 = rc_{13}$,	$c_6s_6 = rc_{12}$,
$c_4s_4 = rc_8$,	$c_3s_3 = rc_6$,
$c_{12}s_{12} = rc_7$,	$c_{15}s_{15} = rc_1$,
$c_5s_5 = rc_{10}$,	$c_{13}s_{13} = rc_5$,
$c_{15}s_{15} = rc_1$,	$c_9s_9 = rc_{13}$,
$c_{14}s_{14} = rc_3$,	$c_{14}s_{14} = rc_3$,
$c_{11}s_{11} = rc_9$,	$c_8s_8 = rc_{15}$,
$c_2s_2 = rc_4$,	$c_4s_4 = rc_8$,
$c_6s_6 = rc_{12}$,	$c_{11}s_{11} = rc_9$,
$c_{13}s_{13} = rc_5$,	$c_7s_7 = rc_{14}$,
$c_8s_8 = rc_{15}$,	$c_{12}s_{12} = rc_7$,
$c_7s_7 = rc_{14}$,	$c_2s_2 = rc_4$,
$c_{10}s_{10} = rc_{11}$,	$c_{10}s_{10} = rc_{11}$,

$s_1s_3s_9s_4s_{12}s_5s_{15}s_{14}s_{11}s_2s_6s_{13}s_8s_7s_{10} = r^{15}$.

$s_1s_5s_6 \vdots s_3s_{15}s_{13} \vdots s_9s_{14}s_8 \vdots s_4s_{11}s_7 \vdots s_{12}s_2s_{10} = r^{15}$.

Istedetfor hver Gang at opskrive Supplementchorderne i Ligninger efter § 15, er det beqvemmere at ophøie den valgte Exponent til Potentserne 0, 1, 2, 3, 4 . . . p - 1, og af hver af disse Potentser at tage de mindste Rester. Dette kan lettest udføres ved at multiplicere den mindste Rest af hver foregaaende Potents med Exponenten i Rækken eller Roden og, naar Produktet er større end p, at subtrahere det fra 2p + 1. De saaledes efterhaanden fremkomne mindste Rester ere da Supplementchordernes Indices, ordnede i en geometrisk Række.

$$3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 3^5,\ 3^6,\ 3^7,\ 3^8,\ 3^9,\ 3^{10},\ 3^{11},\ 3^{12},\ 3^{13},\ 3^{14}.$$
$$1,\ 3,\ 9,\ 4,\ 12,\ 5,\ 15,\ 14,\ 11,\ 2,\ 6,\ 13,\ 8,\ 7,\ 10.$$

Nu har man efter § 6. 6:

$-s_1 + s_2 - s_3 + s_4 - s_5 + s_6 - s_7 + s_8 - s_9 + s_{10} - s_{11} + s_{12} - s_{13} + s_{14} - s_{15} = -r$, følgelig ogsaa:

$-s_1 - s_3 - s_9 + s_4 + s_{12} - s_5 - s_{15} + s_{14} - s_{11} + s_2 + s_6 - s_{13} + s_8 - s_7 + s_{10} = -r.$

Betegnes hver af de 5 Perioder, hvori Supplementchorderne kunne deles, med p_1, p_2, p_3, p_4 og p_5, saa har man:

$$\begin{aligned} p_1 &= -s_1 - s_5 + s_6, \\ p_2 &= -s_3 - s_{15} - s_{13}, \\ p_3 &= -s_9 + s_{14} + s_8, \\ p_4 &= s_4 - s_{11} - s_7, \\ p_5 &= s_{12} + s_2 + s_{10}. \end{aligned}$$

Nu ere p_1, p_2, p_3, p_4 og p_5 Rødder i Ligningen:

$x^5 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)x^4 + (p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5)x^3 - (p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_2p_3p_4 + p_2p_3p_5 + p_3p_4p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 + p_1p_4p_5 + p_2p_4p_5)x^2 + (p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_5 + p_1p_2p_4p_5 + p_1p_3p_4p_5 + p_2p_3p_4p_5)x - p_1p_2p_3p_4p_5 = 0.$

Coefficienterne i denne Ligning kunne reduceres saaledes:

$$p_1 = \int(3, -s_1) = -s_1 - s_5 + s_6,$$

$$p_1^2 = r\left(\int(3, s_0) + \int(3, s_2) + \int(3, s_4) + \int(3, s_6) + \int(3, -s_5) + \int(3, -s_7)\right)$$
$$= r(6r + p_5 + p_4 + p_1 + p_1 + p_4),$$
$$p_1^2 = r(6r + 2p_1 + 2p_4 + p_5).$$

$$p_1 = \oint^{\circ}(3,-s_1) = -s_1 - s_5 + s_6,$$

$$p_2 = \oint^{\circ}(3,-s_3) = -s_3 - s_{15} - s_{13},$$

$$p_1p_2 = r(\oint^{\circ}(3,s_2) + \oint^{\circ}(3,s_4) + \oint^{\circ}(3,s_2) + \oint^{\circ}(3,s_8) + \oint^{\circ}(3,-s_3) + \oint^{\circ}(3,-s_9))$$
$$= r(p_5 + p_4 + p_5 + p_3 + p_2 + p_3),$$
$$p_1p_2 = r(p_2 + 2p_3 + p_4 + 2p_5).$$

$$p_1 = \oint^{\circ}(3,-s_1) = -s_1 - s_5 + s_6,$$

$$p_3 = \oint^{\circ}(3,-s_9) = -s_9 + s_{14} + s_8,$$

$$p_1p_3 = r(\oint^{\circ}(3,s_8) + \oint^{\circ}(3,s_{10}) + \oint^{\circ}(3,s_4) + \oint^{\circ}(3,s_{14}) + \oint^{\circ}(3,-s_3) + \oint^{\circ}(3,-s_{15}))$$
$$= r(p_3 + p_5 + p_4 + p_3 + p_2 + p_2),$$
$$p_1p_3 = r(2p_2 + 2p_3 + p_4 + p_5).$$

$$p_1 = \oint^{\circ}(3,-s_1) = -s_1 - s_5 + s_6,$$

$$p_4 = \oint^{\circ}(3,s_4) = s_4 - s_{11} - s_7,$$

$$p_1p_4 = r(\oint^{\circ}(3,-s_3) + \oint^{\circ}(3,-s_5) + \oint^{\circ}(3,-s_1) + \oint^{\circ}(3,-s_9) + \oint^{\circ}(3,s_2) + \oint^{\circ}(3,s_{10}))$$
$$= r(p_2 + p_1 + p_1 + p_3 + p_5 + p_5),$$
$$p_1p_4 = r(2p_1 + p_2 + p_3 + 2p_5).$$

$$p_1 = \oint^{\circ}(3,-s_1) = -s_1 - s_5 + s_6,$$

$$p_5 = \oint^{\circ}(3,s_{12}) = s_{12} + s_2 + s_{10},$$

$$p_1p_5 = r(\oint^{\circ}(3,-s_{11}) + \oint^{\circ}(3,-s_{13}) + \oint^{\circ}(3,-s_7) + \oint^{\circ}(3,s_{14}) + \oint^{\circ}(3,s_6) + \oint^{\circ}(3,-s_{13}))$$
$$= r(p_4 + p_2 + p_4 + p_3 + p_1 + p_2),$$
$$p_1p_5 = r(p_1 + 2p_2 + p_3 + 2p_4).$$

$$p_2 = \oint^{\circ}(3,-s_3) = -s_3 - s_{15} - s_{13},$$

$$p_3 = \oint^{\circ}(3,-s_9) = -s_9 + s_{14} + s_8,$$

$$p_2p_3 = r(\oint^{\circ}(3, s_6) + \oint^{\circ}(3, s_{12}) + \oint^{\circ}(3, s_6) + \oint^{\circ}(3, -s_7) + \oint^{\circ}(3, s_4) + \oint^{\circ}(3, -s_9))$$
$$= r(p_1 + p_5 + p_1 + p_4 + p_4 + p_3),$$
$$p_2p_3 = r(2p_1 + p_3 + 2p_4 + p_5).$$

$$p_2 = \oint^{\circ}(3, -s_3) = -s_3 - s_{15} - s_{13},$$
$$p_4 = \oint^{\circ}(3, s_4) = s_4 - s_{11} - s_7,$$

$$p_2p_4 = r(\oint^{\circ}(3, -s_1) + \oint^{\circ}(3, -s_7) + \oint^{\circ}(3, -s_{11}) + \oint^{\circ}(3, s_{12}) + \oint^{\circ}(3, -s_9) + \oint^{\circ}(3, s_{14}))$$
$$= r(p_1 + p_4 + p_4 + p_5 + p_3 + p_3),$$
$$p_2p_4 = r(p_1 + 2p_3 + 2p_4 + p_5).$$

$$p_2 = \oint^{\circ}(3, -s_3) = -s_3 - s_{15} - s_{13},$$
$$p_5 = \oint^{\circ}(3, s_{12}) = s_{12} + s_2 + s_{10},$$

$$p_2p_5 = r(\oint^{\circ}(3, -s_9) + \oint^{\circ}(3, -s_{15}) + \oint^{\circ}(3, -s_3) + \oint^{\circ}(3, s_4) + \oint^{\circ}(3, -s_1) + \oint^{\circ}(3, s_6))$$
$$= r(p_3 + p_2 + p_2 + p_4 + p_1 + p_1),$$
$$p_2p_5 = r(2p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4).$$

$$p_3 = \oint^{\circ}(3, -s_9) = -s_9 + s_{14} + s_8,$$
$$p_4 = \oint^{\circ}(3, s_4) = s_4 - s_{11} - s_7,$$

$$p_3p_4 = r(\oint^{\circ}(3, -s_5) + \oint^{\circ}(3, -s_{13}) + \oint^{\circ}(3, s_{10}) + \oint^{\circ}(3, -s_{13}) + \oint^{\circ}(3, s_4) + \oint^{\circ}(3, s_{12}))$$
$$= r(p_1 + p_2 + p_5 + p_2 + p_4 + p_5),$$
$$p_3p_4 = r(p_1 + 2p_2 + p_4 + 2p_5).$$

$$p_3 = \oint(3, -s_9) = -s_9 + s_{14} + s_8,$$
$$p_5 = \oint(3, s_{12}) = s_{12} + s_2 + s_{10},$$

$$p_3p_5 = r(\oint(3, -s_3) + \oint(3, s_{10}) + \oint(3, s_2) + \oint(3, -s_5) + \oint(3, s_4) + \oint(3, -s_{11}))$$
$$= r(p_2 + p_5 + p_5 + p_1 + p_4 + p_4),$$
$$p_3p_5 = r(p_1 + p_2 + 2p_4 + 2p_5).$$

$$p_4 = \int^{c}(3, s_4) = s_4 - s_{11} - s_7,$$

$$p_5 = \int^{c}(3, s_{12}) = s_{12} + s_2 + s_{10},$$

$$p_4p_5 = r\left(\int^{c}(3, s_8) + \int^{c}(3, -s_{15}) + \int^{c}(3, -s_1) + \int^{c}(3, s_8) + \int^{c}(3, -s_5) + \int^{c}(3, s_{12})\right)$$

$$= r(p_3 + p_2 + p_1 + p_3 + p_1 + p_5),$$

$$p_4p_5 = r(2p_1 + p_2 + 2p_3 + p_5).$$

$$\begin{aligned}
p_1p_2 &= r(\ \text{„}\ + p_2 + 2p_3 + p_4 + 2p_5),\\
p_1p_3 &= r(\ \text{„}\ + 2p_2 + 2p_3 + p_4 + p_5),\\
p_1p_4 &= r(2p_1 + p_2 + p_3 + \text{„}\ + 2p_5),\\
p_1p_5 &= r(\ p_1 + 2p_2 + p_3 + 2p_4 + \text{„}\ ),\\
p_2p_3 &= r(2p_1 + \text{„}\ + p_3 + 2p_4 + p_5),\\
p_2p_4 &= r(\ p_1 + \text{„}\ + 2p_3 + 2p_4 + p_5),\\
p_2p_5 &= r(2p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4 + \text{„}\ ),\\
p_3p_4 &= r(\ p_1 + 2p_2 + \text{„}\ + p_4 + 2p_5),\\
p_3p_5 &= r(\ p_1 + p_2 + \text{„}\ + 2p_4 + 2p_5),\\
p_4p_5 &= r(2p_1 + p_2 + 2p_3 + \text{„}\ + p_5),
\end{aligned}$$

$$r(12p_1 + 12p_2 + 12p_3 + 12p_4 + 12p_5) = -12r^2.$$

$$p_2 = \int^{c}(3, -s_3) = -s_3 - s_{15} - s_{13},$$

$$p_2^2 = r\left(\int^{c}(3, s_0) + \int^{c}(3, s_6) + \int^{c}(3, s_{12}) + \int^{c}(3, -s_{13}) + \int^{c}(3, s_{10}) + \int^{c}(3, -s_{15})\right)$$

$$= r(6r + p_1 + p_5 + p_2 + p_5 + p_2),$$

$$p_2^2 = r(6r + p_1 + 2p_2 + 2p_5).$$

$$p_3 = \int^{c}(3, -s_9) = -s_9 + s_{14} + s_8,$$

$$p_3^2 = r\left(\int^{c}(3, s_0) + \int^{c}(3, -s_{13}) + \int^{c}(3, -s_5) + \int^{c}(3, s_8) + \int^{c}(3, -s_1) + \int^{c}(3, s_{14})\right)$$

$$= r(6r + p_2 + p_1 + p_3 + p_1 + p_3),$$

$$p_3^2 = r(6r + 2p_1 + p_2 + 2p_3).$$

$$p_4 = \int(3, s_4) = s_4 - s_{11} - s_7,$$

$$p_4^2 = r(\int(3, s_0) + \int(3, s_8) + \int(3, -s_7) + \int(3, -s_{15}) + \int(3, -s_3) + \int(3, -s_{11}))$$
$$= r(6r + p_3 + p_4 + p_2 + p_2 + p_4),$$
$$p_4^2 = r(6r + 2p_2 + p_3 + 2p_4).$$

$$p_5 = \int(3, s_{12}) = s_{12} + s_2 + s_{10},$$

$$p_5^2 = r(\int(3, s_0) + \int(3, -s_7) + \int(3, s_{10}) + \int(3, s_{14}) + \int(3, s_2) + \int(3, -s_9))$$
$$= r(6r + p_4 + p_5 + p_3 + p_5 + p_3)$$
$$= r(6r + 2p_3 + p_4 + 2p_5).$$

$$p_1p_2p_3 = r(p_2p_3 + 2p_3^2 + p_3p_4 + 2p_3p_5),$$

$$p_2p_3 = r(\ \text{„}\ + 2p_1 + \ \text{„}\ + p_3 + 2p_4 + p_5),$$
$$2p_3^2 = r(12r + 4p_1 + 2p_2 + 4p_3 + \ \text{„}\ + \ \text{„}\ ),$$
$$p_3p_4 = r(\ \text{„}\ + p_1 + 2p_2 + \ \text{„}\ + p_4 + 2p_5),$$
$$2p_3p_5 = r(\ \text{„}\ + 2p_1 + 2p_2 + \ \text{„}\ + 4p_4 + 4p_5),$$

$$p_1p_2p_3 = r^2(12r + 9p_1 + 6p_2 + 5p_3 + 7p_4 + 7p_5).$$

$$p_1p_2p_4 = r(2p_1p_2 + p_2^2 + p_2p_3 + 2p_2p_5),$$

$$2p_1p_2 = r(\ \text{„}\ + \ \text{„}\ + 2p_2 + 4p_3 + 2p_4 + 4p_5),$$
$$p_2^2 = r(6r + p_1 + 2p_2 + \ \text{„}\ + \ \text{„}\ + 2p_5),$$
$$p_2p_3 = r(\ \text{„}\ + 2p_1 + \ \text{„}\ + p_3 + 2p_4 + p_5),$$
$$2p_2p_5 = r(\ \text{„}\ + 4p_1 + 4p_2 + 2p_3 + 2p_4 + \ \text{„}\ ),$$

$$p_1p_2p_4 = r^2(6r + 7p_1 + 8p_2 + 7p_3 + 6p_4 + 7p_5).$$

$$p_1p_2p_5 = r(p_2p_5 + 2p_3p_5 + p_4p_5 + 2p_5^2),$$

$$p_2p_5 = r(\ \text{„}\ + 2p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4 + \ \text{„}\ ),$$
$$2p_3p_5 = r(\ \text{„}\ + 2p_1 + 2p_2 + \ \text{„}\ + 4p_4 + 4p_5),$$
$$p_4p_5 = r(\ \text{„}\ + 2p_1 + p_2 + 2p_3 + \ \text{„}\ + p_5),$$
$$2p_5^2 = r(12r + \ \text{„}\ + \ \text{„}\ + 4p_3 + 2p_4 + 4p_5),$$

$$p_1p_2p_5 = r^2(12r + 6p_1 + 5p_2 + 7p_3 + 7p_4 + 9p_5).$$

$$p_2p_3p_4 = r(2p_1p_4 + p_3p_4 + 2p_4^2 + p_4p_5),$$

$$\begin{aligned}
2p_1p_4 &= r(\ \text{„}\ + 4p_1 + 2p_2 + 2p_3 + \text{„}\ + 4p_5),\\
p_3p_4 &= r(\ \text{„}\ + p_1 + 2p_2 + \text{„}\ + p_4 + 2p_5),\\
2p_4^2 &= r(12r + \text{„}\ + 4p_2 + 2p_3 + 4p_4 + \text{„}\ ),\\
p_4p_5 &= r(\ \text{„}\ + 2p_1 + p_2 + 2p_3 + \text{„}\ + p_5),
\end{aligned}$$

$$p_2p_3p_4 = r^2(12r + 7p_1 + 9p_2 + 6p_3 + 5p_4 + 7p_5).$$

$$p_2p_3p_5 = r(2p_1p_5 + p_3p_5 + 2p_4p_5 + p_5^2),$$

$$\begin{aligned}
2p_1p_5 &= r(\ \text{„}\ + 2p_1 + 4p_2 + 2p_3 + 4p_4 + \text{„}\ ),\\
p_3p_5 &= r(\ \text{„}\ + p_1 + p_2 + \text{„}\ + 2p_4 + 2p_5),\\
2p_4p_5 &= r(\ \text{„}\ + 4p_1 + 2p_2 + 4p_3 + \text{„}\ + 2p_5),\\
p_5^2 &= r(6r + \text{„}\ + \text{„}\ + 2p_3 + p_4 + 2p_5),
\end{aligned}$$

$$p_2p_3p_5 = r^2(6r + 7p_1 + 7p_2 + 8p_3 + 7p_4 + 6p_5).$$

$$p_3p_4p_5 = r(p_1p_5 + 2p_2p_5 + p_4p_5 + 2p_5^2),$$

$$\begin{aligned}
p_1p_5 &= r(\ \text{„}\ + p_1 + 2p_2 + p_3 + 2p_4 + \text{„}\ ),\\
2p_2p_5 &= r(\ \text{„}\ + 4p_1 + 4p_2 + 2p_3 + 2p_4 + \text{„}\ ),\\
p_4p_5 &= r(\ \text{„}\ + 2p_1 + p_2 + 2p_3 + \text{„}\ + p_5),\\
2p_5^2 &= r(12r + \text{„}\ + \text{„}\ + 4p_3 + 2p_4 + 4p_5),
\end{aligned}$$

$$p_3p_4p_5 = r^2(12r + 7p_1 + 7p_2 + 9p_3 + 6p_4 + 5p_5).$$

$$p_1p_3p_4 = r(2p_2p_4 + 2p_3p_4 + p_4^2 + p_4p_5),$$

$$\begin{aligned}
2p_2p_4 &= r(\ \text{„}\ + 2p_1 + \text{„}\ + 4p_3 + 4p_4 + 2p_5),\\
2p_3p_4 &= r(\ \text{„}\ + 2p_1 + 4p_2 + \text{„}\ + 2p_4 + 4p_5),\\
p_4^2 &= r(6r + \text{„}\ + 2p_2 + p_3 + 2p_4 + \text{„}\ ),\\
p_4p_5 &= r(\ \text{„}\ + 2p_1 + p_2 + 2p_3 + \text{„}\ + p_5),
\end{aligned}$$

$$p_1p_3p_4 = r^2(6r + 6p_1 + 7p_2 + 7p_3 + 8p_4 + 7p_5).$$

$$p_1p_3p_5 = r(2p_2p_5 + 2p_3p_5 + p_4p_5 + p_5^2),$$

$$\begin{aligned}
2p_2p_5 &= r(\ \text{„}\ + 4p_1 + 4p_2 + 2p_3 + 2p_4 + \text{„}\ ),\\
2p_3p_5 &= r(\ \text{„}\ + 2p_1 + 2p_2 + \text{„}\ + 4p_4 + 4p_5),\\
p_4p_5 &= r(\ \text{„}\ + 2p_1 + p_2 + 2p_3 + \text{„}\ + p_5),\\
p_5^2 &= r(6r + \text{„}\ + \text{„}\ + 2p_3 + p_4 + 2p_5),
\end{aligned}$$

$$p_1p_3p_5 = r^2(6r + 8p_1 + 7p_2 + 6p_3 + 7p_4 + 7p_5).$$

$$p_1p_4p_5 = r(2p_1p_5 + p_2p_5 + p_3p_5 + 2p_5^2),$$

$$\begin{aligned}
2p_1p_5 &= r(\ \text{„}\ + 2p_1 + 4p_2 + 2p_3 + 4p_4 + \ \text{„}\ ),\\
p_2p_5 &= r(\ \text{„}\ + 2p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4 + \ \text{„}\ ),\\
p_3p_5 &= r(\ \text{„}\ + p_1 + p_2 + \ \text{„}\ + 2p_4 + 2p_5),\\
2p_5^2 &= r(12r + \ \text{„}\ + \ \text{„}\ + 4p_3 + 2p_4 + 4p_5),\\
\hline
p_1p_4p_5 &= r^2(12r + 5p_1 + 7p_2 + 7p_3 + 9p_4 + 6p_5).
\end{aligned}$$

$$p_2p_4p_5 = r(p_1p_5 + \text{„} + 2p_3p_5 + 2p_4p_5 + p_5^2),$$

$$\begin{aligned}
p_1p_5 &= r(\ \text{„}\ + p_1 + 2p^2 + p_3 + 2p_4 + \ \text{„}\ ),\\
2p_3p_5 &= r(\ \text{„}\ + 2p_1 + 2p_2 + \ \text{„}\ + 4p_4 + 4p_5),\\
2p_4p_5 &= r(\ \text{„}\ + 4p_1 + 2p_2 + 4p_3 + \ \text{„}\ + 2p_5),\\
p_5^2 &= r(6r + \ \text{„}\ + \ \text{„}\ + 2p_3 + p_4 + 2p_5),\\
\hline
p_2p_4p_5 &= r^2(6r + 7p_1 + 6p_2 + 7p_3 + 7p_4 + 8p_5).
\end{aligned}$$

Adderes nu disse saaledes fundne Produkter, faaes Coefficienten for 4de Led reduceret.

$$\begin{aligned}
p_1p_2p_3 &= r^2(12r + 9p_1 + 6p_2 + 5p_3 + 7p_4 + 7p_5),\\
p_1p_2p_4 &= r^2(\ 6r + 7p_1 + 8p_2 + 7p_3 + 6p_4 + 7p_5),\\
p_1p_2p_5 &= r^2(12r + 6p_1 + 5p_2 + 7p_3 + 7p_4 + 9p_5),\\
p_2p_3p_4 &= r^2(12r + 7p_1 + 9p_2 + 6p_3 + 5p_4 + 7p_5),\\
p_2p_3p_5 &= r^2(\ 6r + 7p_1 + 7p_2 + 8p_3 + 7p_4 + 6p_5),\\
p_3p_4p_5 &= r^2(12r + 7p_1 + 7p_2 + 9p_3 + 6p_4 + 5p_5),\\
p_1p_3p_4 &= r^2(\ 6r + 6p_1 + 7p_2 + 7p_3 + 8p_4 + 7p_5),\\
p_1p_3p_5 &= r^2(\ 6r + 8p_1 + 7p_2 + 6p_3 + 7p_4 + 7p_5),\\
p_1p_4p_5 &= r^2(12r + 5p_1 + 7p_2 + 7p_3 + 9p_4 + 6p_5),\\
p_2p_4p_5 &= r^2(\ 6r + 7p_1 + 6p_2 + 7p_3 + 7p_4 + 8p_5),\\
\hline
& r^2(90r + 69p_1 + 69p_2 + 69p_3 + 69p_4 + 69p_5)\\
&= r^2(90r + 69(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)) = r^2(90r - 69r)\\
&= 21r^3.
\end{aligned}$$

Paa samme Maade findes:

$$\begin{aligned}
p_1p_2p_3p_4 &= r^3(42r + 43p_1 + 40p_2 + 42p_3 + 43p_4 + 41p_5),\\
p_1p_2p_3p_5 &= r^3(42r + 40p_1 + 42p_2 + 43p_3 + 41p_4 + 43p_5),\\
p_1p_2p_4p_5 &= r^3(42r + 42p_1 + 43p_2 + 41p_3 + 43p_4 + 40p_5),\\
p_1p_3p_4p_5 &= r^3(42r + 43p_1 + 41p_2 + 43p_3 + 40p_4 + 42p_5),\\
p_2p_3p_4p_5 &= r^3(42r + 41p_1 + 43p_2 + 40p_3 + 42p_4 + 43p_5),\\
\hline
&\quad r^3(210r + 209p_1 + 209p_2 + 209p_3 + 209p_4 + 209p_5)\\
&= r^3(210r + 209(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)) = r^3\,(210r - 209r)\\
&= r^4.
\end{aligned}$$

Multipliceres den første af de næstforegaaende Ligninger med p_5, faaer man:

$$\begin{aligned}
p_1p_2p_3p_4p_5 &= r^3(42rp_5 + 43p_1p_5 + 40p_2p_5 + 42p_3p_5 + 43p_4p_5 + 41p_5^2),\\
\hline
42rp_5 &= r(\ \text{„} + \text{„} + \text{„} + \text{„} + \text{„} + 42p_5),\\
43p_1p_5 &= r(\ \text{„} + 43p_1 + 86p_2 + 43p_3 + 86p_4 + \text{„}\ ),\\
40p_2p_5 &= r(\ \text{„} + 80p_1 + 80p_2 + 40p_3 + 40p_4 + \text{„}\ ),\\
42p_3p_5 &= r(\ \text{„} + 42p_1 + 42p_2 + \text{„} + 84p_4 + 84p_5),\\
43p_4p_5 &= r(\ \text{„} + 86p_1 + 43p_2 + 86p_3 + \text{„} + 43p_5),\\
41p_5^2 &= r(246r + \text{„} + \text{„} + 82p_3 + 41p_4 + 82p_5),\\
\hline
p_1p_2p_3p_4p_5 &= r^4(246r + 251p_1 + 251p_2 + 251p_3 + 251p_4 + 251p_5)\\
&= r^4(246r + 251\,(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)) = r^4(246r - 251r)\\
&= -\,5r^5.
\end{aligned}$$

Indsættes de saaledes fundne Værdier, faaer man:

$$x^5 + rx^4 - 12r^2x^3 - 21r^3x^2 + r^4x + 5r^5 = 0.$$

Nu har man: $-\,s_1 - s_5 + s_6 = p_1$,

$$s_1s_5 - s_1s_6 - s_5s_6 = (s_4 + s_6 - s_5 - s_7 - s_1 - s_{11})r = (p_1 + p_4)r,$$

$$s_1s_5s_6 = s_6(s_4 + s_6)r = r^2(s_2 + s_{10} + s_0 + s_{12}) = (2r + p_5)r^2.$$

Altsaa ere $-\,s_1$, $-\,s_5$ og s_6 Rødder i den kubiske Ligning:

$$x^3 - p_1x^2 + (p_1 + p_4)rx - (2r + p_5)r^2 = 0.$$

§ 17.

Naar en Rod af Ligningen:

$x^5 + rx^4 - 12r^2x^3 - 21r^3x^2 + r^4x + 5r^5 = 0$ er funden, kunne de øvrige Rødder findes af de 4 første af følgende Ligninger:

1) $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = -r$,
2) $p_1^2 = r(6r + 2p_1 + 2p_4 + p_5)$,
3) $p_1^3 = r^2(12r + 15p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 6p_4 + 6p_5)$,
4) $p_1^4 = r^3(90r + 60p_1 + 28p_2 + 26p_3 + 49p_4 + 38p_5)$,
5) $p_1^5 = r^4(360r + 346p_1 + 205p_2 + 195p_3 + 250p_4 + 240p_5)$.

Disse Ligninger findes saaledes:

Efter det Foregaaende har man:

$p_1^2 = r(6r + 2p_1 + 2p_4 + p_5)$. Multipliceres med p_1, faaes:

$p_1^3 = r(6rp_1 + 2p_1^2 + 2p_1p_4 + p_1p_5)$.

$$\begin{aligned}
6rp_1 &= r(\ \text{„}\ + 6p_1 + \text{„} + \text{„} + \text{„} + \text{„}\ ),\\
2p_1^2 &= r(12r + 4p_1 + \text{„} + \text{„} + 4p_4 + 2p_5),\\
2p_1p_4 &= r(\ \text{„}\ + 4p_1 + 2p_2 + 2p_3 + \text{„} + 4p_5),\\
p_1p_5 &= r(\ \text{„}\ + p_1 + 2p_2 + p_3 + 2p_4 + \text{„}\ ),
\end{aligned}$$

$p_1^3 = r^2(12r + 15p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 6p_4 + 6p_5)$.

Multipliceres igjen med p_1, faaer man:

$p_1^4 = r^2(12rp_1 + 15p_1^2 + 4p_1p_2 + 3p_1p_3 + 6p_1p_4 + 6p_1p_5)$.

$$\begin{aligned}
12rp_1 &= r(\ \text{„}\ + 12p_1 + \text{„} + \text{„} + \text{„} + \text{„}\ ),\\
15p_1^2 &= r(90r + 30p_1 + \text{„} + \text{„} + 30p_4 + 15p_5),\\
4p_1p_2 &= r(\ \text{„}\ + \text{„} + 4p_2 + 8p_3 + 4p_4 + 8p_5),\\
3p_1p_3 &= r(\ \text{„}\ + \text{„} + 6p_2 + 6p_3 + 3p_4 + 3p_5),\\
6p_1p_4 &= r(\ \text{„}\ + 12p_1 + 6p_2 + 6p_3 + \text{„} + 12p_5),\\
6p_1p_5 &= r(\ \text{„}\ + 6p_1 + 12p_2 + 6p_3 + 12p_4 + \text{„}\ ),
\end{aligned}$$

$p_1^4 = r^3(90r + 60p_1 + 28p_2 + 26p_3 + 49p_4 + 38p_5)$.

Multipliceres atter med p_1, faaer man:

$p_1^5 = r^3(90rp_1 + 60p_1^2 + 28p_1p_2 + 26p_1p_3 + 49p_1p_4 + 38p_1p_5)$.

$$\begin{aligned}
90rp_1 &= r(\ \text{„}\ + 90p_1 + \text{„} + \text{„} + \text{„} + \text{„}\ ),\\
60p_1^2 &= r(360r + 120p_1 + \text{„} + \text{„} + 120p_4 + 60p_5),\\
28p_1p_2 &= r(\ \text{„}\ + \text{„} + 28p_2 + 56p_3 + 28p_4 + 56p_5),\\
26p_1p_3 &= r(\ \text{„}\ + \text{„} + 52p_2 + 52p_3 + 26p_4 + 26p_5),\\
49p_1p_4 &= r(\ \text{„}\ + 98p_1 + 49p_2 + 49p_3 + \text{„} + 98p_5),\\
38p_1p_5 &= r(\ \text{„}\ + 38p_1 + 76p_2 + 38p_3 + 76p_4 + \text{„}\ ),
\end{aligned}$$

$p_1^5 = r^4(360r + 346p_1 + 205p_2 + 195p_3 + 250p_4 + 240p_5)$.

Ved disse 5 Ligninger ere p_1, p_2, p_3, p_4 og p_5 fuldkommen bestemte. Vil man finde p_1 af disse Ligninger, saa kan dette skee saaledes:

$$\frac{p_1^5}{r^4} - 346p_1 = 205p_2 + 195p_3 + 250p_4 + 240p_5 + 360r,$$

$$240p_1 = -240p_2 - 240p_3 - 240p_4 - 240p_5 - 240r,$$

$$\frac{p_1^5}{r^4} - 106p_1 = -35p_2 - 45p_3 + 10p_4 + 120r.$$

$$\frac{p_1^4}{r^3} - 60p_1 = 28p_2 + 26p_3 + 49p_4 + 38p_5 + 90r,$$

$$38p_1 = -38p_2 - 38p_3 - 38p_4 - 38p_5 - 38r,$$

$$\frac{p_1^4}{r^3} - 22p_1 = -10p_2 - 12p_3 + 11p_4 + 52r.$$

$$\frac{p_1^3}{r^2} - 15p_1 = 4p_2 + 3p_3 + 6p_4 + 6p_5 + 12r,$$

$$6p_1 = -6p_2 - 6p_3 - 6p_4 - 6p_5 - 6r,$$

$$\frac{p_1^3}{r^2} - 9p_1 = -2p_2 - 3p_3 + 6r.$$

$$\frac{p_1^2}{r} - 2p_1 = 2p_4 + p_5 + 6r,$$

$$p_1 = -p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - r,$$

$$\frac{p_1^2}{r} - p_1 = -p_2 - p_3 + p_4 + 5r.$$

$$10\frac{p_1^2}{r} - 10p_1 = -10p_2 - 10p_3 + 10p_4 + 50r,$$

$$\frac{p_1^5}{r^4} - 106p_1 = -35p_2 - 45p_3 + 10p_4 + 120r,$$

$$\frac{p_1^5}{r^4} - 10\frac{p_1^2}{r} - 96p_1 = -25p_2 - 35p_3 + 70r.$$

$$\frac{p_1^4}{r^3} - 22p_1 = -10p_2 - 12p_3 + 11p_4 + 52r,$$

$$11\frac{p_1^2}{r} - 11p_1 = -11p_2 - 11p_3 + 11p_4 + 55r,$$

$$\frac{p_1^4}{r^3} - 11\frac{p_1^2}{r} - 11p_1 = p_2 - p_3 - 3r.$$

$$25\frac{p_1^4}{r^3} - 275\frac{p_1^2}{r} - 275p_1 = 25p_2 - 25p_3 - 75r,$$

$$\frac{p_1^5}{r^4} - 10\frac{p_1^2}{r} - 96p_1 = -25p_2 - 35p_3 + 70r,$$

$$\frac{p_1^5}{r^4} + 25\frac{p_1^4}{r^3} - 285\frac{p_1^2}{r} - 371p_1 = -60p_3 - 5r.$$

$$2\frac{p_1^4}{r^3} - 22\frac{p_1^2}{r} - 22p_1 = 2p_2 - 2p_3 - 6r,$$

$$\frac{p_1^3}{r^2} - 9p_1 = -2p_2 - 3p_3 + 6r,$$

$$2\frac{p_1^4}{r^3} + \frac{p_1^3}{r^2} - 22\frac{p_1^2}{r} - 31p_1 = -5p_3.$$

$$24\frac{p_1^4}{r^3} + 12\frac{p_1^3}{r^2} - 264\frac{p_1^2}{r} - 372p_1 = -60p_3,$$

$$\frac{p_1^5}{r^4} + 25\frac{p_1^4}{r^3} - \text{„} - 285\frac{p_1^2}{r} - 371p_1 = -60p_3 - 5r,$$

$$\frac{p_1^5}{r^4} + \frac{p_1^4}{r^3} - 12\frac{p_1^3}{r^2} - 21\frac{p_1^2}{r} + p_1 = -5r.$$

$$p_1^5 + rp_1^4 - 12r^2p_1^3 - 21r^3p_1^2 + r^4p_1 + 5r^5 = 0.$$

Denne Ligning stemmer overeens med den forhen fundne Ligning og kan tjene som Prøve paa Regningens Rigtighed.

§ 18.

Den regulære 37kant.

Er $n = 37$, altsaa $\frac{n-1}{2} = p = 18 = 2 \,.\, 9 = 2 \,.\, 3 \,.\, 3$, saa kunne Supplementchorderne deles i 2 Perioder, hver paa 9 Led. Hver Periode paa 9 Led kan derpaa deles i 3 Perioder, hver paa 3 Led. Efter § 6. 6 har man:

$$s_2 + s_4 + s_6 + s_8 + s_{10} + s_{12} + s_{14} + s_{16} + s_{18} - s_1 - s_3 - s_5 - s_7 - s_9 - s_{11} - s_{13} - s_{15} - s_{17} = -r.$$

Anvendes nu Sætningen (Indledn. § 1. 1), eller tages efter en Bemærkning i § 16 de mindste Rester af de første 18 forskjellige Potentser af 2, faaer man Supplementchorderne ordnede i en geometrisk Række.

2^0,	2^1,	2^2,	2^3,	2^4,	2^5,	2^6,	2^7,	2^8,	2^9,	2^{10},	2^{11},	2^{12},	2^{13},	2^{14},	2^{15},	2^{16},	2^{17}.
1,	2,	4,	8,	16,	5,	10,	17,	3,	6,	12,	13,	11,	15,	7,	14,	9,	18.

Altsaa faaer man:

$$- s_1 + s_2 + s_4 + s_8 + s_{16} - s_5 + s_{10} - s_{17} - s_3 + s_6 + s_{12} - s_{13} - s_{11} - s_{15} - s_7 + s_{14} - s_9 + s_{18} = - r.$$

Betegnes nu de to Perioder, hvori Supplementchorderne kunne deles, med p_1 og p_2, saa har man:

$$p_1 = - s_1 + s_4 + s_{16} + s_{10} - s_3 + s_{12} - s_{11} - s_7 - s_9,$$

$$p_2 = s_2 + s_8 - s_5 - s_{17} + s_6 - s_{13} - s_{15} + s_{14} + s_{18}.$$

Multipliceres disse to Perioder med hinanden efter § 12, faaer man:

$$p_1 = \int(9, -s_1) = - s_1 + s_4 + s_{16} + s_{10} - s_3 + s_{12} - s_{11} - s_7 - s_9,$$

$$p_2 = \int(9, s_2) = s_2 + s_8 - s_5 - s_{17} + s_6 - s_{13} - s_{15} + s_{14} + s_{18},$$

$$p_1p_2 = r(\int(9, -s_1) + \int(9, -s_3) + \int(9, s_2) + \int(9, s_6) + \int(9, s_{14}) + \int(9, s_{18}) + \int(9, s_8) + \int(9, s_{12}) + \int(9, -s_1) + \int(9, -s_5) + \int(9, s_{10}) + \int(9, s_{14}) + \int(9, -s_9) + \int(9, -s_{13}) + \int(9, -s_5) + \int(9, -s_9) + \int(9, -s_7) + \int(9, -s_{11})) = r(p_1 + p_1 + p_2 + p_2 + p_2 + p_2 + p_2 + p_1 + p_1 + p_2 + p_1 + p_2 + p_1 + p_2 + p_2 + p_1 + p_1 + p_1) = r(9p_1 + 9p_2).$$

Altsaa $p_1p_2 = 9r(p_1 + p_2) = - 9r^2$.

Da nu p_1 og p_2 ere Rødder i Ligningen:

$x^2 - (p_1 + p_2)x + p_1p_2 = 0$, saa faaer man, naar Værdierne for $p_1 + p_2$ og p_1p_2 indsættes:

$$x^2 + rx - 9r^2 = 0.$$

Deles nu hver af Perioderne p_1 og p_2 i 3 Perioder:

$p_1 = q_1 + q_2 + q_3$, og $p_2 = q_4 + q_5 + q_6$, saa faaer man:

$q_1 = - s_1 + s_{10} - s_{11}$, $q_4 = s_2 - s_{17} - s_{15}$,

$q_2 = s_4 - s_3 - s_7$, $q_5 = s_8 + s_6 + s_{14}$,

$q_3 = s_{16} + s_{12} - s_9$. $q_6 = - s_5 - s_{13} + s_{18}$.

Nu ere q_1, q_2 og q_3 Rødder i den kubiske Ligning:

$$x^3 - (q_1 + q_2 + q_3)x^2 + (q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3)x - q_1q_2q_3 = 0.$$

$$q_1 = \int(3, -s_1) = - s_1 + s_{10} - s_{11},$$

$$q_1 = \int(3, -s_1) = - s_1 + s_{10} - s_{11},$$

$$q_1^2 = (\oint(3, s_0) + \oint(3, s_2) + \oint(3, -s_9) + \oint(3, -s_{11}) + \oint(3, s_{10}) + \oint(3, s_{12}))$$
$$= r(6r + q_4 + q_3 + q_1 + q_1 + q_3).$$

Altsaa $q_1^2 = r(6r + 2q_1 + 2q_3 + q_4)$.

$$q_1 = \oint(3, -s_1) = -s_1 + s_{10} - s_{11},$$
$$q_2 = \oint(3, s_4) = s_4 - s_3 - s_7,$$

$$q_1q_2 = r(\oint(3, -s_3) + \oint(3, -s_5) + \oint(3, s_6) + \oint(3, s_{14}) + \oint(3, -s_7) + \oint(3, -s_{15}))$$
$$= r(q_2 + q_6 + q_5 + q_5 + q_2 + q_4),$$
$$q_1q_2 = r(2q_2 + q_4 + 2q_5 + q_6).$$

$$q_1 = \oint(3, -s_1) = -s_1 + s_{10} - s_{11},$$
$$q_3 = \oint(3, s_{16}) = s_{16} + s_{12} - s_9,$$

$$q_1q_3 = r(\oint(3, -s_{15}) + \oint(3, -s_{17}) + \oint(3, -s_{11}) + \oint(3, -s_{13}) + \oint(3, s_8) + \oint(3, s_{10}))$$
$$= r(q_4 + q_4 + q_1 + q_6 + q_5 + q_1),$$
$$q_1q_3 = r(2q_1 + 2q_4 + q_5 + q_6).$$

$$q_2 = \oint(3, s_4) = s_4 - s_3 - s_7,$$
$$q_3 = \oint(3, s_{16}) = s_{16} + s_{12} - s_9,$$

$$q_2q_3 = (\oint(3, s_{12}) + \oint(3, -s_{17}) + \oint(3, -s_{13}) + \oint(3, s_{18}) + \oint(3, -s_9) + \oint(3, s_{14}))$$
$$= r(q_3 + q_4 + q_6 + q_6 + q_3 + q_5),$$

$$q_2q_3 = r(2q_3 + q_4 + q_5 + 2q_6),$$
$$q_1q_2 = r(2q_2 + q_4 + 2q_5 + q_6),$$
$$q_1q_3 = r(2q_1 + 2q_4 + q_5 + q_6),$$

$q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3 = r(2q_1 + 2q_2 + 2q_3 + 4q_4 + 4q_5 + 4q_6) = r(4q_1 + 4q_2 + 4q_3 + 4q_4 + q_5 + 4q_6) - r(2q_1 + 2q_2 + 2q_3) = -4r^2 - 2rp_1 = -r(4r + 2p_1)$.

Multipliceres Ligningen $q_2q_3 = r(2q_3 + q_4 + q_5 + 2q_6)$ med q_1, faaer man:
$q_1q_2q_3 = r(2q_1q_3 + q_1q_4 + q_1q_5 + 2q_1q_6)$.

$$q_1 = \oint(3, -s_1) = -s_1 + s_{10} - s_{11},$$

$$q_4 = \oint(3, s_2) = s_2 - s_{17} - s_{15},$$

$$q_1q_4 = r(\oint(3, -s_1) + \oint(3, -s_3) + \oint(3, s_8) + \oint(3, s_{12}) + \oint(3, -s_9) + \oint(3, -s_{13}))$$

$$= r(\ q_1 + q_2 + q_5 + q_3 + q_3 + q_6),$$

$$q_1q_4 = r(q_1 + q_2 + 2q_3 + q_5 + q_6).$$

$$q_1 = \oint(3, -s_1) = -s_1 + s_{10} - s_{11},$$

$$q_5 = \oint(3, s_8) = s_8 + s_6 + s_{14},$$

$$q_1q_5 = r(\oint(3, -s_7) + \oint(3, -s_9) + \oint(3, s_2) + \oint(3, s_{18}) + \oint(3, -s_3) + \oint(3, s_{18}))$$

$$= r(\ q_2 + q_3 + q_4 + q_6 + q_2 + q_6),$$

$$q_1q_5 = r(2q_2 + q_3 + q_4 + 2q_6).$$

$$q_1 = \oint(3, -s_1) = -s_1 + s_{10} - s_{11},$$

$$q_6 = \oint(3, -s_5) = -s_5 - s_{13} + s_{18},$$

$$q_1q_6 = r(\oint(3, s_4) + \oint(3, s_6) + \oint(3, -s_5) + \oint(3, -s_{15}) + \oint(3, s_6) + \oint(3, s_{16}))$$

$$= r(\ q_2 + q_5 + q_6 + q_4 + q_5 + q_3),$$

$$q_1q_6 = r(q_2 + q_3 + q_4 + 2q_5 + q_6).$$

Altsaa $2q_1q_3 = r(4q_1 + \text{„} + \text{„} + 4q_4 + 2q_5 + 2q_6),$

$$q_1q_4 = r(\ q_1 + q_2 + 2q_3 + \text{„} + q_5 + q_6),$$

$$q_1q_5 = r(\ \text{„} + 2q_2 + q_3 + q_4 + \text{„} + 2q_6),$$

$$2q_1q_6 = r(\ \text{„} + 2q_2 + 2q_3 + 2q_4 + 4q_5 + 2q_6),$$

$$q_1q_2q_3 = r^2(5q_1 + 5q_2 + 5q_3 + 7q_4 + 7q_5 + 7q_6)$$

$$= r^2(7q_1 + 7q_2 + 7q_3 + 7q_4 + 7q_5 + 7q_6) - r^2(2q_1 + 2q_2 + 2q_3)$$

$$= -7r^3 - 2r^2p_1 = -(7r + 2p_1)r^2.$$

Indsættes de for Coefficienterne fundne Værdier, faaer man:

$$x^3 - p_1x^2 - (4r + 2p_1)rx + (7r + 2p_1)r^2 = 0.$$

Naar en Rod er funden af denne Ligning f. Ex. q_1, kunne de andre Rødder eller de andre Störrelser q_2, q_3, q_4, q_5 og q_6 findes af Ligningerne:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = -r,$$
$$q_1^2 = r(6r + 2q_1 + 2q_3 + q_4),$$
$$q_1^3 = r^2(12r + 15q_1 + q_2 + 6q_3 + 6q_4 + 3q_5 + 3q_6),$$
$$q_1^4 = r^3(90r + 60q_1 + 17q_2 + 48q_3 + 34q_4 + 20q_5 + 22q_6),$$
$$q_1^5 = r^4(360r + 340q_1 + 130q_2 + 230q_3 + 215q_4 + 160q_5 + 161q_6).$$

Nu har man:

$$-s_1 + s_{10} - s_{11} = q_1,$$

$$-s_1s_{10} + s_1s_{11} - s_{10}s_{11} = r(-s_9 - s_{11} + s_{10} + s_{12} - s_1 + s_{16}) = r(-s_1 + s_{10} - s_{11}) + r(s_{16} + s_{12} - s_9) = r(q_1 + q_3),$$

$$s_1s_{10}s_{11} = s_1(s_1 - s_{16})r = r^2(s_0 + s_2 - s_{15} - s_{17}) = r^2(2r + q_4).$$

Nu ere $-s_1$, s_{10} og $-s_{11}$ Rødder i den kubiske Ligning:

$$x^3 - (-s_1 + s_{10} - s_{11})x^2 + (-s_1s_{10} + s_1s_{11} - s_{10}s_{11})x - s_1s_{10}s_{11} = 0.$$

Indsættes heri de fundne Værdier for Coefficienterne, faaer man:

$$x^3 - q_1x^2 + (q_1 + q_3)rx - (2r + q_4)\,r^2 = 0.$$

Da man har $q_1^2 = r(6r + 2q_1 + 2q_3 + q_4)$, saa kan man eliminere q_4 og altsaa faae Coefficienterne udtrykte alene ved Rødderne i den foregaaende Ligning.

§ 19.

Den regulære 41kant.

Da $\frac{41-1}{2} = 20 = 2 \,.\, 2 \,.\, 5$, saa kan Siden i en regulær 41kant findes ved Opløsningen af 2 Ligninger af 2den Grad og 1 Ligning af 5te Grad.

Efter Indledn. § 1. 1 har man:

$c_1s_1 = rc_2$,	$c_3s_3 = rc_6$,
$c_2s_2 = rc_4$,	$c_6s_6 = rc_{12}$,
$c_4s_4 = rc_8$,	$c_{12}s_{12} = rc_{17}$,
$c_8s_8 = rc_{16}$,	$c_{17}s_{17} = rc_7$,
$c_{16}s_{16} = rc_9$,	$c_7s_7 = rc_{14}$,
$c_9s_9 = rc_{18}$,	$c_{14}s_{14} = rc_{13}$,
$c_{18}s_{18} = rc_5$,	$c_{13}s_{13} = rc_{15}$,
$c_5s_5 = rc_{10}$,	$c_{15}s_{15} = rc_{11}$,
$c_{10}s_{10} = rc_{20}$,	$c_{11}s_{11} = rc_{19}$,
$c_{20}s_{20} = rc_1$,	$c_{19}s_{19} = rc_3$,

$$s_1s_2s_4s_8s_{16}s_9s_{18}s_5s_{10}s_{20} = r^{10}. \quad s_3s_6s_{12}s_{17}s_7s_{14}s_{13}s_{15}s_{11}s_{19} = r^{10}.$$

Nu er efter § 6. 6:

$$- s_1 + s_2 + s_4 + s_8 + s_{16} - s_9 + s_{18} - s_5 + s_{10} + s_{20} - s_3 + s_6 + s_{12} - s_{17} - s_7 + s_{14} - s_{13} - s_{15} - s_{11} - s_{19} = - r.$$

Disse Supplementchorder ere saaledes ved ovenstaaende Produkter deelte i 2 Perioder. Kaldes disse Perioder p_1 og p_2, saa har man:

$$p_1 = \int(10, - s_1) = - s_1 + s_2 + s_4 + s_8 + s_{16} - s_9 + s_{18} - s_5 + s_{10} + s_{20},$$

$$p_2 = \int(10, - s_3) = - s_3 + s_6 + s_{12} - s_{17} - s_7 + s_{14} - s_{13} - s_{15} - s_{11} - s_{19},$$

$$p_1p_2 = r(\int_{p_1}(10, s_2) + \int_{p_1}(10, s_4) + \int_{p_1}(10, - s_5) + \int_{p_2}(10, - s_7) + \int_{p_2}(10, - s_{11}) + \int_{p_2}(10, - s_{13}) +$$

$$\int_{p_1}(10, s_{16}) + \int_{p_1}(10, s_{18}) + \int_{p_2}(10, s_6) + \int_{p_1}(10, s_8) + \int_{p_2}(10, - s_{13}) + \int_{p_2}(10, - s_{15}) + \int_{p_2}(10, s_{12}) +$$

$$\int_{p_2}(10, s_{14}) + \int_{p_2}(10, s_{14}) + \int_{p_1}(10, s_{16}) + \int_{p_1}(10, s_{10}) + \int_{p_2}(10, s_{12}) + \int_{p_1}(10, s_{18}) +$$

$$\int_{p_1}(10, s_{20})) = r(10p_1 + 10p_2) = 10r(p_1 + p_2) = - 10r^2.$$

Nu er $x^2 - (p_1 + p_2) x + p_1p_2 = 0$. Indsættes heri Værdierne for $p_1 + p_2$ og p_1p_2, faaer man:

$$x^2 + rx - 10r^2 = 0.$$

Deles nu p_1 og p_2 hver i 2 Perioder:

$$p_1 = q_1 + q_2, \qquad p_2 = q_3 + q_4, \text{ saa har man:}$$

$$q_1 = \int(5, - s_1) = - s_1 + s_4 + s_{16} + s_{18} + s_{10}, \quad q_3 = - s_3 + s_{12} - s_7 - s_{13} - s_{11},$$

$$q_2 = \int(5, s_2) = s_2 + s_8 - s_9 - s_5 + s_{20}. \quad q_4 = s_6 - s_{17} + s_{14} - s_{15} - s_{19}.$$

$$q_1q_2 = r(\int_{q_1}(5, - s_1) + \int_{q_3}(5, - s_3) + \int_{q_3}(5, - s_7) + \int_{q_2}(5, - s_9) + \int_{q_2}(5, s_8) + \int_{q_1}(5, s_{10}) +$$

$$\int_{q_4}(5, s_6) + \int_{q_1}(5, s_4) + \int_{q_4}(5, - s_{19}) + \int_{q_2}(5, s_{20})) = r(3q_1 + 3q_2 + 2q_3 + 2q_4) = r(3p_1 + 2p_2)$$

$$= r(p_1 - 2r).$$

Nu er $x^2 - (q_1 + q_2)x + q_1q_2 = 0$. Indsættes Værdierne for $q_1 + q_2$ og q_1q_2, faaer man:

$$x^2 - p_1x + r(p_1 - 2r) = 0.$$

Naar nu q_1 er fundet af denne Ligning, kan hvert Led i Perioden q_1 findes ved en Ligning af 5te Grad, thi $- s_1$, s_4, s_{16}, s_{18} og s_{10} ere Rødder i Ligningen:

$$x^5 - (-s_1 + s_4 + s_{16} + s_{18} + s_{10})x^4 + (-s_1s_4 - s_1s_{16} + s_4s_{16} - s_1s_{18} + s_4s_{18} + s_{16}s_{18} - s_1s_{10} + s_4s_{10} + s_{16}s_{10} + s_{18}s_{10})x^3 - (-s_1s_4s_{16} - s_1s_4s_{18} - s_1s_{16}s_{18} + s_4s_{16}s_{18} - s_1s_4s_{10} - s_1s_{16}s_{10} + s_4s_{16}s_{10} - s_1s_{18}s_{10} + s_4s_{18}s_{10} + s_{16}s_{18}s_{10})x^2 + (-s_1s_4s_{16}s_{10} - s_1s_4s_{18}s_{10} - s_1s_{16}s_{18}s_{10} + s_4s_{16}s_{18}s_{10} - s_1s_4s_{16}s_{18})x - s_1s_4s_{16}s_{18}s_{10} = 0.$$

Coefficienterne i denne Ligning kunne reduceres saaledes:

$$-s_1s_4 - s_1s_{16} + s_4s_{16} - s_1s_{18} + s_{16}s_{18} - s_1s_{10} + s_4s_{10} + s_{16}s_{10} + s_{18}s_{10} + s_4s_{18} = r(-s_3 - s_5 - s_{15} - s_{17} + s_{12} + s_{20} - s_{17} - s_{19} + s_2 - s_7 - s_9 - s_{11} + s_6 + s_{14} + s_6 - s_{15} + s_8 - s_{13} + s_{14} - s_{19}) = r(s_2 + s_8 - s_9 - s_5 + s_{20}) + r(-s_3 + s_{12} - s_7 - s_{13} - s_{11}) + 2r(s_6 - s_{17} + s_{14} - s_{15} - s_{19}) = r(q_2 + q_3 + 2q_4).$$

$$\begin{aligned}
-s_1\ s_4\ s_{16} &= -s_1(s_{12} + s_{20})r = (-s_{11} - s_{13} - s_{19} + s_{20})r^2,\\
-s_1\ s_4\ s_{18} &= -s_1(s_{14} - s_{19})r = (-s_{13} - s_{15} + s_{18} + s_{20})r^2,\\
-s_1\ s_{16}s_{18} &= -s_1(s_2 - s_7)r = (-s_1 - s_3 + s_6 + s_8)r^2,\\
+s_4\ s_{16}s_{18} &= s_4(s_2 - s_7)r = (s_2 + s_6 - s_3 - s_{11})r^2,\\
-s_1\ s_4\ s_{10} &= -s_1(s_6 + s_{14})r = (-s_5 - s_7 - s_{13} - s_{15})r^2,\\
-s_1\ s_{16}s_{10} &= -s_1(s_6 - s_{15})r = (-s_5 - s_7 + s_{14} + s_{16})r^2,\\
+s_4\ s_{16}s_{10} &= s_4(s_6 - s_{15})r = (s_2 + s_{10} - s_{11} - s_{19})r^2,\\
-s_1\ s_{18}s_{10} &= -s_1(s_8 - s_{13})r = (-s_7 - s_9 + s_{12} + s_{14})r^2,\\
+s_4\ s_{18}s_{10} &= s_4(s_8 - s_{13})r = (s_4 + s_{12} - s_9 - s_{17})r^2,\\
+s_{16}s_{18}s_{10} &= s_{16}(s_8 - s_{13})r = (s_8 - s_{17} - s_3 + s_{12})r^2,
\end{aligned}$$

$$((-s_1 + s_4 + s_{16} + s_{18} + s_{10}) + (2s_2 + 2s_8 - 2s_9 - 2s_5 + 2s_{20}) + (-3s_3 + 3s_{12} - 3s_7 - 3s_{13} - 3s_{11}) + (2s_6 - 2s_{17} + 2s_{14} - 2s_{15} - 2s_{19}))r^2 = r^2(q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 2q_4).$$

$$\begin{aligned}
s_1s_4\ s_{16}s_{10} &= -s_1s_4\ (s_6 - s_{15})r = -s_1(s_2 + s_{10} - s_{11} - s_{19})r^2 = (-s_1 - s_3 - s_9 - s_{11} + s_{10} + s_{12} + s_{18} + s_{20})r^3,\\
s_1s_4\ s_{18}s_{10} &= -s_1s_4\ (s_8 - s_{13})r = -s_1(s_4 + s_{12} - s_9 - s_{17})r^2 = (-s_3 - s_5 - s_{11} - s_{13} + s_8 + s_{10} + s_{16} + s_{18})r^3,\\
s_1s_{16}s_{18}s_{10} &= -s_1s_{16}(s_8 - s_{13})r = -s_1(s_8 - s_{17} - s_3 + s_{12})r^2 = (-s_7 - s_9 + s_{16} + s_{18} + s_2 + s_4 - s_{11} - s_{13})r^3,\\
s_4s_{16}s_{18}s_{10} &= s_4s_{16}(s_8 - s_{13})r = s_4(s_8 - s_{17} - s_3 + s_{12})r^2 = (s_4 + s_{12} - s_{13} + s_{20} - s_1 - s_7 + s_8 + s_{16})r^3,\\
s_1s_4\ s_{16}s_{18} &= -s_1s_4\ (s_2 - s_7)r = -s_1(s_2 + s_6 - s_3 - s_{11})r^2 = (-s_1 - s_3 - s_5 - s_7 + s_2 + s_4 + s_{10} + s_{12})r^3.
\end{aligned}$$

$$^3((-3s_1 + 3s_4 + 3s_{16} + 3s_{18} + 3s_{10}) + (2s_2 + 2s_8 - 2s_9 - 2s_5 + 2s_{20}) + (-3s_3 + 3s_{12} - 3s_7 - 3s_{13} - 3s_{11})) = (3q_1 + 2q_2 + 3q_3)r^3.$$

$$-s_1s_4s_{16}s_{18}s_{10} = -s_1s_4s_{16}(s_8 - s_{13})r = -s_1s_4(s_8 - s_{17} - s_3 + s_{12})r^2 = -s_1(s_4 + s_{12} - s_{13} + s_{20} - s_1 - s_7 + s_8 + s_{16})r^3 = (-s_3 - s_5 - s_{11} - s_{13} + s_{12} + s_{14} - s_{19} + s_{20} + s_0 + s_2 + s_6 + s_8 - s_7 - s_9 - s_{15} - s_{17})r^4 =$$

$(s_2 + s_8 - s_9 - s_5 + s_{20}) + (- s_3 + s_{12} - s_7 - s_{13} - s_{11}) + (s_6 - s_{17} + s_{14} - s_{15} - s_9) + s_0)r^4 = (q_2 + q_3 + q_4 + 2r)r^4.$

Indsættes de saaledes fundne Værdier for Coefficienterne i foregaaende Ligning, faaer man:

$x^5 - q_1x^4 + (q_2 + q_3 + 2q_4)rx^3 - (q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 2q_4)r^2x^2 + (3q_1 + 2q_2 + 3q_3)r^3x - (q_2 + q_3 + q_4 + 2r)r^4 = 0.$

§ 20.

Ved en simpel Anvendelse af Sætningen (Indledn. § 1. 1) faaer man efter § 10 enten samtlige p Supplementchorder ordnede i en geometrisk Række, hvis Exponent er 2, hvilket er Tilfældet med de regulære Polygoner, hvis Sidetal er: 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 37, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 79, 83, 101 o. s. v., eller man faaer et vist Antal Perioder. Er dette Antal et Primtal, saaledes som i de Polygoner, hvis Sidetal er: 17, 31, 41, 97, 109 o. s. v., saa er Alt simpelt og let. Er Antallet af Perioder derimod et sammensat Tal, saaledes som i den regulære 73kant og den regulære 89kant, hvor man i hver faaer 4 Perioder, eller som i den regulære 257kant, hvor man faaer 16 Perioder, saa maa man, hvis man ikke efter § 15 vil vælge et andet af Tallene 1, 2, 3, 4 ... p til Exponent, ordne disse Perioder saaledes, at deres første Led danne Ledene i en geometrisk Række. Dette kan udføres saaledes: Naar man har dannet den første Periode, hvis første Led har til Index 1, lader man anden Periode begynde med et Led, hvis Index er det mindste af Tallene 1, 2, 3, 4 . . . p, som ikke forekommer som Index i første Periode i nogen lavere Potents eller mindste Rest af nogen lavere Potents end Periodernes Antal; den tredie Periode lader man begynde med et Led, hvis Index er Qvadratet af dette Tal; den fjerde med et Led, hvis Index er Kubus af dette Tal, o. s. v. Ere Perioderne ordnede saaledes, kunne de deles i Grupper paa samme Maade som man deler Supplementchorderne i Perioder, naar disse ere ordnede i en geometrisk Række.

§ 21.

Den regulære 73kant.

Er $n = 73$, altsaa $\frac{n-1}{2} = p = 36 = 4 \,.\, 9 = 2^2 \,.\, 3^2$, saa kan Cirkelliniens Deling i 73 ligestore Dele reduceres til en Opløsning af 2 Ligninger af 2den Grad og 2 Ligninger af 3die Grad.

Efter Indledn. § 1. 1 og efter hvad der er bemærket i forrige § har man:

$$c_1 s_1 = rc_2, \qquad c_5 s_5 = rc_{10},$$
$$c_2 s_2 = rc_4, \qquad c_{10} s_{10} = rc_{20},$$
$$c_4 s_4 = rc_8, \qquad c_{20} s_{20} = rc_{33},$$
$$c_8 s_8 = rc_{16}, \qquad c_{33} s_{33} = rc_7,$$
$$c_{16} s_{16} = rc_{32}, \qquad c_7 s_7 = rc_{14},$$
$$c_{32} s_{32} = rc_9, \qquad c_{14} s_{14} = rc_{28},$$
$$c_9 s_9 = rc_{18}, \qquad c_{28} s_{28} = rc_{17},$$
$$c_{18} s_{18} = rc_{36}, \qquad c_{17} s_{17} = rc_{34},$$
$$c_{36} s_{36} = rc_1, \qquad c_{34} s_{34} = rc_5,$$

$$s_1 s_2 s_4 s_8 s_{16} s_{32} s_9 s_{18} s_{36} = r^9. \qquad s_5 s_{10} s_{20} s_{33} s_7 s_{14} s_{28} s_{17} s_{34} = r^9.$$

$$c_{25} s_{25} = rc_{23}, \qquad c_{21} s_{21} = rc_{31},$$
$$c_{23} s_{23} = rc_{27}, \qquad c_{31} s_{31} = rc_{11},$$
$$c_{27} s_{27} = rc_{19}, \qquad c_{11} s_{11} = rc_{22},$$
$$c_{19} s_{19} = rc_{35}, \qquad c_{22} s_{22} = rc_{29},$$
$$c_{35} s_{35} = rc_3, \qquad c_{29} s_{29} = rc_{15},$$
$$c_3 s_3 = rc_6, \qquad c_{15} s_{15} = rc_{30},$$
$$c_6 s_6 = rc_{12}, \qquad c_{30} s_{30} = rc_{13},$$
$$c_{12} s_{12} = rc_{24}, \qquad c_{13} s_{13} = rc_{26},$$
$$c_{24} s_{24} = rc_{25}, \qquad c_{26} s_{26} = rc_{21},$$

$$s_{25} s_{23} s_{27} s_{19} s_{35} s_3 s_6 s_{12} s_{24} = r^9. \qquad s_{21} s_{31} s_{11} s_{22} s_{29} s_{15} s_{30} s_{13} s_{26} = r^9.$$

Betegnes disse 4 Perioder efter deres Orden med p_1, p_2, p_3 og p_4, saa har man:

$$p_1 = -s_1 + s_2 + s_4 + s_8 + s_{16} + s_{32} - s_9 + s_{18} + s_{36},$$
$$p_2 = -s_5 + s_{10} + s_{20} - s_{33} - s_7 + s_{14} + s_{28} - s_{17} + s_{34},$$
$$p_3 = -s_{25} - s_{23} - s_{27} - s_{19} - s_{35} - s_3 + s_6 + s_{12} + s_{24},$$
$$p_4 = -s_{21} - s_{31} - s_{11} + s_{22} - s_{29} - s_{15} + s_{30} - s_{13} + s_{26}.$$

Da nu $-s_1$, $-s_5$, $-s_{25}$ og $-s_{21}$ danne Ledene i en geometrisk Række, saa kunne Perioderne p_1, p_2, p_3 og p_4 deles i 2 Grupper. Betegnes disse Grupper med q_1 og q_2, saa er $q_1 = p_1 + p_3$, og $q_2 = p_2 + p_4$, altsaa er:

$$q_1 = \int^{\circ}(18, -s_1) = -s_1 + s_2 + s_4 + s_8 + s_{16} + s_{32} - s_9 + s_{18} + s_{36} - s_{25} - s_{23} - s_{27}$$
$$- s_{19} - s_{35} - s_3 + s_6 + s_{12} + s_{24},$$

$$q_2 = \int^{\circ}(18, -s_5) = -s_5 + s_{10} + s_{20} - s_{33} - s_7 + s_{14} + s_{28} - s_{17} + s_{34} - s_{21} - s_{31}$$
$$- s_{11} + s_{22} - s_{29} - s_{15} + s_{30} - s_{13} + s_{26}.$$

Multipliceres disse to Perioder med hinanden, faaer man:

$$q_1q_2 = r(\oint_{q_1}(18, s_4) + \oint_{q_1}(18, s_6) + \oint_{q_1}(18, -s_3) + \oint_{q_2}(18, -s_7) + \oint_{q_1}(18, -s_1) + \oint_{q_1}(18, -s_9) +$$

$$\oint_{q_1}(18, -s_3) + \oint_{q_2}(18, -s_{13}) + \oint_{q_2}(18, -s_{11}) + \oint_{q_2}(18, -s_{21}) + \oint_{q_1}(18, -s_{27}) + \oint_{q_1}(18, s_{36}) + \oint_{q_1}(18, s_4) +$$

$$\oint_{q_2}(18, s_{14}) + \oint_{q_2}(18, -s_{13}) + \oint_{q_1}(18, -s_{23}) + \oint_{q_2}(18, -s_{31}) + \oint_{q_1}(18, s_{32}) + \oint_{q_2}(18, s_{20}) + \oint_{q_2}(18, s_{30}) +$$

$$\oint_{q_1}(18, s_{18}) + \oint_{q_2}(18, s_{28}) + \oint_{q_2}(18, s_{22}) + \oint_{q_1}(18, s_{32}) + \oint_{q_2}(18, s_{14}) + \oint_{q_1}(18, s_{24}) + \oint_{q_2}(18, s_{30}) +$$

$$\oint_{q_2}(18, -s_{33}) + \oint_{q_1}(18, s_2) + \oint_{q_1}(18, s_8) + \oint_{q_1}(18, -s_1) + \oint_{q_2}(18, -s_{11}) + \oint_{q_2}(18, -s_7) + \oint_{q_2}(18, -s_{17}) +$$

$$\oint_{q_1}(18, -s_{19}) + \oint_{q_2}(18, -s_{29})) = r(18q_1 + 18q_2) = 18r(q_1 + q_2) = -18r^2.$$

Altsaa $q_1q_2 = -18r^2$ og $q_1 + q_2 = -r$, følgelig ere q_1 og q_2 Rødder i Ligningen:

$$(1) \qquad x^2 + rx - 18r^2 = 0.$$

Efter det Foregaaende har man:

$$p_1 = \oint(9, -s_1) = -s_1 + s_2 + s_4 + s_8 + s_{16} + s_{32} - s_9 + s_{18} + s_{36},$$

$$p_3 = \oint(9, -s_{25}) = -s_{25} - s_{23} - s_{27} - s_{19} - s_{35} - s_3 + s_6 + s_{12} + s_{24},$$

$$p_1p_3 = r(\oint_{p_3}(9, s_{24}) + \oint_{p_4}(9, s_{26}) + \oint_{p_3}(9, -s_{23}) + \oint_{p_3}(9, -s_{27}) + \oint_{p_4}(9, -s_{21}) + \oint_{p_4}(9, -s_{29}) +$$

$$\oint_{p_2}(9, -s_{33}) + \oint_{p_2}(9, -s_{17}) + \oint_{p_1}(9, -s_9) + \oint_{p_1}(9, s_{32}) + \oint_{p_2}(9, -s_7) + \oint_{p_1}(9, s_{16}) + \oint_{p_1}(9, s_{16}) +$$

$$\oint_{p_2}(9, s_{34}) + \oint_{p_2}(9, -s_7) + \oint_{p_4}(9, s_{30}) + \oint_{p_4}(9, -s_{11}) + \oint_{p_3}(9, s_{12})) = r(4p_1 + 5p_2 + 4p_3 +$$

$5p_4) = r(5p_1 + 5p_2 + 5p_3 + 5p_4) - r(p_1 + p_3) = -5r^2 - rq_1$. Altsaa har man $p_1 + p_3 = q_1$, og $p_1p_3 = -(5r^2 + rq_1)$.

Nu ere p_1 og p_3 Rødder i den qvadratiske Ligning:

$x^2 - (p_1 + p_3)x + p_1p_3 = 0$. Indsættes de fundne Værdier, faaer man:

$$(2) \qquad x^2 - q_1x - (5r + q_1)r = 0.$$

Paa samme Maade findes at p_2 og p_4 ere Rødder i Ligningen:

$$x^2 - q_2x - (5r + q_2)r = 0.$$

Hver af Perioderne p_1, p_2, p_3 og p_4 kan atter deles i 3 Perioder, hver paa 3 Led. Sættes $t_1 + t_2 + t_3 = p_1$, $t_4 + t_5 + t_6 = p_2$, $t_7 + t_8 + t_9 = p_3$, $t_{10} + t_{11} + t_{12} = p_4$, saa har man:

$$\begin{aligned}
t_1 &= -s_1 + s_8 - s_9, & t_7 &= -s_{25} - s_{19} + s_6,\\
t_2 &= s_2 + s_{16} + s_{18}, & t_8 &= -s_{23} - s_{35} + s_{12},\\
t_3 &= s_4 + s_{32} + s_{36}, & t_9 &= -s_{27} - s_3 + s_{24},\\
t_4 &= -s_5 - s_{33} + s_{28}, & t_{10} &= -s_{21} + s_{22} + s_{30},\\
t_5 &= s_{10} - s_7 - s_{17}, & t_{11} &= -s_{31} - s_{29} - s_{13},\\
t_6 &= s_{20} + s_{14} + s_{34}, & t_{12} &= -s_{11} - s_{15} + s_{26}.
\end{aligned}$$

Nu ere t_1, t_2 og t_3 Rødder i den kubiske Ligning:

$$(3)\quad x^3 - (t_1 + t_2 + t_3)x^2 + (t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3)x - t_1t_2t_3 = 0.$$

Coefficienterne i denne Ligning kunne findes saaledes:

$$t_1 = \oint(3, -s_1) = -s_1 + s_8 - s_9,$$

$$t_1 = \oint(3, -s_1) = -s_1 + s_8 - s_9,$$

$$\begin{aligned}
t_1^2 &= r\left(\oint(3, s_0) + \oint(3, s_2) + \oint(3, -s_7) + \oint(3, -s_9) + \oint(3, s_8) + \oint(3, s_{10})\right)\\
&= r(\ 6r + t_2 + t_5 + t_1 + t_1 + t_5\ ),\\
t_1^2 &= r(6r + 2t_1 + t_2 + 2t_5).
\end{aligned}$$

$$t_1 = \oint(3, -s_1) = -s_1 + s_8 - s_9,$$

$$t_2 = \oint(3, s_2) = s_2 + s_{16} + s_{18},$$

$$\begin{aligned}
t_1t_2 &= r\left(\oint(3, -s_1) + \oint(3, -s_3) + \oint(3, s_6) + \oint(3, s_{10}) + \oint(3, -s_7) + \oint(3, -s_{11})\right)\\
&= r(\ t_1 + t_9 + t_7 + t_5 + t_5 + t_{12}\ ),\\
t_1t_2 &= r(t_1 + 2t_5 + t_7 + t_9 + t_{12}).
\end{aligned}$$

$$t_1 = \oint(3, -s_1) = -s_1 + s_8 - s_9,$$

$$t_3 = \oint(3, s_4) = s_4 + s_{32} + s_{36},$$

$$\begin{aligned}
t_1t_3 &= r\left(\oint(3, -s_3) + \oint(3, -s_5) + \oint(3, s_4) + \oint(3, s_{12}) + \oint(3, -s_5) + \oint(3, -s_{13})\right)\\
&= r(\ t_9 + t_4 + t_3 + t_8 + t_4 + t_{11}),\\
t_1t_3 &= r(t_3 + 2t_4 + t_8 + t_9 + t_{11}).
\end{aligned}$$

$$t_2 = \oint(3, s_2) = s_2 + s_{16} + s_{18},$$

$$t_3 = \oint(3, s_4) = s_4 + s_{32} + s_{36},$$

$$t_2t_3 = r(\oint(3, s_2) + \oint(3, s_6) + \oint(3, s_{12}) + \oint(3, s_{20}) + \oint(3, s_{14}) + \oint(3, s_{22}))$$
$$= r(\quad t_2 \quad + \quad t_7 \quad + \quad t_8 \quad + \quad t_6 \quad + \quad t_6 \quad + \quad t_{10}),$$

$$t_2t_3 = r(t_2 + 2t_6 + t_7 + t_8 + t_{10}),$$
$$t_1t_3 = r(t_3 + 2t_4 + t_8 + t_9 + t_{11}),$$
$$t_1t_2 = r(t_1 + 2t_5 + t_7 + t_9 + t_{12}),$$

$$t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = r((t_1 + t_2 + t_3) + 2(t_4 + t_5 + t_6) + 2(t_7 + t_8 + t_9) + (t_{10} + t_{11} + t_{12}))$$
$$= r(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4).$$

Multipliceres Ligningen $t_2t_3 = r(t_2 + 2t_6 + t_7 + t_8 + t_{10})$ med t_1, faaer man:

$$t_1t_2t_3 = r(t_1t_2 + 2t_1t_6 + t_1t_7 + t_1t_8 + t_1t_{10}).$$

$$t_6 = \oint(3, s_{20}) = \quad s_{20} + s_{14} + s_{34},$$

$$t_1 = \oint(3, -s_1) = - s_1 \quad + s_8 \quad - s_9,$$

$$t_1t_6 = r(\oint(3, -s_{19}) + \oint(3, -s_{21}) + \oint(3, -s_{13}) + \oint(3, -s_{15}) + \oint(3, -s_{33}) + \oint(3, -s_{35}))$$
$$= r(\quad t_7 \quad + \quad t_{10} \quad + \quad t_{11} \quad + \quad t_{12} \quad + \quad t_4 \quad + \quad t_8 \quad),$$
$$t_1t_6 = r(t_4 + t_7 + t_8 + t_{10} + t_{11} + t_{12}).$$

$$t_7 = \oint(3, -s_{25}) = - s_{25} - s_{19} + s_6,$$

$$t_1 = \oint(3, -s_1) \quad = - s_1 \quad + s_8 \quad - s_9,$$

$$t_1t_7 = r(\oint(3, s_{24}) + \oint(3, s_{26}) + \oint(3, s_{18}) + \oint(3, s_{20}) + \oint(3, -s_5) + \oint(3, -s_7))$$
$$= r(\quad t_9 \quad + \quad t_{12} \quad + \quad t_2 \quad + \quad t_6 \quad + \quad t_4 \quad + \quad t_5),$$
$$t_1t_7 = r(t_2 + t_4 + t_5 + t_6 + t_9 + t_{12}).$$

$$t_8 = \oint(3, -s_{23}) = - s_{23} - s_{35} + s_{12},$$

$$t_1 = \oint(3, -s_1) \quad = \quad s_1 \quad + s_8 \quad - s_9,$$

$$t_1t_8 = r(\oint(3, s_{22}) + \oint(3, s_{24}) + \oint(3, s_{34}) + \oint(3, s_{36}) + \oint(3, -s_{11}) + \oint(3, -s_{13}))$$
$$= r(\quad t_{10} \quad + \quad t_9 \quad + \quad t_6 \quad + \quad t_3 \quad + \quad t_{12} \quad + \quad t_{11}).$$

$$t_1t_8 = r(t_3 + t_6 + t_9 + t_{10} + t_{11} + t_{12}).$$

$$t_{10} = \int(3, -s_{21}) = -s_{21} + s_{22} + s_{30},$$

$$t_1 = \int(3, -s_1) = -s_1 + s_8 - s_9,$$

$$t_1t_{10} = r(\int(3, s_{20}) + \int(3, s_{22}) + \int(3, -s_{21}) + \int(3, -s_{23}) + \int(3, -s_{29}) + \int(3, -s_{31}))$$
$$= r(t_6 + t_{10} + t_{10} + t_8 + t_{11} + t_{11}),$$
$$t_1t_{10} = r(t_6 + t_8 + 2t_{10} + 2t_{11}).$$

Indsættes de saaledes fundne Værdier i Ligningen: $t_1t_2t_3 = r(t_1t_2 + 2t_1t_6 + t_1t_7 + t_1t_8 + t_1t_{10})$, faaer man:

$$t_1t_2 = r(t_1 + „ + „ + „ + 2t_5 + „ + t_7 + „ + t_9 + „ + „ + t_{12}),$$
$$2t_1t_6 = r(„ + „ + „ + 2t_4 + „ + „ + 2t_7 + 2t_8 + „ + 2t_{10} + 2t_{11} + 2t_{12}),$$
$$t_1t_7 = r(„ + t_2 + „ + t_4 + t_5 + t_6 + „ + „ + t_9 + „ + „ + t_{12}),$$
$$t_1t_8 = r(„ + „ + t_3 + „ + „ + t_6 + „ + „ + t_9 + t_{10} + t_{11} + t_{12}),$$
$$t_1t_{10} = r(„ + „ + „ + „ + „ + t_6 + „ + t_8 + „ + 2t_{10} + 2t_{11} + „),$$

$$t_1t_2t_3 = r^2((t_1 + t_2 + t_3) + 3(t_4 + t_5 + t_6) + 3(t_7 + t_8 + t_9) + 5(t_{10} + t_{11} + t_{12})).$$

Altsaa $t_1t_2t_3 = r^2(p_1 + 3p_2 + 3p_3 + 5p_4)$.

Indsættes de saaledes fundne Værdier i Ligning (3), faaer man:

(4) $x^3 - p_1x^2 + (p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4)rx - (p_1 + 3p_2 + 3p_3 + 5p_4)r^2 = 0.$

Naar t_1, t_2 og t_3 ere fundne af denne Ligning, saa har man:

$$-s_1 + s_8 - s_9 = t_1,$$

$$-s_1s_8 + s_1s_9 - s_8s_9 = r(-s_7 - s_9 + s_8 + s_{10} - s_1 - s_{17}) = r(-s_1 + s_8 - s_9) + r(s_{10} - s_7 - s_{17}) = r(t_1 + t_5),$$

$$s_1s_8s_9 = s_9(s_7 + s_9)r = r^2(s_2 + s_{16} + s_{18} + s_0) = r^2(t_2 + 2r).$$

Altsaa ere $-s_1$, s_8 og $-s_9$ Rødder i den kubiske Ligning:

$$x^3 - t_1x^2 + r(t_1 + t_5)x - r^2(t_2 + 2r) = 0.$$

Efter det Foregaaende har man: $t_1{}^2 = r(6r + 2t_1 + t_2 + 2t_5)$, altsaa er $t_5 = \frac{t_1{}^2 - 2rt_1 - rt_2 - 6r^2}{2r}$. Indsættes denne Værdi, faaer man:

$$x^3 - t_1x^2 + \left(\frac{t_1{}^2 - rt_2 - 6r^2}{2}\right)x - r^2(t_2 + 2r) = 0.$$

§ 22.

Af den i § 15 givne Fremstilling af Supplementchordernes Ordning i geometriske Rækker følger, at ethvert af Tallene 1, 2, 3, 4, 5 . . . p ophøiet i pte Potents er lig ± 1

+ et Multiplum af (2p + 1) eller, at man har, naar x betegner et hvilketsomhelst af disse Tal:

$$x^p = \pm 1 + M(2p + 1),$$

hvor M (2p + 1) betegner et Multiplum af (2p + 1).

Dette kan ogsaa paa en mere almindelig Maade bevises saaledes:

Er n et Primtal = 2p + 1, og antages Cirkellinien deelt i n ligestore Dele, saa kunne disse Delingspunkter betragtes som Vinkelpunkter i en regulær nkant. Springer man fra Punkt til Punkt med et constant Mellemrum h, vil man ikke kunne komme tilbage til det Punkt, hvorfra man gik ud, saafremt h er mindre end n, uden først at have passeret gjennem alle de øvrige og gaaet Cirkellinien rundt h Gange. Er h lig n eller et Multiplum af n, saa er Mellemrummet, over hvilket man springer, lig Nul. Er h et hvilketsomhelst heelt Tal, saa maa h være lig qn + h′, hvor h′ er mindre end n, altsaa er Mellemrummet, over hvilket man springer, lig h′ d. e. lig den Rest, som bliver tilbage, naar h divideres med n. Efter hvad der er bemærket i § 1, kan man ved at forbinde disse n Delingspunkter ved alle mulige Mellemrum ikke danne flere end $\frac{n-1}{2}$ eller p forskjellige regulære nkanter (Stjernepolygoner), thi ved at forbinde Delingspunkterne n — 1 og n — 1 med hinanden, faaer man den samme Polygon, som ved at forbinde dem 1 og 1 med hinanden blot construeret fra den modsatte Side; ved at forbinde dem n — 2 og n — 2 med hinanden, faaer man den samme Polygon som ved at forbinde dem 2 og 2 med hinanden o. s. v. Er altsaa den ovenfor nævnte Divisionsrest h′ større end $\frac{1}{2}$n, kan den subtraheres fra n. Enhver Rest, der uden Hensyn til Fortegnet er mindre end $\frac{1}{2}$n d. e. lig eller mindre end p, kaldes den mindste Rest.

Forbinder man Vinkelpunkterne i en regulær nkant, hvor n er et Primtal = 2p + 1, x og x med hinanden, saa faaer man en anden regulær nkant (Stjernepolygon), forbinder man Vinkelpunkterne i denne Polygon ligeledes x og x med hinanden, faaer man en tredie regulær Polygon, forskjellig fra de foregaaende. Fortsættes paa samme Maade, indtil man kommer tilbage til den oprindelige Polygon, hvorfra man gik ud, faaer man et Antal af m forskjellige regulære nkanter, hvilket Antal enten er alle de forskjellige regulære Polygoner, som kunne dannes ved at forbinde Vinkelpunkterne i den første Polygon ved alle mulige Mellemrum, og i dette Tilfælde er m = p = $\frac{n-1}{2}$, eller ogsaa er m blot en Deel deraf, og i saa Tilfælde er m en aliqvot Deel af p. Gaaer man ud fra en af de Polygoner, som ikke findes i første Gruppe, og forbinder Vinkelpunkterne i denne x og x med hinanden og Vinkelpunkterne i den herved udkomne Polygon ligeledes x og x med hinanden o. s. v., indtil man kommer tilbage til den Polygon, hvorfra man gik ud, saa har man atter en Gruppe af m regulære Polygoner, forskjellige fra hinanden indbyrdes og forskjellige

fra Polygonerne i første Gruppe; thi skulde en af Polygonerne i anden Gruppe falde sammen med en af Polygonerne i første Gruppe, saa maatte begge Grupper falde sammen, da de begge ere dannede efter samme Lov, men dette er umuligt, da man er gaaet ud fra en Polygon, som ikke findes i første Gruppe. Indeholde disse 2 Grupper alle de regulære Polygoner, som kunne construeres, saa er $2m = p$, og m er altsaa en aliqvot Deel af p. Er der endnu flere tilbage, saa gjentages den samme Construktion, og man faaer atter en Gruppe af m regulære Polygoner, forskjellige fra hinanden indbyrdes og forskjellige fra Polygonerne i første og anden Gruppe. Da p er et endeligt Tal, og da man ved Dannelsen af hver Gruppe nødvendig maa komme tilbage til den Polygon, hvorfra man gik ud, saa er det klart, at alle p Polygoner paa denne Maade maae blive udtømte. Kaldes Gruppernes Antal t, saa er $mt = p$, og altsaa $t = \frac{p}{m}$.

Nu indsees det let, at man ved at forbinde Vinkelpunkterne 1 en regulær nkant x og x med hinanden og i den herved udkomne regulære nkant ligeledes x og x med hinanden o. s. v. maa komme til samme Resultat som om man havde udledet alle Polygoner af den første Polygon ved i denne at forbinde Vinkelpunkterne 1) x og x med hinanden, 2) x^2 og x^2 med hinanden, 3) x^3 og x^3 o. s. v. indtil x^m og x^m med hinanden. Men ved at forbinde Vinkelpunkterne x^m og x^m med hinanden kommer man efter Antagelsen tilbage til den første Polygon, altsaa er Mellemrummet x^m, over hvilket man springer fra Punkt til Punkt, $= \pm 1 +$ et Multiplum af n. Det maa nemlig bemærkes, at man kan komme tilbage igjen til den første Polygon ikke blot ved at forbinde Vinkelpunkterne 1 og 1 med hinanden, men ogsaa ved at forbinde dem $n - 1$ og $n - 1$ med hinanden. Man har altsaa:

$$x^m = \pm 1 + M(n), \tag{1}$$

$$\text{altsaa} \quad (x^m)^t = \pm 1 + M(n),$$

$$x^{mt} = \pm 1 + M(n),$$

$$\text{men} \quad mt = p = \frac{n-1}{2},$$

$$\text{altsaa} \quad x^{\frac{n-1}{2}} = \pm 1 + M(n), \tag{2}$$

$$\text{eller} \quad x^p = \pm 1 + M(2p + 1). \tag{3}$$

Qvadreres Ligning (2), faaer man:

$$x^{n-1} = 1 + M(n). \tag{4}$$

Ligning (4) er Fermats Theorem.

§ 23.

1. Er a en hvilkensomhelst Værdi af x i Ligningen $x^p = \pm 1 + M(2p + 1)$, saa er enhver Potents af a ligeledes en Værdi af x i samme Ligning, thi da $a^p = \pm 1 +$

$M(2p + 1)$, saa er ogsaa $(a^p)^k = (a^k)^p = \pm 1 + M(2p + 1)$; altsaa er a^k eller dens mindste Rest ligeledes en Værdi af x i denne Ligning. Følgelig er ethvert Led i Rækken $1, a, a^2, a^3, \ldots\ldots$ eller disse Leds mindste Rester Værdier af x i samme Ligning.

2. Enhver Værdi af x i Ligningen $x^p = \pm 1 + M(2p + 1)$, der gjør $m = p$ eller alle Polygoner til en eneste Gruppe, med andre Ord, som ikke giver ± 1 til Rest førend i pte Potents, er et beqvemt Tal til Exponent i den geometriske Række, hvori Supplementchorderne kunne ordnes, for at deles i Grupper eller Perioder. En saadan Værdi af x vil jeg derfor kalde et Ordningstal for den regulære $(2p + 1)$kant. Er g en saadan Værdi af x, saa ere de mindste Rester af $1, g, g^2, g^3, g^4, \ldots g^{p-1}$ uden Hensyn til Orden og Fortegn $1, 2, 3, 4, 5 \ldots p$.

Af den i § 15 givne Fremstilling af Supplementchordernes Ordning i geometriske Rækker sees, at 2 og 6 ere Ordningstal for den regulære 13 kant, og at Indices i Rubrikken A ere de mindste Rester af

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5,$$
$$\text{nemlig } 1, 2, 4, 5, 3, 6,$$

og at Indices i Rubrikken E ere de mindste Rester af

$$6^0, 6^1, 6^2, 6^3, 6^4, 6^5,$$
$$\text{nemlig } 1, 6, 3, 5, 4, 2.$$

3. Er b en saadan Værdi af x, at ingen lavere Potents end den mte giver ± 1 til Rest, saa er efter forrige § m en Divisor til p, og Ligningen $x^m = \pm 1 + M(2p+1)$ har da m Værdier eller Rødder tilfælles med Ligningen $x^p = \pm 1 + M(2p + 1)$. Disse Rødder ere de mindste Rester af $1, b, b^2, b^3, b^4, \ldots b^{m-1}$, hvilke danne en Periode, som ved voxende Exponenter gjentager sig uden Ophør.

I Ligningen $x^6 = \pm 1 + M(13)$ er 4 en saadan Værdi af x, at ingen lavere Potents end den 3die giver ± 1 til Rest. Ligningen $x^3 = \pm 1 + M(13)$ har altsaa 3 Rødder tilfælles med Ligningen $x^6 = \pm 1 + M(13)$. Disse 3 Rødder ere de mindste Rester af $4^0, 4^1, 4^2$, d. e. $1, 4, 3$. $5^2 = -1 + M(13)$, altsaa har $x^2 = \pm 1 + M(13)$ 2 Rødder tilfælles med Ligningen $x^6 = \pm 1 + M(13)$. Disse 2 Rødder ere $5^0, 5^1$ d. e. $1, 5$. Ligningen $x^6 = \pm 1 + M(13)$ har foruden de 4 Rødder, som den har fælles med Ligninger af lavere Grader, endnu de 2 Rødder 2 og 6. Disse Rødder ere altsaa egne for denne Ligning.

4. Multipliceres Tallene i første Periode $1, b, b^2, b^3, b^4, \ldots b^{m-1}$ eller deres mindste Rester med et af Tallene $1, 2, 3, 4, \ldots p$, som ikke findes i første Periode, saa ere de mindste Rester af disse Produkter Ledene i anden Periode. Kaldes dette Tal α, saa ere Ledene i anden Periode de mindste Rester af

$$\alpha,\ \alpha b,\ \alpha b^2,\ \alpha b^3,\ \alpha b^4,\ \alpha b^5,\ \ldots\ \alpha b^{m-1}.$$

5. Multipliceres Tallene i første Periode med 1, b, b^2, b^3 . . . b^{m-1} eller deres mindste Rester med et af Tallene 1, 2, 3, 4, . . . p, som ikke findes i de to første Perioder, saa ere de mindste Rester af disse Produkter Ledene i tredie Periode. Kaldes dette Tal β, saa ere Ledene i tredie Periode de mindste Rester af

$$\beta,\ \beta b,\ \beta b^2,\ \beta b^3,\ \beta b^4,\ \beta b^5,\ \ldots\ \beta b^{m-1}.$$

Paa samme Maade fortsættes, indtil alle Tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... p ere udtømte.

§ 24.

Om regulære Polygoners Ordningstal.

Er p et Primtal, saa ere alle Værdier af x i Ligningen $x^p = \pm 1 + M(2p+1)$ Ordningstal, thi da vil ingen lavere Potents end den pte give ± 1 til Rest. Er p derimod et sammensat Tal $= 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots s^\mu$, saa kunne Ordningstallene paa Grund af de enkelte Faktorer 2, 3, 5, . . . s ikke være Qvadrattal eller mindste Rester af Qvadrattal, ikke Kubiktal eller mindste Rester af Kubiktal, ikke Tal af 5te Potents eller mindste Rester af Tal af 5te Potents o. s. v. og heller ikke Tal af ste Potents eller mindste Rester af Tal af ste Potents. Thi da ethvert af Tallene 1, 2, 3, 4, . . . p, ophøiet i pte Potents, giver ± 1 til Rest, saa maae Qvadrattal eller mindste Rester af Qvadrattal i $\frac{p}{2}$ Potents, Kubiktal eller mindste Rester af Kubiktal i $\frac{p}{3}$ Potents o. s. v. og Tal af ste Potents eller mindste Rester af Tal af ste Potents i $\frac{p}{s}$ Potents give ± 1 til Rest, og kunne derfor ikke være Ordningstal.

Af Tallene 1, 2, 3, 4, . . . p er altsaa det halve Antal Qvadrattal eller mindste Rester af Qvadrattal, en Trediedeel Kubiktal eller mindste Rester af Kubiktal, en Femtedeel Tal af 5te Potents eller mindste Rester af Tal af 5te Potents o. s. v. og en ste Deel Tal af ste Potents eller mindste Rester af Tal af ste Potents; eller mere almindeligt, dersom man af Tallene 1, 2, 3, 4, . . . p kun betragter dem, som paa engang ere Qvadrattal, Kubiktal, Tal af 5te Potents o. s. v., saa vil en ste Deel af disse Tal paa samme Tid være Tal af ste Potents. Thi de Tal, som paa samme Tid ere Qvadrattal, Kubiktal, Tal af af 5te Potents eller mindste Rester af disse Potenser, ville i $\frac{p}{2 \cdot 3 \cdot 5}$ te Potents give ± 1 til Rest. Deres Antal er altsaa $\frac{p}{2 \cdot 3 \cdot 5}$. Antallet af dem, som paa samme Tid ere af ste Potents, er $\frac{p}{2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots s}$, hvilket udgjør en ste Deel af de Foregaaende.

§ 25.

At finde en regulær Polygons Ordningstal.

Er $p = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots s^\mu$, saa kunne en regulær Polygons Ordningstal findes saaledes:

Man opskriver Tallene:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots . p.$$

Udelukkes af denne Talrække alle Qvadrattal, alle Kubiktal, alle Tal af 5te Potents o. s. v. og alle Tal af ste Potents eller de mindste Rester af alle disse Potentser, saa ere de resterende Tal Polygonens Ordningstal.

Paa Grund af Qvadrattallene udelukkes Halvparten af de opskrevne Tal, paa Grund af Kubiktallene udelukkes Tredieparten af de tiloversblevne Tal, paa Grund af Tallene af 5te Potents Femteparten af de resterende Tal o. s. v. og endelig paa Grund af Tallene af ste Potents ste Parten af de tilbageblevne Tal. De, der nu ere tilbage, ere Polygonens Ordningstal.

Af Maaden, hvorpaa en Polygons Ordningstal findes, udledes let et Udtryk for deres Antal. Kaldes Antallet A, saa er $A = p(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) \ldots . (1 - \frac{1}{s})$.

1 Ex. At finde Ordningstallene for den regulære 13kant.

Man opskriver de 6 Tal:

(1) $$1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Da 6 indeholder de enkelte Faktorer 2 og 3, saa maa man udelukke alle Qvadrattal eller mindste Rester af Qvadrattal, alle Kubiktal eller mindste Rester af Kubiktal.

Man qvadrerer derfor alle disse Tal og faaer saaledes:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36,$$

som give de mindste Rester

$$1, 4, 4, 3, 1, 3,$$

hvoraf kun 3 ere forskjellige, nemlig

$$1, 3, 4.$$

Udelukkes disse Tal af Talrækken (1), faaer man:

(2) $$2, 5, 6.$$

Kuberes Tallene (2), faaer man:

$$8, 125, 216,$$

hvoraf de mindste Rester ere:

$$5, 5, 5.$$

Udelukkes nu 5 af Tallene (2), faaer man de 2 Ordningstal for den regulære 13kant, nemlig

$$2, 6,$$

hvilket Antal ogsaa Formelen giver:

$$A = 6(1 - \tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{3}) = 6 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} = 2.$$

2 Ex. At finde Ordningstallene for den regulære 41kant.

Man opskriver de 20 Tal:

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, og, da $20 = 2 . 2 . 5$, saa maa man af Tallene (1) udelukke alle Qvadrattal eller mindste Rester af Qvadrattal og alle Tal af 5te Potents eller mindste Rester af Tal af 5te Potents.

Qvadreres Tallene (1), faaer man:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400,

hvilke give følgende 20 mindste Rester:

1, 4, 9, 16, 16, 5, 8, 18, 1, 18, 2, 20, 5, 9, 20, 10, 2, 4, 8, 10.

Af disse 20 Rester ere kun, som man forud veed, 10 forskjellige, nemlig

1, 4, 9, 16, 5, 8, 18, 2, 20, 10.

Udelukkes disse af Talrækken (1), faaer man tilbage

(2) 3, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19.

Ethvert af de udelukkede Tal tilfredsstiller Ligningen $x^{10} \pm 1 = M(41)$, altsaa tilfredsstiller ogsaa deres 5te Potents samme Ligning (§ 23. 1) og udgjør altsaa en Deel af de udelukkede Tal. Et Tal af Rækken (2) kan altsaa kun være 5te Potents af et Tal af samme Række. For at faae den 5te Potents af Tallene (2) kan man multiplicere deres mindste kubiske Rester med deres mindste qvadratiske Rester og tage de mindste Rester af disse Produkter.

De mindste kubiske Rester ere:

14, 11, 15, 19, 6, 17, 3, 13, 7, 12.

De mindste qvadratiske Rester ere:

9, 5, 8, 2, 20, 5, 9, 20, 2, 8.

Deres Produkter ere:

126, 55, 120, 38, 120, 85, 27, 260, 14, 96,

hvoraf de mindste 5te Potentses Rester ere:

3, 14, 3, 3, 3, 3, 14, 14, 14, 14.

I Rækken (2) er altsaa kun 2 Tal af 5te Potents, hvilket man ogsaa forud veed, nemlig

3, 14.

Naar disse to Tal udelukkes af Rækken (2), saa har man de 8 Ordningstal for den regulære 41kant, nemlig

6, 7, 11, 12, 13, 15, 17, 19.

Dette Antal giver ogsaa Formelen:

$$A = 20(1 - \tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{5}) = 20 . \tfrac{1}{2} . \tfrac{4}{5} = 8.$$

3 Ex. At finde Ordningstallene for den regulære 73kant.

Man opskriver de 36 Tal:

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36.

Da $36 = 2^2 . 3^2$, saa maa man af Talrækken (1) udelukke alle Qvadrattal eller mindste Rester af Qvadrattal og alle Kubiktal eller mindste Rester af Kubiktal.

Qvadreres Tallene (1), faaer man:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, hvoraf de mindste Rester ere:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 24, 9, 8, 27, 25, 2, 23, 23, 6, 36, 3, 32, 4, 35, 3, 27, 18, 8, 32, 19, 1, 19, 35, 24, 12, 2, 6, 12, 16, 18.

Af disse 36 Rester ere kun 18 forskjellige, nemlig

(2) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 19, 23, 24, 25, 27, 32, 35, 36.

Udelukkes Tallene (2) af Talrækken (1), faaer man tilbage:

(3) 5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 20, 21, 22, 26, 28, 29, 30, 31, 33, 34.

Kuberes Tallene (3), faaer man:

125, 343, 1000, 1331, 2197, 2744, 3375, 4913, 8000, 9261, 10648, 17576, 21952, 24389, 27000, 29791, 35937, 39304,

hvoraf de mindste Rester ere:

21, 22, 22, 17, 7, 30, 17, 22, 30, 10, 10, 17, 21, 7, 10, 7, 21, 30.

Af disse 18 Rester ere kun, hvilket man allerede forud veed, 6 forskjellige, nemlig

7, 10, 17, 21, 22, 30.

Udelukkes disse af Talrækken (3), faaer man de 12 Ordningstal for den regulære 73kant, nemlig

5, 11, 13, 14, 15, 20, 26, 28, 29, 31, 33, 34.

Det samme Antal giver ogsaa Formelen:

$$A = 36(1 - \tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{3}) = 36 . \tfrac{1}{2} . \tfrac{2}{3} = 12.$$

Anm. De Tal, som jeg her har kaldet Ordningstal, kunde ogsaa kaldes primitive Rødder i Ligningen $x^p \pm 1 = M(2p+1)$, men maae ikke forvexles med de primitive Rødder hos Gauss, Legendre o. fl., thi disse ere primitive Rødder i Ligningen $x^{p-1} - 1 = M(p)$ og kaldes almindeligt primitive Rødder til Primtallet p.

Den offentlige Examen i Christiania Kathedralskole tager i indeværende Aar sin Begyndelse **Mandag** den 30te Juni og afholdes overeensstemmende med hosføiede Tabel.

Onsdag den 9de Juli Kl. 12 Middag og paafølgende **Torsdag** den 10de Juli Kl. 8 Formiddag holdes Optagelsesprøve med de nyindmeldte Elever.

Fredag den 11te Juli Kl. 12 Middag bekjendtgjøres Examens Udfald, samt overleveres Charaktersedler og Testimonier.

Derefter indtræde Sommerferierne, som vedvare indtil 9de August incl.

Samtlige Disciple møde atter paa Skolen **Mandag** den 11te August Kl. 12 Middag.

Disciplenes Forældre og Foresatte samt enhver Anden, som maatte interessere sig for Skolen og dens Ungdom, indbydes herved til at beære med sin Nærværelse saavel Examens mundtlige Deel som Bekjendtgjørelsen af dens Udfald.

Christiania den 12te Juni 1856.

J. L. Vibe.

Dimittenderne fra Christiania Kathedralskole 1856.

1. *Andreas Arntzen,* født d. 21de December 1837, Søn af Stiftsoverretsjustitiarius C. Arntzen i Christiania, Discipel af Skolen i 7 Aar.
2. *Jacob Aall Bonnevie,* født d. 31te December 1838, Søn af afg. Borgermester i Throndhjem H. Bonnevie, Discipel af Skolen i 2 Aar.
3. *Hans Christian Christensen,* født d. 23de October 1839, Søn af Kjøbmand i Christiania A. Christensen, Discipel af Skolen i 7 Aar.
4. *Carl Ludvig Christopher Ingstad,* født d. 27de Mai 1839, Søn af Stiftsoverretsassessor E. Ingstad i Christiania, Discipel af Skolen i 7 Aar.
5. *Christian Anker Kreutz,* født d. 9de Marts 1836, Søn af Regnskabsfører i Ringsaker I. F. Kreutz, Discipel af Skolen i 8 Aar.
6. *Oluf Severin Kynsberg,* født d. 28de Februar 1838, Søn af afg. Overlærer i Christiania O. Kynsberg, Discipel af Skolen i 7 Aar.

Examens - Tabel.

Dage.	Formiddag.	Eftermiddag.
Mandag den 30te Juni.	7 Klasse Mathem. *Odén.* 6 — Græsk *Rector.* 5 — Geogr. ogHist. *Heidenreich.* 4 — a Græsk *Brock.* 4 — b Religion *Vogt.* 2 — Tydsk *Coucheron.*	5 Klasse Geogr. ogHist. *Heidenreich.* 3 — Mathem. *Odén.* 2 — Norsk *Knudsen.* 1 — Regning *Coucheron.*
Tirsdag den 1ste Juli.	7 Klasse Græsk *Rector.* 6 — Latin *Thaasen.* 5 — Religion *Vogt.* 3 — Latin *Kinck.* 2 — Historie *Brock.* 1 — Historie *Coucheron.*	6 Klasse Mathem. *Odén.* 5 — Tydsk *Heidenreich.* 3 — Norsk *Knudsen.*
Onsdag den 2den Juli.	7 Klasse 6 — 5 — 4 — a 4 — b 3 — } Latinsk Stiil. 2 — Regning *Coucheron.* 1 — Religion *Vogt.*	7 Klasse Religion *Vogt.* 3 — Mathem. *Odén.* 2 — Historie *Brock.*
Torsdag den 3die Juli.	7 Klasse 6 — 5 — 4 — a 4 — b 3 — } Norsk Stiil. 2 — Religion *Vogt.*	6 Klasse Tydsk *Heidenreich.* 4 — a Mathem. *Odén.* 4 — b Græsk *Coucheron.*
Fredag den 4de Juli.	7 og 6 Kl. Lat. Oversættelse. 5 — Fransk *Vogt.* 4 — a Historie *Brock.* 4 — b Tydsk *Coucheron.* 3 — Geogr. *Heidenreich.* 2 — Latin *Kinck.*	7 Klasse Tydsk *Heidenreich.* 5 — Mathem. *Odén.* 4 — a Fransk *Vogt.* 3 — Norsk *Knudsen.*

Dage.	Formiddag.	Eftermiddag.
Löverdag den 5te Juli.	7 Klasse Latin *Thaasen.* 6 — Religion *Vogt.* 5 — Mathem. *Odén.* 4 — a Geogr. *Heidenreich.* 4 — b Historie *Brock.* 3 — Tydsk *Coucheron.* 2 — Latin *Kinck.*	6 Klasse Mathem. *Odén.* 4 — b Geogr. *Heidenreich.* 3 — } Kalligr. og Tegn. *Magnus.* 2 — 1 —
Mandag den 7de Juli.	7 Klasse Fransk *Vogt.* 6 — Geogr. ogHist. *Heidenreich.* 5 — Græsk *Brock.* 4 — a Latin *Bödtker.* 4 — b Fransk *Thaasen.* 3 — Latin *Kinck.* 1 — Geogr. *Coucheron.*	6 Klasse Fransk *Vogt.* 5 — Latin *Bödtker.* 4 — b Mathem. *Odén.* 3 — Historie *Brock.* 2 — Geogr. *Heidenreich.*
Tirsdag den 8de Juli.	6 Klasse Geogr. ogHist. *Heidenreich.* 5 — Græsk *Brock.* 4 — a Tydsk *Bödtker.* 3 — Religion *Vogt.* 2 — Norsk *Knudsen.* 1 — Latin *Magnus.*	6 og 5 Kl. Gymn. Kl. 4 4 — a og b — - 4½ 3 — — - 5 2 — — - 5½ 1 — — - 6 } *Hagemann.*
Onsdag den 9de Juli.	7 Klasse Geogr. ogHist. *Heidenreich.* 4 — a Religion *Vogt.* 4 — b Latin *Kinck.* 3 — Græsk *Brock.* 1 — Norsk *Magnus.*	

Examen begynder hver Formiddag Kl. 8 og hver Eftermiddag Kl. 4.