Danskernes Historie Online
Danske Slægtsforskeres Bibliotek

Dette værk er downloadet fra Danskernes Historie Online

Danskernes Historie Online er Danmarks største digitaliseringsprojekt af litteratur inden for emner som personalhistorie, lokalhistorie og slægtsforskning. Biblioteket hører under den almennyttige forening Danske Slægtsforskere. Vi bevarer vores fælles kulturarv, digitaliserer den og stiller den til rådighed for alle interesserede.

Støt Danskernes Historie Online - Bliv sponsor
Som sponsor i biblioteket opnår du en række fordele. Læs mere om fordele og sponsorat her: https://slaegtsbibliotek.dk/sponsorat

Ophavsret
Biblioteket indeholder værker både med og uden ophavsret. For værker, som er omfattet af ophavsret, må PDF-filen kun benyttes til personligt brug.

Links
Slægtsforskernes Bibliotek: https://slaegtsbibliotek.dk
Danske Slægtsforskere: https://slaegt.dk

INBJUDNING

TILL

ÅRSEXAMEN OCH AVSLUTNING

VID

HÖGRE ALLMÄNNA LÄROVERKET

I ÖSTERSUND DEN 6 JUNI 1916

1. GEOMETRIENS GRUNDER AV LEKTOR P. G. PERSSON.
2. REDOGÖRELSE FÖR ÖSTERSUNDS HÖGRE ALLM. LÄROVERK LÄSÅRET 1915—1916.

ÖSTERSUND 1916
A.-B. JÄMTLANDSPOSTENS TRYCKERI

PAUL PERSSON

GEOMETRIENS GRUNDER

CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM 1916

FÖRORD.

Föreliggande uppsats är avsedd för sådana för geometriens principfrågor intresserade, som ej ha tid eller tillfälle att taga närmare kännedom om den ganska vidlyftiga litteratur, som behandlar geometriens grunder. Av denna anledning förekomma ytterst få litteraturanvisningar i texten. Sådana äro också numera tämligen överflödiga; de kunna ju lätt erhållas i Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Till detta verk hänvisas den, som vill arbeta sig grundligt in i geometriens principfrågor. Andra lämpliga arbeten äro Weber-Wellstein, Encyklopädie der Elementar-Mathematik, Bd II och Enriques, Fragen der Elementargeometrie. Det senare arbetet innehåller en samling av uppsatser, skrivna av flera italienska matematici. Den första delen behandlar geometriens grunder, andra delen sysslar med de geometriska konstruktionerna.

Första och tredje kapitlen av detta arbete innehålla en revision av Euklides' elementer och kunna närmast betraktas som en kommentar till Hilberts ryktbara Grundlagen der Geometrie. Detta arbete torde knappast med tillbörlig behållning kunna studeras av en med ämnet obekant läsare. Det bör därför vara ett åtminstone ej helt och hållet överflödigt arbete att närmare utföra Hilberts idéer, så att det klart och tydligt framgår, att den euklideiska geometrien kan deduceras ur det system av axiom, som är att finna i Hilberts Grundlagen. Citaten ur Euklides' elementer äro hämtade ur Strömers svenska skolupplaga.

Andra kapitlet av detta arbete behandlar de icke euklideiska geometrierna, i vilka parallellaxiomet negeras. Där studeras egenskaperna hos ett system av kurvor och ytor, som ha en del av de egenskaper, som i den vanliga euklideiska geometrien tillkomma räta linjer och plan. Just denna metod har Wellstein begagnat i Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Hans framställning är rent geometrisk och därför ur metodisk synpunkt överlägsen min, som begagnar sig av den matematiska analysen. Till gengäld för min framställning raskare till målet och bör också vara lättfattligare. Det förutsättes, att läsaren känner till den analytiska geometrien och elementen av infinitesimalkalkylen.

Jag hade för flera år sedan tänkt att publicera en framställning av geometriens grunder. I denna skulle först den projektiva geometrien grundläggas och därefter kongruensbegreppen införas, varefter den euklideiska och de icke-euklideiska geometrierna skulle behandlas parallellt. Från denna min avsikt har jag emellertid, åtminstone tills vidare, avstått. En aning om den projektiva geometriens betydelse för måttgeometrien torde emellertid även den med projektiv geometri obekante läsaren av föreliggande arbete få, ehuru framställningen i § 3 av betydelsen av Desargues' sats kanske är allt för sammanträngd.

För begripandet av detta arbete fordras vana vid matematiskt tänkande och förståelse för betydelsen av en strängt logisk bevisföring. För övrigt fordras mycket små matematiska förkunskaper.

Geometriens grunder.

Geometrien kan, om man så vill, betraktas som en naturvetenskap. De naturvetenskapliga metoderna, observationer och experiment, icke blott kunna utan måste användas vid inlärandet av de allra första geometriska insikterna. På detta sätt erhöllo troligen de gamla egyptierna sina ej obetydliga geometriska kunskaper. Samma metod användes än i dag vid den första geometriundervisningen i våra skolor, helt säkert dock i alltför ringa grad. Emellertid skulle de naturvetenskapliga metoderna ensamma ej föra långt. De forskningsmetoder, som äro karakteristiska för den rena matematiken, måste införas långt tidigare och i långt större utsträckning än inom någon annan naturvetenskap.

Skall geometrien betraktas som en naturvetenskap, och såsom en sådan få vi betrakta geometrien, så fort den användes praktiskt eller som grundval för de övriga naturvetenskaperna, måste den givetvis åtminstone utgå från vissa erfarenhetsrön, den lika väl som exempelvis den matematiska fysiken. Det för geometrien egendomliga är, att dessa erfarenhetssatser, som vi bruka kalla axiom och postulat, kunna göras relativt få till antalet, och att deras innehåll är så enkelt, att den alldagligaste erfarenhet synes sätta oss i besittning av dem. Sedan kan man inom geometrien reda sig med den rent logiska deduktionen, åtminstone så snart det gäller att övertyga sig om giltigheten av ett påstående. Bortse vi från, huru axiomen och postulaten vunnits, och endast fästa oss vid den efter nämnda satsers fastställande använda metoden, blir geometrien ren matematik i lika hög grad som någon annan gren av matematiken. Men då fordras givetvis, att vi ständigt kunna hänvisa till postulaten eller axiomen och ej på nytt behöva gripa till åskådningen. Det är grunderna för en sådan rent vetenskaplig geometri, vi i det följande skola studera. Huru axiom och postulat förvärvas, intresserar oss härvid ej. Blott så vida det blir fråga om en praktisk användning av geometrien, måste vi hålla på, att våra förutsättningar ej strida mot erfarenheten.

Vi gå nu att undersöka, huruvida den för oss alla välbekanta geometriska lärobyggnad, som vi påträffa i Euklides' elementer, har de kännetecken, som vi ovan uppställt såsom utmärkande för en rent matematisk geometri. Se vi först på hans till första boken hörande definitioner, finna vi genast brister. Definitionerna på punkt, rät linje och plan äro under all kritik. Andra begrepp, såsom lika sträckor och lika vinklar, har han ej ens försökt sig på att definiera. Men det är också klart, att ej alla geometriska begrepp kunna strängt definieras. Kvar måste alltid finnas en rest av odefinierade begrepp, förmedelst vilka de andra definieras. Den saken är lika tydlig, som att ej alla satser kunna bevisas, utan att det måste återstå en rest av obevisade satser, axiom och postulat, med vilkas tillhjälp lärosatserna bevisas. Helt säkert har ej Euklides själv ansett, att han strängt definierat begreppen punkt o. s. v., utan han har nog endast velat lämna en ordförklaring, för så vitt ej dessa definitioner äro av andra gjorda tillsatser, vilket ju mycket väl är möjligt. Det stora flertalet av hans definitioner äro ju fullkomligt mönstergilla. Och de kompletteras, där så är behövligt, av problem, i vilka visas, att de definierade begreppen verkligen existera. Att problemen äro att betrakta som existensbevis, är nämligen tydligt. I praktiken kunna ju konstruktionerna i regel utföras på vida bekvämare sätt.

Se vi däremot närmare efter, om Euklides verkligen bland sina axiom och postulat uppfört alla de bevisgrunder, han sedan använder, finna vi, att så ej är förhållandet. Det klickar redan i I : 1. Där talas om snittpunkten mellan två cirklar. Att en sådan existerar, lär oss intet av postulaten eller axiomen, men väl åskådningen. Beviset av första kongruensfallet är ej alls något bevis utan endast ett idealiserat experiment. Det vore lätt att påpeka flera svaga punkter. Det sagda torde emellertid vara nog för att klargöra, att en revision av Euklides elementer är nödvändig. Att en sådan revision ingalunda är någon lätt uppgift, visar det faktum, att det dröjde till slutet av 1800-talet, innan en fullt sträng framställning av geometriens grunder såg dagen. Sådana ha nu levererats efter ganska skiljaktiga metoder av flera författare. Ryktbarast och kanske enklast är Hilberts i hans Grundlagen der Geometrie.[1]

Att det dröjde så länge, innan geometrien ställdes på fullt säkra fötter, berodde ej endast på problemets svårigheter. Först under 1800-talet tog intresset för matematikens principfrågor riktigt fart. De andra grenarna av matematiken grundades först då fullt rationellt. Under samma århundrade sågo också de så kallade icke-euklideiska geometrierna dagen. Kritik hade mycket tidigt beståtts det så kallade parallellaxiomet. Den påbörjades redan av grekerna och avstannade aldrig helt. Vid mitten av 1800-talet visade nu oberoende av varandra ungraren Bolyai och ryssen Lobatschefsky, att detta axiom ej kunde bevisas med tillhjälp av de övriga, i det de konstruerade en geometrisk lärobyggnad, i vilken detta axiom förnekades. Satserna i detta system verka visserligen vid första anblicken i högsta grad paradoxala. Vinkelsumman i en triangel är städse mindre än två räta och mindre, ju större triangelns yta är, så att den rent av kan bli huru liten som helst, blott triangelns yta göres nog stor. Rektanglar existera ej, ej heller likformiga trianglar, som ej äro kongruenta. Det finns räta linjer, som närma sig obegränsat till varandra utan att dock råkas. Ändå orimligare förefaller det system, som sedan konstruerades av Riemann. En triangels vinkelsumma är där städse större än två räta, rektanglar och likformiga, ej kongruenta trianglar existera ej heller. Två räta linjer i ett och samma plan skära varandra alltid, räta linjen är sluten och av ändlig längd. Författarna kunde visa, att några motsägelser i dessa geometriska lärobyggnader ej behövde befaras. Klart är, att dessa läror måste framtvinga en ordentlig grundläggning av geometrien, så att alla bevisgrunder noga blevo framletade.

[1] Vierte Auflage, Berlin und Leipzig 1913. Jag har nu endast haft tillgång till andra upplagan.

KAP. I.

Den euklideiska geometriens grunder enligt Hilbert.

Problemet att uppställa ett system av axiom, som räcker till att bilda grundvalen för den euklideiska geometrien, är, som förut framhållits, ej entydigt bestämt. Det finns många vägar att välja. Har man bestämt sig för att betrakta vissa geometriska begrepp som ursprungliga, vilka således ej definieras, är detta val delvis begränsat. Man torde avlägsna sig minst från Euklides, om man ansluter sig till Hilberts framställning. Vilka begrepp han betraktar som ursprungliga, framgår av hans inledning, som här citeras:

»Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit A, B, C, ...; die Dinge des zweiten Systems nennen wir *Gerade* und bezeichnen sie mit a, b, c, ...; die Dinge des dritten Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit α, β, γ, ...; die Punkte heissen auch die *Elemente der linearen Geometrie*, die Punkte und Geraden heissen die *Elemente der ebenen Geometrie*, und die Punkte, Geraden und Ebenen heissen die *Elemente der räumlichen Geometrie* oder *des Raumes*.

Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie »liegen», »zwischen», »parallel», »kongruent», »stetig»»; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie*.

Die Axiome der Geometrie gliedern sich in fünf Gruppen; jede einzelne dieser Gruppen drückt gewisse zusammengehörige Grundtatsachen unserer Anschauung aus. Wir benennen diese Gruppen von Axiomen in folgender Weise:

I. 1—8. Axiome der Verknüpfung,
II. 1—4. Axiome der Anordnung,
III. 1—6. Axiome der Kongruenz,
IV. Axiome der Parallelen,
V. 1—2. Axiome der Stetigkeit.»

I likhet med Euklides skola vi i det följande ej i onödan använda parallell- och kontinuitetsaxiomen utan uppskjuta deras använding i det längsta.

§ 1. Förknippningsaxiomen (Axiome der Verknüpfung).

Dessa axiom behandla »förenade lägen» av punkter, räta linjer och plan.

I: 1. *Två från varandra skilda punkter A och B bestämma städse en rät linje a eller AB.*

I stället för »bestämma» använda vi en del andra vändningar, exempelvis a »går genom» A och »genom» B, a »förbinder» A och B eller B och A, A »ligger på» a eller är »en punkt på» a. Räta linjerna AB och AC »skära varandra» i A eller ha denna punkt gemensam o. s. v.

I: 2. *Två godtyckliga från varandra skilda punkter på en rät linje bestämma denna räta linje.*

I: 3. *På en rät linje finns det åtminstone två punkter, i ett plan finns det åtminstone tre punkter, som ej ligga i rät linje.*

I: 4. *Tre punkter A, B, C, som ej ligga i rät linje bestämma ett plan α.*

A, B, C sägas »ligga i» planet α o. s. v.

I: 5. *Tre godtyckligt valda punkter i ett plan bestämma planet, om de ej ligga i rät linje.*

I: 6. *Om två punkter A och B på en rät linje a ligga i ett plan α, så ligger varje punkt på a i planet α.*

Räta linjen a »ligger i» planet α o. s. v.

I: 7. *Om två plan α och β ha en gemensam punkt A, så ha de ännu en gemensam punkt B.* (Således en gemensam rät linje *A B*).

I: 8. *Det finns åtminstone fyra punkter, som ej ligga i ett och samma plan.*

Således: Två räta linjer ha en eller ingen gemensam punkt; två plan ha en gemensam rät linje eller ingen gemensam punkt; ett plan och en i detta ej belägen rät linje ha en eller ingen gemensam punkt. Genom en rät linje och en punkt utom denna eller genom två varandra skärande räta linjer går ett enda plan.

§ 2. Anordningsaxiomen (Axiome der Anordnung).

»Die Axiome dieser Gruppe definieren den Begriff »zwischen» und ermöglichen auf Grund dieses Begriffes die Anordnung der Punkte auf einer Geraden, in einer Ebene und im Raume.

Erklärung. Die Punkte einer Geraden stehen in gewissen Beziehungen zueinander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort zwischen dient.»

II: 1. *Om A, B, C äro punkter på en rät linje och B ligger mellan A och C, så ligger också B mellan C och A.*

II: 2. *Om A och C äro punkter på en rät linje, så finns det åtminstone en punkt B, som ligger mellan A och C, och åtminstone en sådan punkt D, att C ligger mellan A och D.*

II: 3. *Av tre punkter på en rät linje ligger alltid en och blott en mellan de båda andra.*

Sammanfattningen av alla punkter mellan *A* och *B* kallas sträckan *AB*. Denna är identisk med sträckan *BA*. *A* och *B* äro sträckans ändpunkter, de övriga inre punkter. Det är dessa vi åsyfta, då vi tala om punkter på sträckan *AB*.

II: 4. *Låt A, B, C vara tre punkter, som ej ligga i rät linje, och a en rät linje i planet ABC, som ej går genom någon av punkterna A, B, C! Om då räta linjen a går genom en punkt på sträckan AB, måste den antingen gå genom en punkt på sträckan BC eller genom en punkt på sträckan AC.*

Det är Pasch, som för första gången uppställt anordningsaxiom i tillräckligt antal.[1] II: 4 härrör från honom. Han uppställde sina axiom i direkt anslutning till åskådningen. Det har sedan lyckats att i väsentlig grad reducera deras antal. Hur abstrakta Hilberts axiom äro, framgår redan därav, att ej fler än fem punkter behöva existera på en rät linje, om II: 4 uteslutes. Dessa fem fordrar II: 2. Vehlen[2] har lämnat följande exempel därpå. För tillfället beteckna vi med symbolen (*ABC*) det förhållande, att *B* ligger mellan *A* och *C*. Vi betrakta följande 20 kombinationer:

(*ABC*), (*BCD*), (*CDE*), (*DEA*), (*EAB*) (*ACE*), (*CEB*), (*EBD*), (*BDA*), (*DAC*)
(*CBA*), (*DCB*), (*EDC*), (*AED*), (*BAE*) (*ECA*), (*BEC*), (*DBE*), (*ADB*), (*CAD*)

Man finner, att för dessa fem punkter, som kunna placeras på en rät linje, anordningsaxiomen II: 1—3 äro giltiga, att *B* ligger mellan *A* och *C*, *D* mellan *A* och *B*, men ej *D* mellan *A* och *C*. Vehlen lämnar på samma ställe ett exempel på en konfiguration av 21 punkter och 21 räta linjer i ett plan med 5 punkter på varje linje och 5 linjer genom varje punkt, för vilken konfiguration I: 1—3 och II: 1—3 gälla, men ej II: 4. Med tillhjälp av detta axiom kunna vi bevisa följande tre satser, som i sin tur utgöra grunden för övriga anordningssatser. Det ligger i sakens natur, att bevisen av dessa satser måste bli synnerligen subtila.

---

[1] Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882.

[2] A system of axioms for geometry, Transactions of the Amer. Math. Society 1904.

Sats 1. Om punkten C ligger mellan A och B och en fjärde punkt D också ligger mellan A och B, ligger D antingen mellan A och C eller mellan B och C.

Vi bevisa först, att, om D ligger mellan A och C, kan den ej samtidigt ligga mellan B och C. Vi välja E utom den räta linjen AB (I: 3) och punkten G på räta linjen AE, så att A ligger på sträckan EG (II: 2). Då kan ej G ligga mellan A och E (II: 3). Använd II: 4 på triangeln AEC och räta linjen GD, som går genom D på sträckan AC och således måste gå genom en punkt H på sträckan CE, då G ej ligger på sträckan AE. Användes nu II: 4 på triangeln ABE och räta linjen GD, måste denna träffa sträckan BE i en punkt F, då den enligt vår förutsättning råkar sträckan AB i D, men ej skär sträckan AE. G, D, H, F ligga i rät linje. Om nu D låge mellan B och C, skulle HF råka de tre sträckorna BE, CE, BC, vilket strider mot II: 4.

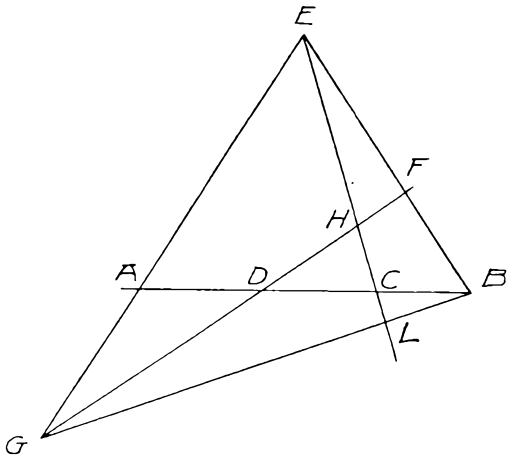

Fig 1.

Ligga C och D mellan A och B, kunna vi således antaga, att D ej ligger mellan B och C, och skola bevisa, att den måste ligga mellan A och C. Vi behålla konstruktionerna i förra delen av beviset. Att GD skär sträckan BE i en punkt F, är då bevisat. Eftersom D ej ligger mellan B och C, men F mellan B och E, måste räta linjen DF eller GD råka sträckan EC i en punkt H (II: 4 använd på triangeln BCE). GH eller GD, som träffar sträckan EC i H, men ej skär sträckan AE, råkar således sträckan AC i en punkt, som är D. Satsen är bevisad.

Sats 2. Ligger C mellan A och B och D mellan A och C, ligger också D mellan A och B.

Detta bevis är ännu kitsligare än det förra. Vi välja G och E som förut och måste då erkänna existensen av punkten H på räta linjen GD och på sträckan CE. Att D ligger mellan G och H lär oss II: 4, tillämpad på räta linjen AB och triangeln GEH. Linjen CE skär nu sträckan AB, men ej sträckan AG; således måste den råka sträckan BG i en punkt L. AB skär sträckan GH i D, men träffar ej sträckan GL; således träffar den sträckan LH i en punkt, som är C. Betrakta nu triangeln BCL och räta linjen GD eller GH! Eftersom varken G ligger på sträckan BL, ej heller H på sträckan CL, ligger ej heller D på sträckan BC. Men då är saken klar. Räta linjen DH eller GD måste då skära sträckan BE i en punkt F, och då är det tydligt, att D ligger på sträckan AB. Svårigheten var således att bevisa, att D ej låg mellan B och C[1].

Sats 3. Om D ligger mellan A och C och C mellan D och B, ligger också D mellan A och B.

Den, som ordentligt genomgått föregående två bevis, torde med lätthet bevisa denna sats. Vi sammanfatta de tre satserna i följande, som med lätthet kan bevisas:

Äro fyra punkter vilka som helst givna på en rät linje, kan man alltid beteckna dessa med A, B, C, D på sådant sätt, att B ligger mellan A och C och mellan A och D, C mellan A och D och mellan B och D. Punkterna på en rät linje äro oändligt många.

Punkterna B och C sägas ligga *på samma sida* om A, därest A ej ligger mellan B och C. I motsatt fall sägas B och C ligga på ömse sidor om A eller på var sin sida om A. Föregående sats kan då formuleras på följande sätt:

Sats 4. Om punkten C ligger mellan A och B, består sträckan AB av sträckorna AC och BC, som endast ha C som gemensam punkt. Ligga B och C samt B och D på samma sida om A på räta linjen AB, ligga även C och D på samma sida om A. Ligga B och C samt B och D på motsatta

[1] Dessa bevis äro modifikationer av dem, som E. H. Moore lämnat i Transactions of the Americ. Math. Society 1902.

sidor om A, ligga även då C och D på samma sida om A. Ligga däremot B och C på samma, men B och D på motsatta sidor om A, ligga C och D på motsatta sidor om A.

Följande definition införes: Om en rät linje a i ett plan α och två punkter A och B, som ej ligga på a, äro givna i detta plan, ligga A och B på *var sin sida* om a, ifall sträckan AB och räta linjen a ha en gemensam punkt. I annat fall sägas de ligga på *samma sida* om a.

Med hjälp av II : 4 bevisas utan svårighet följande sats:

Sats 5. Ligga i planet α punkterna A och B samt A och C på samma sida om räta linjen a, ligga även B och C på samma sida om henne. Ligga A och B samt A och C på var sin sida om a, ligga även då B och C på samma sida. Ligga däremot A och B på samma, men A och C på motsatt sida om a, ligga B och C på motsatt sida om a.

Sammanfattningen av de punkter på en rät linje AB, som ligga på samma sida om A, kallas *vinkelbenet* AB. Ligger A mellan B och B', innehålla vinkelbenen AB och AB' samtliga punkter på räta linjen AB. Vinkelbenet BA däremot innehåller samtliga punkter på sträckan AB och vinkelbenet AB'. Vinkelbenet AD säges ligga *mellan* vinkelbenen AB och AC, om en rät linje BC, som skär dessa senare två vinkelben i B och C respektive, skär vinkelbenet AD i en punkt D, som ligger mellan B och C. Så fort så är förhållandet med en enda rät linje BC, inträffar det tydligen för varje rät linje, som träffar vinkelbenen AB och AC i två godtyckliga punkter B' och C'. (Använd II : 4 på trianglarna BCB' och $B'CC'$.) Vi formulera nu följande sats, som Euklides i ett flertal bevis använder utan att uttala:

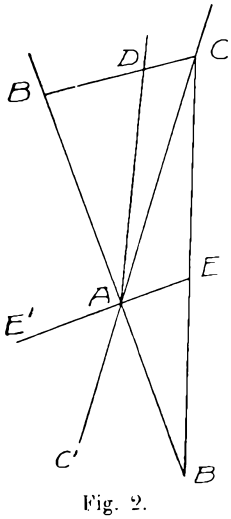

Fig. 2.

Sats 6. Varje vinkelben AD, som ligger mellan två vinkelben AB och AC, har den egenskapen, att var och en av dess punkter ligga på samma sida om räta linjen AB som punkten C och på samma sida om AC som B. Omvänt, varje punkt, som har dessa senare egenskaper, tillhör ett vinkelben AD, som ligger mellan vinkelbenen AB och AC.

Vad den förra delen av satsen beträffar, är den redan så gott som bevisad. Enligt antagandet skulle ju på vinkelbenen AB och AC finnas punkter B och C, en på vardera, så att sträckan BC och vinkelbenet AD ägde en gemensam punkt. C och D ligga således på samma sida om räta linjen AB. Är D' en annan punkt på vinkelbenet AD, ligga ju D och D' på samma sida om A, således på samma sida om räta linjen AB. Då såväl C och D som D och D' ligga på samma sida om AB, ligga även D' och C på samma sida om AB (sats 5). På samma sätt visas, att B och D' ligga på samma sida om räta linjen AC.

Antaga vi nu, att C och D ligga på samma sida om räta linjen AB och B och D på samma sida om AC, kunna vi först och främst bevisa, att räta linjen AD måste skära sträckan BC. Är nämligen B' en sådan punkt på räta linjen AB, att B och B' ligga på var sin sida om A, måste linjen AD råka en av sträckorna BC eller $B'C$ (II : 4). Råkade den $B'C$ i E, måste varje punkt på vinkelbenet AE ligga på samma sida om räta linjen AC som B', således ej på samma sida som B, då ju B och B' ligga på motsatta sidor om AC. D kan således ej tillhöra vinkelbenet AE. Att den ej kan tillhöra det vinkelben AE', som tillsammans med vinkelbenet AE utgör hela räta linjen AE, är klart, ty E och C ligga på samma, men E och E', således också E' och C, på motsatta sidor om räta linjen AB. Räta linjen AD råkar således sträckan BC i en punkt D'. Att punkten D måste ligga på vinkelbenet AD', är ju då klart, ty om ej D och D' låge på samma sida om AB, d. v. s. på samma sida om A, skulle D och C ligga på motsatta sidor om AB, då D' och C ligga på samma sida (sats 5). Men enligt antagandet ligga D och C på samma sida om AB. D ligger således på vinkelbenet AD', d. v. s. vinkelbenen AD och AD' sammanfalla. Vinkelbenet AD ligger således mellan vinkelbenen AB och AC, ty så är ju förhållandet med vinkelbenet AD'.

De anordningssatser, som behövas för den plana geometrien, äro nu formulerade. Vi övergå till dem, som behövas för den tredimensionala geometrien. Punkterna A och B sägas ligga på

olika sidor om planet α, om sträckan AB och planet α ha en gemensam punkt. I annat fall sägas de ligga på samma sida om α. Den del av ett plan α, som ligger på samma sida om räta linjen a eller AB som den utom a belägna punkten C, kunna vi kalla halvplanet aC (ABC eller BAC). Ett halvplan aC säges ligga mellan två halvplan aA och aB, om sträckan AB och halvplanet aC ha en gemensam punkt. Följande sats bevisas på samma sätt som de föregående.

Sats 7. Ligga punkterna A och B samt A och C på samma sida om planet α, ligga också punkterna B och C på samma sida om α. Ligga såväl A och B som A och C på motsatta sidor om α, ligga B och C på samma sida. Ligga däremot A och B på samma, men A och C på motsatt sida om α, ligga B och C på motsatt sida om α. Varje halvplan aC, som ligger mellan halvplanen aA och aB har den egenskapen, att var och en av dess punkter ligger på samma sida om planet aA som punkten B och på samma sida om aB som A. Omvänt, varje punkt, som har dessa senare egenskaper, tillhör ett halvplan, som ligger mellan halvplanen aA och aB.

Det bör observeras, att vinkelben från samma punkt och i samma plan och halvplan från samma räta linje ej satisfiera alla axiomen II : 1—3 (ej hela II : 3). Däremot gälla satserna 1, 2, men ej nödvändigt sats 3.

Nu ha vi samlat alla behövliga anordningssatser. Att Euklides stöder sig på motsvarande anordningssatser, är ju alldeles tydligt. Speciellt använder han mycket ofta sats 6 (I : 16 o. s. v.).

§ 3. Den projektiva geometrien.[1]

Ovan anförda axiom brukar man sammanfatta under benämningen de grafiska axiomen. Med deras tillhjälp kan en lång serie av satser bevisas, först och främst följande intressanta sats:

Desargues' sats. Om två trianglar ABC och $A'B'C'$ äro så belägna, att räta linjerna AA', BB', CC' gå genom samma punkt P, och om räta linjerna AB och $A'B'$, AC och $A'C'$, BC och $B'C'$ skära varandra i D, E, F respektive, skola dessa tre punkter ligga i rät linje. Omvänt, om dessa tre par av räta linjer skära varandra i de tre punkterna D, E, F respektive, som ligga i rät linje, går CC' genom snittpunkten P till AA' och BB'.

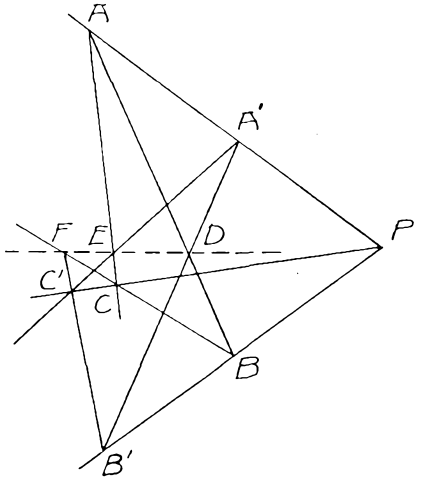

Fig. 3.

Den förra delen av satsen är självklar, om trianglarna ej ligga i samma plan, ty då ligga D, E, F på snittlinjen mellan planen ABC och $A'B'C'$. Omvändningen är också klar, ty då komma de tre linjerna AA', BB', CC' fram som snittlinjerna mellan de tre plan, som gå genom AB och $A'B'$, AC och $A'C'$, BC och $B'C'$ respektive.

Ligga trianglarna i samma plan, vore satsens första del likaledes bevisad, om man kunde finna två punkter S och S' och en triangel $A_2B_2C_2$, så att SA_2 går genom A och $S'A_2$ genom A', SB_2 genom B och $S'B_2$ genom B' o. s. v. Då kunde man nämligen tillämpa satsen på trianglarna ABC och $A_2B_2C_2$, $A'B'C'$ och $A_2B_2C_2$. Med andra ord, punkterna D, E, F komma att ligga på snittlinjen mellan planen ABC och $A_2B_2C_2$. Nu är emellertid tydligt, att hur än S och S' väljas på en rät linje genom P, måste SA och $S'A'$ ligga i ett och samma plan, likaledes SB och $S'B'$ samt SC och $S'C'$. Finge man stödja sig på parallellaxiomet, vore det synnerligen enkelt att välja S och S' så, att dessa tre par av räta linjer skära varandra i tre punkter, A_2, B_2, C_2 respektive. Men det går även utan parallellaxiomet genom att stödja sig på II : 4.

Det är för det första tydligt, att om alla tre punktparen AA', BB', CC' på var sin räta linje genom punkten P ligga på samma sida om denna punkt, räta linjerna SA och $S'A'$ skära var-

[1] Denna paragraf kan förbigås, då dess innehåll ej fordras för begripandet av framställningen i övrigt.

andra i en punkt A_2, SB och $S'B'$ i B_2, SC och $S'C'$ i C_2, hur än S och S' valts, om blott P ligger mellan S och S' på räta linjen SS'[1]. Ligga för det andra alla tre punktparen AA', BB', CC' på var sin sida om P, välja vi S och S' på en rät linje genom P och på samma sida om P. Det är nu lätt att inse, att A_2, B_2, C_2 existera. Skulle för det tredje A och A' ligga på var sin sida om P, men de båda andra punktparen på samma sida, välja vi S efter behag, A_2 på räta linjen AS, så att A ligger mellan S och A_2. Då måste räta linjen $A'A_2$ skära linjen SP i en punkt S', så att P ligger mellan S och S'. SA och $S'A'$ skära varandra således i A_2. Men eftersom S och S' ligga på var sin sida om P, B och B' på samma sida om P, skära SB och $S'B'$ varandra i en punkt B_2. Av samma skäl existerar även snittpunkten C_2 mellan SC och $S'C'$. Ligger för det fjärde A och A' på samma sida om P, välja vi S efter behag och S' på räta linjen SP på samma sida om P som S, så att S' och A' komma på var sin sida om räta linjen SA. Då skäres denna senare alltid av linjen $S'A'$. Snittpunkten B_2 mellan SB och $S'B'$ existerar alltid, ty B och B' ligga på var sin sida om P, men S och S' på samma sida om P. Nu äro alla fall behandlade. Det är således alltid möjligt, att, sedan S valts efter behag utom trianglarnas plan, på räta linjen SP välja en punkt S', så att SA och $S'A'$ skära varandra i A_2, SB och $S'B'$ i B_2, SC och $S'C'$ i C_2. Satsens förra del är bevisad.

Satsens senare del bevisas indirekt. Vi veta, att D, E, F ligga i rät linje, och skola bevisa, att räta linjen CC' går genom snittpunkten P mellan AA' och BB'. Om så ej vore förhållandet, beteckna vi med C'' snittpunkten mellan räta linjerna CP och $B'F$ och tillämpa den förra delen av satsen på trianglarna ABC och $A'B'C''$. AB och $A'B'$ skära varandra i D, BC och $B'C''$ i F. Då måste $A'C''$ gå genom snittpunkten E mellan AC och DF. Men genom denna går även $A'C'$. $A'C'$ och $A'C''$ måste sålunda sammanfalla, då de bestämmas av A' och E.

Detta bevis vilar på förutsättningen, att räta linjerna CP och $B'F$ verkligen råka varandra. Projiciera vi vår plans figur från en punkt O utom trianglarnas plan, motsvaras varje punkt A i den plana figuren av en rät linje a genom O och varje rät linje AB i den plana figuren av ett plan ab genom O. Det indirekta beviset kan föras i den av räta linjer och plan genom O bestående figuren på samma sätt som i den plana figuren. Men planen OCP och $OB'F$ skära varandra alltid längs en rät linje c''. Denna bevisas nu sammanfalla med räta linjen c', d. v. s. OC'.

Desargues' sats, som således lätt bevisats genom att i det tredimensionala rummet utföra enkla konstruktioner, kan däremot endast med stor svårighet visas vara riktig, om man endast får röra sig i det för de båda trianglarna gemensamma planet. Hilbert[2] har visat, att varje sådant bevis måste förutsätta bekantkap med vissa kongruenssatser. Men även med deras tillhjälp är beviset långt ifrån enkelt, utan blir tvärtom i hög grad komplicerat.

Trianglar med de egenskaper, som Desargues' sats fordra, kallas perspektiva trianglar. Projicieras två perspektiva trianglar i samma plan från en punkt utom detta plan, erhålla vi en figur, som vi kunna anse bestå av två »perspektiva trekanter». Deras homologa kantlinjer ligga parvis i tre plan genom samma räta linje, och deras homologa sidoplan skära varandra i tre räta linjer, som ligga i samma plan. Varje plan figur motsvaras för övrigt av en figur i en punkt O, så att tre punkter på en rät linje a i planet svara mot tre räta linjer i det mot a svarande planet α. Två punkter A och B i planet ha en enda förbindelselinje AB; de motsvarande räta linjerna a och b i O ha ett enda förbindelseplan ab. Under det att däremot två plan α och β i O alltid ha en enda snittlinje c, behöva de α och β motsvarande räta linjerna a och b i planet ej ha någon snittpunkt C. Finns en sådan, finns ju emellertid endast en. Figuren i O har således fullkomligare egenskaper än den motsvarande plana.

Sådana fullkomligare egenskaper kunna vi frampressa i planet genom att på lämpligt sätt utvidga begreppen punkt och rät linje. Givet är planet α och en en punkt O utom denna. Mot en rät linje a genom O svarar ibland en punkt A i α, snittpunkten mellan a och α. Existerar

[1] Läsaren bör själv rita figurer.
[2] Se hans »Grundlagen».

ej denna snittpunkt, existera dock i α en oändlig mängd räta linjer p, som äro snittlinjer mellan planet α och planen π genom a. Vi säga, *att alla dessa räta linjer p gå genom en och samma oegentliga punkt A. Oegentliga punkter A, B, C sägas ligga på samma räta linje, om de motsvarande räta linjerna a, b, c genom O ligga i ett och samma plan β.* Skär detta plan planet α i en rät linje, ligga A, B, C på en egentlig rät linje. Om ej, ligga de på en oegentlig rät linje.

Vi skola nu genom en plan konstruktion bestämma den räta linje c, som går genom en egentlig punkt C i planet α och den oegentliga punkt, som bestämmes av de i α belägna, varandra ej skärande räta linjerna a och b. Välj punkten A på a och punkten B på b efter behag samt A' på a och B' på b, så att de två senare punkterna ligga på var sin sida om linjen AB! Då skära linjen AB och sträckan $A'B'$ varandra i en punkt D. Välj på linjen AC punkten E så, att D och E ligga på var sin sida om linjen BC! Då skär räta linjen BC sträckan DE i en punkt F. Tillämpa II: 4 på triangeln $A'DE$ och räta linjen $B'F$! Denna räta linje måste råka sträckan $A'E$ i en punkt C', ty den råkar sträckan DE, men ej sträckan $A'D$. Räta linjen CC' är den sökta.

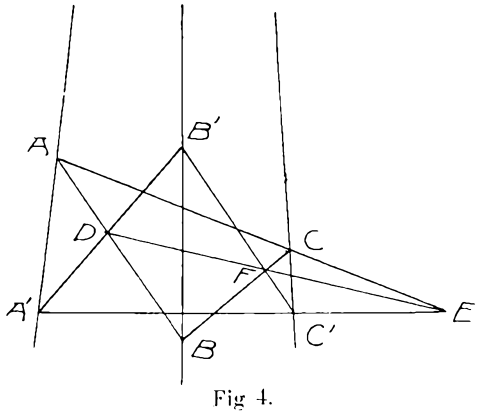

Fig. 4.

AB och $A'B'$ skära varandra i D, AC och $A'C'$ i E, BC och $B'C'$ i F, och de tre punkterna D, E, F ligga i rät linje. Projicieras figuren från en punkt O' utom α, få vi således två perspektiva trekanter. De mot AA', BB' och CC' svarande planen i O' gå således genom samma räta linje, den mot den oegentliga snittpunkten mellan a och b svarande räta linjen genom O'. Gå därför de tre räta linjerna a, b, c genom en och samma oegentliga punkt, svarande mot räta linjen p genom den först givna punkten O, gå också planen $O'a$, $O'b$, $O'c$ genom en och samma räta linjen p', hur än O' är vald utom α. Punkten O spelar därför ingen roll framför andra punkter utom a. Detta ådagalägges tydligt, om vi genom en plan konstruktion lösa följande problem:

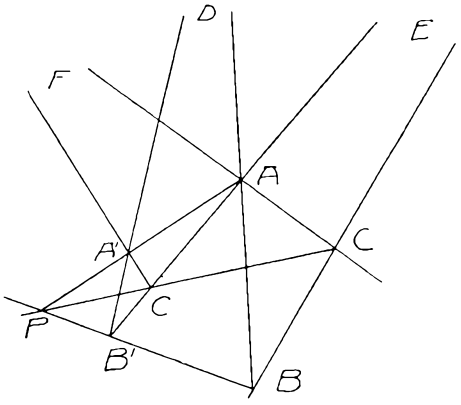

Fig. 5.

Givna äro i planet α räta linjerna AB, AF, BE, $C'F$, $C'E$, där A, B, C' äro egentliga punkter, E och F oegentliga. Bestäm snittpunkten D mellan räta linjerna AB och EF genom en egentlig rät linje, som skär AB i D!

AF och BE skära varandra i den egentliga eller oegentliga punkten C. Välj på räta linjen $C'C$, som alltid kan konstrueras som i föregående problem, om C är oegentlig, punkten P så, att P och A ligga på ömse sidor om linjen $C'F$. Denna skäres då av linjen PA i en egentlig punkt A'. PB och $C'E$ skära varandra i B', som får vara oegentlig. $A'B'$ är då den egentliga räta linje, som skär AB i D.

Projiciera vi nämligen figuren från vår punkt O, motsvaras »trianglarna» ABC och $A'B'C'$ av perspektiva trekanter. Därför ligga OD, OE, OF i rät linje. Väljes en annan punkt O', visas på samma sätt, att $O'D$, $O'E$, $O'F$ ligga i rät linje. Det är således till fullo ådagalagt, att den utvidgning av begreppen punkt och rät linje, som vi företogo med tillhjälp av punkten O, är så beskaffad, att om de egentliga eller oegentliga punkterna A, B, C i planet α ligga på en egentlig eller oegentlig rät linje, ligga linjerna $O'A$, $O'B$, $O'C$ i samma plan, hur än O' tages. Det är vidare visat, att om de egentliga räta linjerna a, b, c gå genom samma egentliga eller oegentliga punkt, gå planen $O'a$, $O'b$, $O'c$ genom samma räta linje. Bevisen stödde sig på Desargues'

sats. Det är klart, att dessa bevis kunna utföras, även om någon eller några av a, b, c äro oegentliga.[1]

Våra konstruktioner bli särdeles intressanta, om de behandlas från parallellteoriens ståndpunkt. Det är tydligt, att problemet att draga en parallell till linjen a genom en punkt A kan lösas med linjalen ensam, om en parallellogram är given. Det är också tydligt, att om parallellaxiomet nu infördes, skulle våra oegentliga punkter bli just punkterna på oändlighetslinjen, den enda oegentliga räta linje, som då existerade i ett plan. Antages däremot ej parallellaxiomet, ha vi dock visat, att det är möjligt att utvidga begreppen punkt och rät linje, så att samma effekt åstadkommes, som då oändlighetspunkterna och oändlighetslinjen adjungeras, nämligen att två räta linjer i ett plan alltid få en snittpunkt.

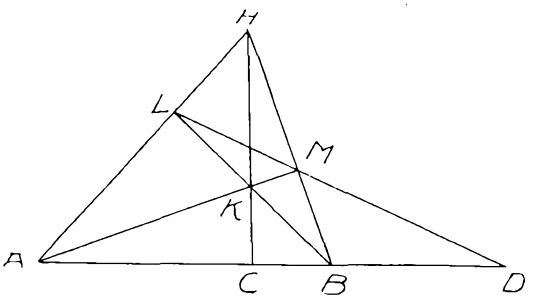

Fig. 6.

Innan vi lämna Desargues' sats, är det av intresse att betrakta vidstående fullständiga fyrsiding $HLKM$, vars sidor HL och KM gå genom A, HM och KL genom B, under det att diagonalerna HK och LM på den tredje diagonalen AB utskära C och D. Punktparen AB och CD kallas som bekant harmoniska. Äro A, B, C bestämda, är också D fullt bestämd, ty gå $H'L'$ och $K'M'$ genom A, $K'H'$ genom C, $K'L'$ och $H'M'$ genom B, måste $L'M'$ gå genom D av följande skäl. Emedan homologa sidor i trianglarna HLK och $H'L'K'$ skära varandra i A, B, C, gå HH', LL' och KK' genom samma punkt P. Men även i trianglarna KMH och $K'M'H'$ skära homologa sidor varandra i A, B, C. Således går också MM' genom snittpunkten P mellan HH' och KK'. Då nu både LL', KK' och MM' gå genom P, skära homologa sidor i trianglarna LKM och $L'K'M'$ varandra i tre punkter, som ligga i rät linje. Två av dessa äro A och B. Den tredje är således D, som därför är entydigt bestämd av fyrsidingen $HLKM$.

Nu kan teorien för harmoniska punkter och harmoniska element i ett knippe över huvud taget utvecklas. Särskilt intressant blir följande konstruktion. O, E_1, U äro givna punkter på en rät linje. De projicieras från S i O', E'_1, U' på en annan rät linje genom U', från S' på SU i punkterna E'_1, E'_2, U'. E'_2 projicieras från S i E_2. Tydligen äro OE_2 och E_1U harmoniska punktpar. Ur E_1, E_2 och U konstrueras E_3 på samma sätt som E_2 ur O, E_1 och U. Denna konstruktion kan fortsättas hur länge som helst. Alla E falla på sträckan OU. Det kan med de hittills anförda axiomen ej bevisas, att punkterna E_n hopa sig vid U. Göra vi detta antagande och fortsätta konstruktionen genom att draga $E_nE'_1$, som skär OS i S_n, S_nE_1, som skär $O'U$ i E'_{1_n} och slutligen SE'_{1_n}, som skär OU i E_{1_n}, är det dels tydligt, att man i detta nät kan konstruera punkten E med godtyckligt vald rationell index, dels kan det bevisas, att åt de punkter på sträckan OU, som ej bli behäftade med rationell index, kan ges ett fullt bestämt positivt irrationellt tal till index. Dessa indices kunna betraktas som koordinater för punkterna på sträckan OU. Är X en punkt på räta linjen OU, som ej ligger på sträckan OU, ligger den fjärde harmoniska punkten E_μ till O, U, X på denna sträcka och får således en fullt bestämd koordinat μ. Vi ge X koordinaten $-\mu$. Varje punkt på räta linjen OU får således ett fullt bestämt tal till koordinat, så att aldrig två punk-

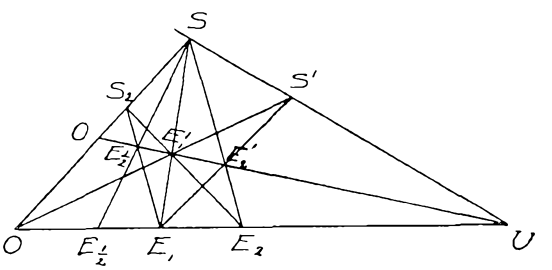

Fig. 7.

[1] Även begreppet plan kan på lämpligt sätt utvidgas, så att förknippningsaxiomen fortfara att vara giltiga, och så att dessutom två plan eller en rät linje och ett plan ständigt råkas.

ter få samma koordinat. Det intressanta i saken är således, att koordinater på en rät linje och därmed också i planet och det tredimensionala rummet kunna införas oberoende av måttbegreppet, endast med hjälp av Desargues' sats. Naturligtvis har detta förfarande här endast skisserats. En utförlig framställning fordrar ett betydande utrymme. Det kan tilläggas, att ekvationerna för räta linjer och plan bli av första graden, och att hela den rena projektiva geometrien nu kan uppbyggas.

§ 4. Peanos grafiska axiom.[1]

Peano har förmedels räta linjer definierat planet. Hans tillvägagångssätt är av stort intresse, emedan det sätter en i stånd att studera geometrien i rum av hur många dimensioner som helst. Han konstruerar nämligen rum av godtyckligt dimensionstal.

Vi utgå från I: 1—2 och II: 1—3, antaga, att *det gives tre punkter, som ej ligga i rät linje* och ersätta II: 4 med följande axiom: *Äro A, B, C tre punkter, som ej ligga i rät linje, D en punkt på sträckan AB samt E en punkt på sträckan DC, finns det på sträckan BC en sådan punkt F, att E ligger på sträckan AF.* Man kan nu bevisa följande sats: *Äro A, B, C tre punkter, som ej ligga i rät linje, D en punkt på sträckan AB och F en punkt på sträckan BC, ha sträckorna CD och AF en gemensam punkt E.*

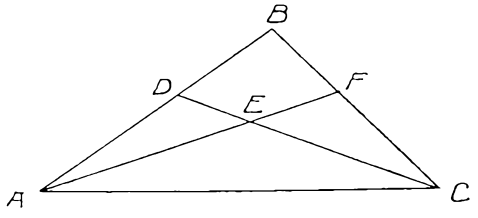

Fig. 8.

Med planet ABC menas sammanfattningen av de punkter, som ligga på räta linjerna i de tre linjeknippen, som gå genom triangelns hörnpunkter, så att en linje i det genom A gående knippet bestämmes utom av A av en punkt på sträckan BC. Dessa tre linjeknippen ha alla punkterna inom och på begränsningen av triangeln ABC gemensamma, men sakna för övrigt gemensamma punkter.

Nu bevisas, att, om D ligger på sträckan AC, planen ABC och ABD sammanfalla, så att varje punkt i det ena planet ligger i det andra planet. Typiskt för detta bevis och samtidigt besvärligast är uppvisandet av följande: Om F ligger på sträckan AB och P är en sådan punkt på linjen DF, att F ligger mellan D och P, tillhör P planet ABC. Enligt definitionen tillhör den ju planet ABD. Tillämpa vi på triangeln ACP det nya axiomet, är det tydligt, att räta linjen AF råkar sträckan CP i en punkt L. Ligger B mellan A och L, skär enligt samma axiom linjen BP sträckan AC i någon punkt, och då tillhör P planet ABC. Ligger L på sträckan AB, vilket är den enda återstående möjligheten, tillhör P en av linjerna CL i knippet genom C, som enligt definitionen tillhöra planet ABC. På motsvarande sätt föres beviset för alla andra lägen av punkten P.

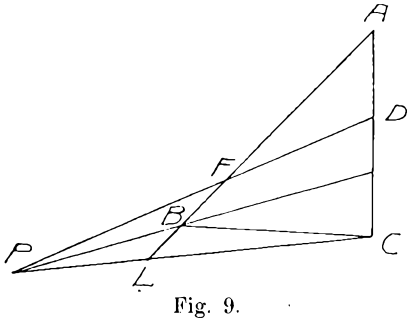

Fig. 9.

Är nu C' en punkt i planet ABC, måste den tillhöra någon av de tre linjeknippena. Antag, att C' ligger på räta linjen BD, där D ligger på sträckan AC. Vi ha bevisat, att planen ABC' och ABD sammanfalla och kunna på samma sätt bevisa, att planen ABD och ABC', således ABC och ABC' sammanfalla. På liknande sätt kunna vi bevisa, att planen ABC' och $AB'C'$ sammanfalla, om B' ligger i planet ABC. Eller: *Ett plan är bestämt av tre sina punkter, vilka som helst, blott dessa ej ligga i rät linje.*

Nu antages som axiom, att *det finns fyra punkter A, B, C, D, som ej ligga i samma plan.* Dessa bestämma ett »rum», som består av sammanfattningen av alla de punkter, som bestämmas av följande fyra system av räta linjer. Det ena består av linjerna genom A och punkterna inom och på begränsningen av triangeln BCD. De tre övriga genom B, C, D bestämmas på liknande

[1] Se Schur, Grundlagen der Geometrie, Berlin und Leipzig 1909.
Denna paragraf innehåller ej något för den följande framställningen nödvändigt och kan därför förbigås.

sätt. På samma sätt som för planet visas, att ett »rum» är bestämt av fyra av sina punkter, vilka som helst, som ej ligga i samma plan. Det är vidare klart, att om en rät linje AB går genom de till planet α hörande punkterna A och B, så tillhör linjen AB helt och hållet detta plan, ty A och B kunna jämte en tredje punkt bestämma detta plan och således tillhör AB enligt definitionen detta plan. Av samma skäl är det klart, att ett plan, som går genom tre av ett »rums» punkter, helt och hållet tillhöra detta plan. Anordningssatserna i § 2 gälla i varje »rum». Nu är det lätt att bevisa, att två plan i samma »rum», som ha en gemensam punkt A, också ha ännu en gemensam punkt B, således en gemensam rät linje.

Finnas nu utom ett »rum» punkter, kan man definiera ett »fyrdimensionalt rum» på samma sätt som ovan ett tredimensionalt och studera de grafiska satserna i ett sådant. Det finnes ingen gräns för antalet dimensioner, som kunna konstrueras, och detta utan att införa andra axiom än sådana, som postulera existensen av punkter utom det rum, som senast undersökts. Det är just detta faktum, som gör Peanos system så intressant. Givetvis är hans definition av planet i och för sig av ej ringa intresse.

§ 5. Kongruensaxiomen.

»Die Axiome dieser Gruppe definieren den Begriff der Kongruenz und damit auch der Bewegung.

Erklärung. Die Strecken stehen in gewissen Beziehungen zueinander, zu deren Beschreibung uns die Worte »kongruent» oder »gleich» dienen.»

III: 1. *Om A och B äro två punkter på en rät linje a och vidare A' en punkt på samma eller på en annan rät linje a', så finns det på varje sida om A' på räta linjen a' en enda punkt B', så att sträckan AB är lika med sträckan $A'B'$ ($AB = A'B'$). Varje sträcka är lika med sig själv ($AB = AB$, $AB = BA$).*

Med andra ord på en rät linje i en given punkt A på denna och på en given sida om A, kan man »avsätta» en enda sträcka, som är lika med en given sträcka.

III: 2. *Om $AB = A'B'$ och $AB = A''B''$, så är $A'B' = A''B''$.*

III: 3. *Om punkten B ligger mellan punkterna A och C samt vidare B' mellan A' och C', och om dessutom $AB = A'B'$ samt $BC = B'C'$, så är också $AC = A'C'$.*

Med tillhjälp av detta axiom kan man bevisa följande viktiga sats: *Är $AB = A'B'$ och $BC = B'C'$ samt ligger B' mellan A' och C' och B och C på samma sida om A på räta linjen AB, ligger B mellan A och C.*

Om ej B ligger mellan A och C, skulle enligt antagandet C ligga mellan A och B. Välj då E så, att B ligger mellan A och E samt $BE = B'C'$! E och C kunna således ej sammanfalla. Enligt III: 3 är $AE = A'C'$, således också $AE = AC$ (III: 2), vilket strider mot III: I. Satsen är då bevisad.

Sträckan AB säges vara större än sträckan $A'B'$, om det finns en punkt C mellan A och B, så att $AC = A'B'$.

Två sträckor äro således antingen lika stora eller också är den ena större än den andra. Beteckna a, b, c tre sträckor och $a > b$ samt $b \geqq c$ gälla, gäller enligt anordningssatserna $a > c$.

Axiomet III: 3 tillåter oss således ej blott att definiera summan av två sträckor utan också skillnaden mellan två sträckor. Ty ligger B mellan A och C samt B' och C' på räta linjen $A'B'$ på samma sida om A' och dessutom $AC = A'C'$, $AB = A'B'$ gälla, måste B' ligga mellan A' och C' och dessutom $BC = B'C'$ gälla. Beteckna a, b, c tre sträckor gälla tydligen $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a + b > b$ och $a > a - b$ (för $a > b$). Eller: *Sträckor äro storheter i Euklides mening, ty begreppen lika sträckor och större sträckor samt summa och skillnad av sträckor äro definierade, och hans storhetsaxiom (1—7, 9) gälla för sträckor.*

Två vinkelben AB och AC sägas bilda vinkeln BAC eller CAB ($\angle BAC$). De mellanliggande vinkelbenens punkter äro vinkelns inre punkter.

»Erklärung. Die Winkel stehen in gewissen Beziehungen zueinander, zu deren Beschreibung uns ebenfalls die Worte kongruent oder »gleich» dienen.»

III: 4. *Om BAC är en given vinkel och $A'B'$ ett givet vinkelben i planet α', finnes i detta plan ett enda vinkelben $A'C'$ på en bestämd sida om räta linjen $A'B'$, så att vinkeln $B'A'C'$ är lika med vinkeln BAC ($\wedge B'A'C = \wedge BAC$). Varje vinkel är lika med sig själv ($\wedge BAC = \wedge BAC$, $\wedge BAC = \wedge CAB$).*

III: 5. *Vinklar, som äro lika med en och samma vinkel, äro lika.*

III: 6. *Om i två trianglar ABC och $A'B'C'$ följande likheter gälla:*

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad \wedge BAC = \wedge B'A'C',$$

gälla också likheterna:

$$\wedge ABC = \wedge A'B'C', \quad \wedge ACB = \wedge A'C'B'.$$

Att det sista axiomet ej kan undvaras, har Hilbert visat i sitt arbete. Med dess tillhjälp kan man lätt visa, att $BC = B'C'$. Vore så ej förhållandet, vore endera större, exempelvis $BC > B'C'$ Då funnes på sträckan BC en punkt D, så att $BD = B'C'$. På trianglarna ABD och $A'B'C$ kan då III: 6 tillämpas, ty $\wedge ABD = \wedge A'B'C'$. Således gällde $\wedge BAD = \wedge B'A'C' = \wedge BAC$, vilken likhet strider mot III: 4, eftersom vinkelbenen AD och AC ligga på samma sida om räta linjen AB. Således gäller, därest vi kalla två trianglar kongruenta, om deras homologa sidor och vinklar äro lika:

Sats 1. (Första kongruensfallet). *Om två sidor och mellanliggande vinkel i en triangel äro lika med motsvarande element i en annan triangel, så äro dessa trianglar kongruenta.*

På det sätt Euklides använder, visas redan nu:

Sats 2. (Första delen av tredje kongruensfallet). *Om två vinklar och mellanliggande sida i en triangel äro lika med motsvarande element i en annan triangel, äro dessa trianglar kongruenta.*

Sats 3. Om två vinklar ABC och $A'B'C'$ äro lika, äro också deras sidovinklar CBD och $C'B'D'$ lika.

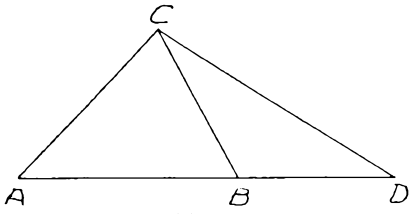

Fig. 10.

Placera punkterna A', C', D' på var sitt av vinkelbenen $B'A'$, $B'C'$, $B'D'$, så att $A'B' = AB$, $C'B' = CB$, $B'D' = BD$. Då är även $AD = A'D'$. Trianglarna ABC och $A'B'C'$ äro kongruenta enligt sats 1; således $\wedge A = \wedge A'$, $AC = A'C'$. Men då äro trianglarna CAD och $C'A'D'$ kongruenta enligt samma sats. Således $\wedge D = \wedge D'$ och $CD = C'D'$. Nu kunna vi tillämpa samma kongruensfall på trianglarna CDB och $C'D'B'$. Således är $\wedge CBD = \wedge C'B'D'$.

Sats 4. Om $\wedge AOB = \wedge A'O'B'$ och vinkelbenet OC ligger mellan vinkelbenen OA och OB, finns det ett enda vinkelben $O'C'$ mellan $O'A'$ och $O'B'$, så att $\wedge BOC = \wedge B'O'C'$. Men även $\wedge AOC = \wedge A'O'C'$.

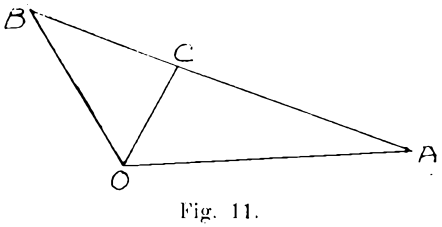

Fig. 11.

Välj A' och B' på vinkelbenen $O'A'$ och $O'B'$ så, att $O'A' = OA$ och $O'B' = OB$. Då äro trianglarna AOB och $A'O'B'$ kongruenta enligt sats 1, således $\wedge B = \wedge B'$, $AB = A'B'$. Vinkelbenet OC skär sträckan AB i punkten C. Välj C' på sträckan $A'B'$, så att $B'C' = BC$. Då äro trianglarna OBC och $O'B'C'$ kongruenta (sats 1), och vinkeln BOC är lika med vinkeln $B'O'C'$. Att $O'C'$ är det enda vinkelbenet på samma sida om räta linjen $O'B'$ som punkten A', således också det enda vinkelbenet mellan vinkelbenen $O'A'$ och $O'B'$, som uppfyller villkoret $\wedge B'O'C' = \wedge BOC$, framgår av III: 4. Den första delen av satsen är sålunda bevisad.

Trianglarna COB och $C'O'B'$ bevisades vara kongruenta. Således är $BC = B'C'$, $OC = O'C'$ och $\wedge BCO = \wedge B'C'O'$, således också $\wedge ACO = \wedge A'C'O'$ (sats 3). Men ur $AB = A'B'$ och $BC = B'C'$ följer $AC = A'C'$. Då äro trianglarna ACO och $A'C'O'$ kongruenta (sats 1), $\therefore \wedge AOC = \wedge A'O'C'$.

Då bevisas med lätthet följande sats.

Sats 5. Om $\wedge AOB = \wedge A'O'B'$, $\wedge BOC = \wedge B'O'C'$ och de tre vinkelbenen OA, OB, OC äro ordnade på samma sätt som vinkelbenen $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$, är $\wedge AOC = \wedge A'O'C'$.

På samma sätt som för sträckor kunna vi nu för vinklar införa begreppen större och mindre och visa, *att även för vinklar de allmänna storhetsaxiomen gälla.*

Vi kalla som vanligt varje vinkel, som är lika stor som sin sidovinkel, för en rät vinkel. Vi kunna nu bevisa det euklideiska axiomet:

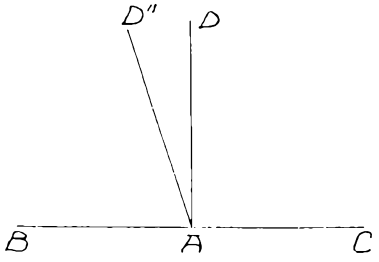

Fig. 12.

Sats 6. Alla räta vinklar äro lika stora.

Antagande: $\wedge BAD = \wedge CAD$ och A mellan B och C samt $\wedge B'A'D' = \wedge C'A'D'$ och A' mellan B' och C'.

Om då $\wedge BAD$ ej vore lika med $\wedge B'A'D'$, välja vi vinkelbenet AD'' på den sida om BC i planet ABD, som D tillhör, så att $\wedge BAD'' = \wedge B'A'D'$. Då måste AD'' antingen falla mellan vinkelbenen AB och AD eller AC och AD (II: 4). Antag, att AD'' ligger mellan AB och AD. Då ligger tydligen AD mellan AD'' och AC. Eftersom vi nu kunna betrakta våra vinklar som storheter, kunna vi med strängt fasthållande vid våra definitioner uttala följande olikheter:

$$\wedge CAD'' > \wedge CAD = \wedge BAD > \wedge BAD''.$$

Men vi veta, att $\wedge BAD'' = \wedge B'A'D'$, således $\wedge CAD'' = \wedge C'A'D'$ (sats 3), och eftersom $\wedge B'A'D' = \wedge C'A'D'$, är således $\wedge BAD'' = \wedge CAD''$, vilken likhet strider mot olikheten, som vi nyss bevisade. Således kan ej vinkelbenet AD'' falla mellan vinkelbenen AB och AD. På samma sätt bevisa vi, att det ej kan falla mellan AC och AD. AD'' och AD sammanfalla sålunda, och satsen är bevisad. Vi ha då också bevisat, att i punkten A på räta linjen a finnes i planet α genom a högst en normal, som går genom A.

Sats 7. Om två sidor i en triangel äro lika stora, så äro de motstående vinklarna lika stora, och om två vinklar äro lika stora, äro de motstående sidorna lika stora.

Är $AB = AC$, så är triangeln ABC kongruent med sig själv, så att A motsvarar sig själv, B och C motsvara varandra (1:a kongruensfallet). Medels 3:dje kongruensfallet visas, att den på samma sätt är kongruent med sig själv, om två vinklar äro lika.

Sats 8. (Andra kongruensfallet.) *Trianglarna ABC och $A'B'C'$ äro kongruenta, om $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ och $BC = B'C'$.*

Välj i planet ABC vinkelbenet AC'', så att C och C'' falla på var sin sida om räta linjen AB och $\wedge C''AB = \wedge C'A'B'$, samt gör $AC'' = A'C' = AC$. Då äro trianglarna ABC'' och $A'B'C'$ kongruenta. Sträckan CC'' skär räta linjen AB i en punkt D. Enligt sats 7 är $\wedge DCA = \wedge DC''A$ och $\wedge DCB = \wedge DC''B$. Enligt sats 5 är då, huru än D må ligga på räta linjen AB, $\wedge ACB = \wedge AC''B = \wedge A'C'B'$. Trianglarna ACB och $A'C'B'$ äro således kongruenta enligt 1:a kongruensfallet.

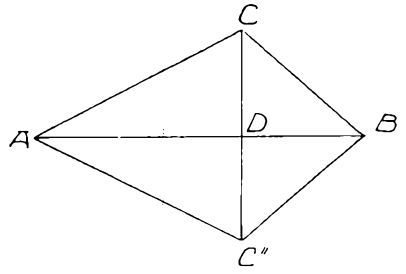

Fig. 13.

§ 6. Euklides I: 1—28.

En del av de satser, som påträffas i Euklides' första bok, äro redan bevisade. Nu gäller det först och främst att ta itu med de viktigaste av hans problem. Såsom redan förut anmärkts, äro de euklideiska problemen att betrakta som existensbevis, ej som praktiska konstruktioner.

Först visa vi, att *på varje sträcka AB i varje plan α genom linjen AB en likbent triangel existerar.* Drag genom A i α en rät linje och välj på denna en punkt C efter behag. Är nu $\wedge CAB = \wedge CBA$, är uppgiften löst. Om ej, så är en större, exempelvis $\wedge CAB > \wedge CBA$. Då finnes mellan vinkelbenen AB och AC ett vinkelben AD, som skär sträckan BC i D, så att $\wedge DAB = \wedge CBA = \wedge DBA$. Triangeln DAB är då den begärda (sats 7).

För att konstruera mittpunkten på sträckan AB, upprita vi i samma plan två likbenta trianglar DAB och $D'AB$, så att D och D' falla på var sin sida om räta linjen AB. Linjerna DD' och AB skära varandra i punkten E. Det är lätt att bevisa likheten $AE = BE$. Att E

ligger på sträckan AB är klart, ty eljes skulle »delen vara lika med det hela». Att på sträckan AB endast *en* mittpunkt existerar, bevisas likaledes utan svårighet.

Vinkeln BAC delas mitt itu på följande sätt: Gör $AB = AC$ och dela sträckan BC mitt itu i D! Räta linjen AD är den sökta bisektrisen. Endast en bisektris existerar.

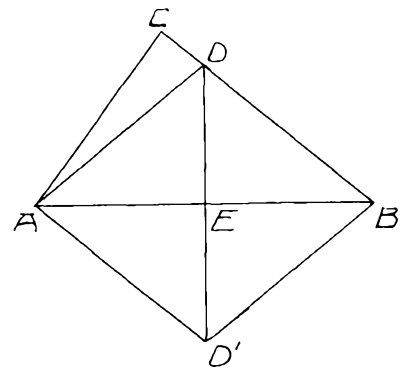

Fig. 14.

Normalen till räta linjen a i punkten E på a och i planet α genom a konstrueras så: Avsätt på a de lika stora sträckorna EA och EB! Upprita i α en likbent triangel DAB! DE är då den sökta normalen. Att en enda sådan existerar, har redan förut visats.

Normalen från D utom räta linjen a mot denna linje konstrueras på följande sätt: Välj på a punkterna A och B efter behag! Gör $\angle D'AB = \angle DAB$, så att vinkelbenet AD' kommer i planet ABC på motsatt sida om a som vinkelbenet AD. Sträckan DD' skär a i punkten E. DE är den sökta normalen. Att endast en normal till a kan dragas genom D, följer av Euklides I : 16, vars bevis ej förutsätter denna konstruktion. Vi kunna för övrigt bevisa den, då den är ett lämpligt exempel på hur Euklides' bevis lätt kunna göras stränga med hjälp av satserna i § 2.

Vi skola bevisa, att vinkeln ACB i triangeln ACB är mindre än samma triangels yttervinkel CBD.

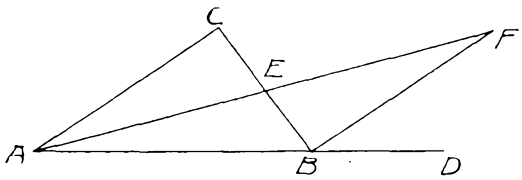

Fig. 15.

E är mittpunkten av sträckan BC, E ligger mellan A och F och $AE = EF$. Då är det tydligt, att $\angle EBF = \angle ACB$. Det gäller att bevisa, att vinkelbenet BF ligger mellan vinkelbenen BC och BD. Enligt sats 6, § 2 räcker det att visa, att punkterna C och F ligga på samma sida som linjen BD, vilket är tydligt, då båda ligga på samma sida om AB som punkten E, och att F och D ligga på samma sida om linjen BC, vilket likaledes är tydligt, eftersom båda ligga på motsatt sida om BC som A. Satsen är sålunda strängt bevisad.

Vi sammanfatta resultatet av våra konstruktioner i följande sats.

Sats 1. En sträcka har en enda mittpunkt, en vinkel en enda bisektris. Från en punkt A kan fällas en enda normal mot räta linjen a, om A ligger utom a. Ligger A på a, går genom A en enda normal i varje plan, som går genom a.

I: 15 är en omedelbar följd av satsen om lika stora vinklars sidovinklar. Euklides' bevis för övriga satser bland I: 1—28 behöva på sin höjd förbättras ungefär som beviset för I: 16. Dock måste vi lägga märke till, att de konstruktioner, som utföras i prop. 1 o. 22 fordra existensen av snittpunkter till två cirklar. De äro därför ännu ej med våra hjälpmedel utförbara.

Sats 2. Satserna 1—28 i Euklides första bok följa ur hittills anförda axiom. Uteslutande med deras hjälp äro emellertid ej problemen 1 o. 22 lösbara.

Längre kunna vi ej komma med första bokens satser utan parallellaxiomet.

§ 7. Satserna i Euklides' 3:dje bok.

Även en stor del av satserna i Euklides' 3:dje bok äro oberoende av parallellaxiomet. Efter det föregående kan man yttra sig mycket kort om dessa. Cirkeln definieras naturligtvis som orten för punkter, som ligga lika långt från en given punkt, cirkelns medelpunkt. Utan denna punkt existerar ej cirkeln, och problemet III: 1 är därför egentligen meningslöst. Att lägga en cirkel genom tre givna punkter är däremot ej ett meningslöst problem, som dock kan sakna lösning, om parallellaxiomet negeras. Lösningen av problemet III: 17 är däremot oberoende av parallellaxiomet, men som konstruktionen begagnar snittpunkten mellan en rät linje och en

cirkel, kan den ej för närvarande utföras av oss. De övriga satserna bland prop. III: 1—19 bevisas på samma sätt som i Euklides utan några väsentliga modifikationer. De övriga bero av parallellaxiomet, d. v. s. de äro falska, om detta förnekas.

§ 8. Kongruenssatser i det tredimensionala rummet.

Sats 1. (Euklides XI: 4 och 5). Om räta linjen AB är vinkelrät mot räta linjerna AC och AD, är den också vinkelrät mot varje rät linje AE i planet ACD. Är omvänt räta linjen AB vinkelrät mot de tre räta linjerna AC, AD och AE, ligga dessa tre räta linjer i samma plan.

Beviset är det euklideiska eller det, som Josephson lämnat i sin bekanta lärobok i rymdgeometri, och förbigås därför. Definieras nu normalplan till en rät linje på sedvanligt sätt, och observeras det vidare, att snittlinjen mellan de plan α och β, som i punkten A äro normalplan till räta linjerna AB och AC, är normal till planet ABC, inses riktigheten av följande:

Sats 5. Varje rät linje har i var och en av sina punkter att enda normalplan, och varje plan har i var och en av sina punkter en enda normal.

Nu kunna vi bevisa följande påstående:

Sats 2. Två normaler till samma plan ligga i ett och samma plan.

Beviset är det, som finnes i XI: 6. Josephsons bevis stöder sig på parallelläran och kan därför ej användas. Beviset anföres för den händelse, att någon av mina läsare ej har tillgång till Euklides' elfte bok.

Normalerna AB och CD till planet α äro givna, B och D äro deras fotpunkter. Drag DE i planet α, så att den bildar rät vinkel med BD, och gör $DE = AB$! Räta äro vinklarna ABE, ABD, CDB, BDE, CDE, och det skall bevisas, att vinkeln ADE är rät. Först och främst framgår av konstruktionen, att $BE = AD$. Då äro trianglarne ABE och EDA kongruenta (2:a kongruensfallet). Vinkeln ADE är då rät, emedan den är lika med vinkeln ABE. Enligt sats 1 äro således räta linjerna CD, AD och BE samt följaktligen också AB i samma plan. Satsen är bevisad.

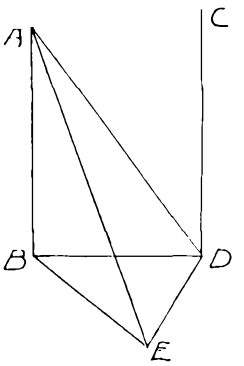

Fig. 16.

På sedvanligt sätt kan man därför definiera begreppet normalplan till ett givet plan. Genom en punkt A gå hur många normalplan som helst till ett plan α. Ett sådant är nämligen förutom av A bestämt av en vilken som helst av de normaler till α, som ej gå genom A. Normalplan till α genom punkten A kunna därför konstrueras till huru stort antal som helst. De skära varandra tydligen i den normal till α, som går genom A. Således:

Sats 4. Genom en punkt utom ett plan går en enda normal till detta plan, genom två punkter, som ej ligga på samma normal, ett enda normalplan. Genom en punkt utom en rät linje går ett enda normalplan till denna räta linje.

Sista delen av satsen torde inses utan bevis.

På sedvanligt sätt kan man definiera vinkeln mellan en rät linje och ett plan samt mellan två plan eller bättre två halvplan. Motsvarigheten i rummet (bättre i punkten) till planets triangel är trekanten, vilkens kanter, vinkelbenen OA, OB, OC, motsvara triangelns hörn. Trekantens sidor äro vinklarna AOB o. s. v. Deras storlek mätas av dessa vinklars storlek. Vinkeln vid kanten OA är vinkeln mellan de halvplan OAB, OAC, som innehålla vinkelbenen OB, OC respektive. Man kan bevisa följande kongruenssatser för trekanter:

Sats 5. Två trekanter äro kongruenta, om två sidor och mellanliggande vinkel eller två vinklar och mellanliggande sida i den ena äro lika med motsvarande element i den andra. De äro också kongruenta, om alla sidorna eller alla vinklarna i den ena äro lika med motsvarande element i den andra.

Dessa satser bevisas synnerligen elegant i Enriques, Fragen der Elementargeometrie I, Leipzig und Berlin 1911. Detta arbete innehåller synnerligen läsvärda uppsatser över geometriska principfrågor. Beviset av ovanstående sats förbigås här, då den ej kommer att användas i det följande. Man observere, att vinklar och sidor kunna bytas mot varandra (dualitet), liksom att det finns ett kongruensfall, som ej har någon motsvarighet i den euklideiska plangeometrien.

§ 9. Kongruenta avbildningar.

En kongruent avbildning är en motsvarighet mellan punkterna i rummet med följande egenskaper. *Varje punkt A motsvaras av en enda punkt A' och varje sträcka AB av en lika stor sträcka $A'B'$.*

Det är tydligt, att om punkten C ligger mellan punkterna A och B, ligger också den mot C svarande punkten C' mellan de mot A och B svarande punkterna A' och B'[1]. Punkterna på ett vinkelben eller en rät linje motsvaras således av punkterna på ett bestämt vinkelben eller på en bestämd rät linje. Varje triangel ABC motsvaras av en med sig kongruent triangel $A'B'C'$; således motsvaras också varje vinkel av en lika stor vinkel. Ligger punkten D i planet ABC, skär varje rät linje, som går genom D och en punkt på sträckan AB, en av sträckorna AC eller BC. Antag, att den skär AB i E och AC i F! Punkterna E och F motsvaras av två fullt bestämda punkter E' och F', så att punkten E' ligger på sträckan $A'B'$ och F' på sträckan $A'C'$. Då måste D' ligga på räta linjen $E'F'$, således i planet $A'B'C'$. Punkterna i ett plan motsvaras således av punkterna i ett bestämt plan. Det är tydligt, att punkter i ett halvplan också motsvaras av punkter i ett bestämt halvplan, och att punkter på samma sida om ett plan α motsvaras av punkter på samma sida om det mot α svarande planet α'. Det är en följd därav, att punkter på en sträcka motsvaras av punkter på en sträcka.

Ligger nu punkten P utom planet α och är F fotpunkten av den normal p, som från P fälles mot α, måste normalen p' genom den motsvarande punkten P', mot det α motsvarande planet α' motsvara normalen p, så att p:s fotpunkt F i α motsvaras av p':s fotpunkt F' i α' och samtidigt likheten $P'F' = PF$ gäller. Eftersom nu punkter på samma sida om planet α motsvaras av punkter på samma sida om det mot α svarande planet α', inses genast riktigheten av följande sats:

Det finns en enda kongruent avbildning, i vilken triangeln ABC motsvaras av en godtyckligt vald med ABC kongruent triangel $A'B'C'$ och punkter på en bestämd sida av planet ABC av punkter på en bestämd sida om planet $A'B'C'$.

En speciell kongruent avbildning är en *symmetrisk avbildning*, i vilken varje punkt i ett bestämt plan, *symmetriplanet*, motsvarar sig själv, men punkterna på ena sidan om detta motsvaras av punkterna på andra sidan om detta.

Vi skola studera resultatet av två symmetrier utförda kring två normalplan μ och α till samma räta linje t. Först utföra vi den symmetriska avbildningen kring μ, som skär t i M, sedan symmetrien kring α, som skär t i A'. Är nu M mittpunkten av sträckan AA', motsvaras i den kongruenta avbildning, som är resultatet av de båda symmetrierna, A av A' och vinkelbenet AA' av det med detta i rät linje liggande vinkelbenet $A'A_1$. Varje halvplan tP motsvaras av sig självt. Motsvaras punkten B på t av punkten B', som också måste ligga på t, gäller ständigt $BB' = AA'$, varom man lätt övertygar sig. Den kongruenta avbildningen i fråga är således likaledes resultatet av en symmetrisk avbildning kring det normalplan till t, som går genom mittpunkten till sträckan BB', och symmetrien kring normalplanet till t i punkten B', om de symmetriska avbildningarna utföras i nu nämnd ordning. En kongruent avbildning med dessa egenskaper kallas *translation*, räta linjen t är *translationsaxeln*.

Antag, att två plan μ och α skära varandra i en rät linje r! Dess snittpunkt med ett godtyckligt normalplan ω må vara O; ω må skära μ och α i två räta linjer, på vilka vi välja vinkelbenen OM och OA' respektive, så att vinkeln MOA' ej är trubbig. Är denna vinkel rät, inser man genast, att den kongruenta avbildning, som är resultatet av de de båda symmetrierna kring μ och α, överför varje halvplan rP i det i samma plan belägna halvplanet rP', så att punkterna P och P' ligga på var sin sida om r. Är vinkeln i fråga ej rät, utan spetsig, finns det i ω ett sådant vinkelben OA, att OM är bisektris till vinkeln AOA'. Utföres därför först symmetrien kring μ och därefter symmetrien kring α, motsvaras vinkelbenet OA av vinkelbenet OA'. Alla punkter på r men ingen utom äro fixa, och halvplanet rP motsvaras av halvplanet rP', där P motsvaras av P', så att vinkeln mellan dessa halvplan är lika stor med vinkeln AOA'. På samma sätt, som då det var fråga om en

[1] Endast då gälla nämligen alla tre likheterna $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.

translation, inses, att vår avbildning på oändligt många sätt kan sammansättas av symmetrier kring två plan, som skära varandra i r. Varje dylik avbildning kallas *vridning* eller *rotation*; r är *rotationsaxeln*.

Skära rotationsaxlarna r och s varandra i P, är resultatet av vridningarna kring r och s en vridning kring en rät linje genom P. Den första rotationen kan ersättas av en symmetri kring ett visst plan γ genom P och en symmetri kring planet rs, den andra av en symmetri kring rs och ett fullt bestämt plan δ genom P. Symmetrierna kring planet rs, som utföras efter varandra, upphäva varandra, så att resultatet blir en symmetri kring γ och därefter en symmetri kring δ, d. v. s. en rotation kring snittlinjen mellan planen γ och δ.

Det finns två kongruenta avbildningar, som överföra de mot varandra vinkelräta vinkelbenen OA och OB i de mot varandra vinkelräta vinkelbenen OA' och OB'. En av dem kan bestämmas av följande två vridningar. Först utföres med bisektrisen till vinkeln AOA' en vridning, som för OA i OA', OB i OB''. Eftersom vinkeln BOA är rät, är även vinkeln $B''OA'$ rät. Med OA' som rotationsaxel utföres sedan den vridning, som för OB'' i OB'. *Den ena kongruenta avbildningen är således en vridning kring en rotationsaxel genom O. Den andra kongruenta avbildningen erhålles därför genom att först utföra symmetrien kring planet AOB och sedan utföra en vridning. Den kan också erhållas genom att först utföra vridningen och sedan symmetrien kring planet $OA'B'$.*

Det är sålunda bevisat, att en kongruent avbildning antingen kan reduceras på en translation och en vridning eller en translation, en symmetri och en vridning. En translation och en vridning kunna ersättas av två symmetrier, varom man utan större svårighet kan övertyga sig. Överföres av translationen längs axeln AB punkten A i punkten B och måste före vridningen en symmetrisk avbildning göras, kan ju denna företagas kring AB:s normalplan i B. Den sista symmetrien i translationen kan ju ha detta plan till normalplan. Translationen och symmetrien kunna således ersättas av en enda symmetri. *Varje kongruent avbildning kan således ersättas antingen av två symmetrier eller av tre, i sista fallet möjligen av en.*

Varje kongruent avbildning, som kan ersättas av en translation och en rotation kallas en *rörelse*. Kunde jag bevisa, att fyra symmetrier alltid kunna ersättas av två symmetrier, vore därmed också bevisat, att två efter varandra utförda rörelser kunna ersättas med en enda rörelse, eller att rörelserna bilda en grupp, en undergrupp i gruppen av kongruenta avbildningar. Finge man stödja sig på den projektiva geometrien, vore uppvisandet av detta påstående enkelt. Förutsättes parallellaxiomet, är uppgiften likaledes ej svår. I annat fall synes det mig, som om en ej obetydlig kännedom om icke-euklideisk geometri vore nödvändig. Vi försöka därför ej framställa något sådant.

Förutsätter man, att *rörelserna bilda en grupp*, kan man utgå från tre vinkelben OA, OB, OC, som med varandra bilda räta vinklar, och kalla denna trekant ett *högersystem*, OA, OB, OC tagna i den givna ordningen. Varje rörelse, som överför OA och OB i OA' och OB', för OC i ett bestämt vinkelben OC'. Vi kunna därför kalla OA', OB', OC' i denna ordning för ett högersystem. Är $OABC$ ett högersystem, äro $OBAC$, $OACB$, $OCBA$ vänstersystem, men $OBCA$ och $OCAB$ högersystem.

Nu kunna höger- och vänstersystem uteslutande med tillhjälp av anordningssatserna verkligen skiljas åt, d. v. s. det är verkligen möjligt att definiera åtskillnaden mellan höger- och vänstersystem. Då kan man bevisa, att rörelser äro sådana kongruenta avbildningar, som föra högersystem i högersystem. Emellertid är det en mycket vidlyftig och invecklad undersökning, som måste företagas för att visa, att det är möjligt att komma till målet på denna väg. På grund därav måste vi avstå från en sådan framställning.

I stället för att utgå från kongruens som det ursprungligen givna kan man lika väl utgå från begreppet rörelse och fastlägga dess egenskaper genom lämpligt valda axiom. Man kan exempelvis antaga följande: Det finns en enda rörelse, som för punkten A, vinkelbenet AB och halvplanet ABC i punkten A', vinkelbenet $A'B'$ och halvplanet $A'B'C'$. Rörelserna bilda en grupp. En rörelse, som fixerar två av en rät linjes punkter, fixerar linjens alla punkter. En framställ-

ning av geometrien med dessa utgångspunkter avlägsnar sig givetvis långt från det euklideiska framställningssättet.

Slutligen kan det tilläggas, att lika vinklar kunna definieras, om Hilberts axiom III: 4—6 utbytas mot följande:

Är $A'B' = AB$ och C en punkt utom räta linjen AB, finnes i varje plan genom räta linjen $A'B'$ på en bestämd sida om denna en enda punkt C', sådan att $A'C' = AC$ och $B'C' = BC$.

Äro i trianglarna ABC och $A'B'C'$: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, D och E punkter på vinkelbenen AB och AC respektive, D' och E' punkter på vinkelbenen $A'B'$ och $A'C'$ respektive, så att $AD = A'D'$, $AE = A'E'$, så är dessutom $DE = D'E'$.

Likbelägna vinklar i kongruenta trianglar sägas då vara lika.

§ 10. Kontinuitetsaxiomen.

V: 1. (Arkimedes' axiom). *Låt A_1 vara en godtycklig punkt, belägen mellan de likaledes godtyckligt valda punkterna A och B. Konstruera punkterna A_2, $A_3 \ldots A_n$, så att A_1 ligger mellan A och A_2, A_2 mellan A_1 och A_3 o. s. v. samt så, att*

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots . A_{n-1}\ A_n\,!$$

Då finns det bland punkterna A_n en punkt A_m, sådan att B ligger mellan A och A_m.

Detta axiom antages av Euklides i hans femte boks fjärde definition, som lyder: »De storheter sägas hava proportion sinsemellan eller vara av samma slag, om vilka man kan begripa, att den ena kan tagas så många gånger, att han bliver större än den andra». Sträckor antager han nämligen vara sådana storheter.

Med förhållandet mellan två sträckor AB och AC menas som bekant AB:s mätetal med AC som enhet. Kan AC delas i n lika delar, av vilka precis m tillsammans utfylla AB, är detta mätetal $\frac{m}{n}$. Om ej, så existerar enligt det arkimediska axiomet, huru stort än hela talet n må vara, ett helt tal m av följande beskaffenhet

$$\frac{m}{n} \cdot AC < AB < \frac{m+1}{n}\, AC.$$

Mätetalet är då ett irrationellt tal, vars närmevärden definieras av olikheten. Dessa irrationaltal studerar Euklides i sin femte bok. Den femte definitionen (exhaustionssatsen) inför begreppet lika irrationaltal på följande sätt: »Storheter sägas vara i samma proportion, den första till den andra som den tredje till den fjärde, om den förstas och tredjes lika mångfaldiga, jämförda med den andras och fjärdes lika mångfaldiga, huru mångfaldiga de än må vara, äro båda tillika större, lika stora eller mindre än de lika mångfaldiga av den andra och fjärde, om de jämföras, som svara mot varandra, nämligen den förstas med den andras och den tredjes med den fjärdes.»

Teorien för irrationaltalen behöver numera som bekant ej iklädas geometrisk dräkt, då den ju är och bör vara oberoende av all geometri. Exhaustionsförfarandet, som ju definierar ett irrationaltal med dess närmevärden, är i den moderna aritmetiken utbytt mot det så kallade Dedekindska snittet.

Indelas *alla* rationaltal i två klasser A och B, så att varje tal i klassen A är mindre än varje tal i klassen B, sägas dessa klasser bilda ett snitt i den rationella talmängden. Finnes i klassen A ett största tal, är det tydligt, att varje större tal tillhör B. Snittet definierar då ett rationellt tal. Finnes ett minsta tal i B, gäller motsvarande påstående. Finnes däremot varken i A ett största tal eller i B ett minsta tal, säges snittet definiera ett irrationaltal, som säges vara större än varje tal i A och mindre än varje tal i B.

Exempel på en klassindelning av det tredje slaget är följande. För till A alla negativa rationella tal, noll och alla positiva rationella tal x, vilka satisfiera olikheten $x^2 < 2$, till B alla positiva rationaltal y, som satisfiera olikheten $y^2 > 2$. Med tillhjälp av denna snitt-teori visar

man som bekant synnerligen raskt, att lämpliga definitioner på summa, skillnad, produkt och kvot av irrationaltal kunna införas, så att de räknelagar, som gälla i det rationella talsystemet, även gälla i den irrationella talmängden. Slutligen bevisas, att denna mängd är kontinuerlig, d. v. s. att om ett Dedekinds snitt utföres i denna talmängd, definierar detta snitt *alltid* ett tal, som hör till endera av de två klasserna. En utvidgning av talbegreppet genom snitt i den nya talmängden är således ej möjlig.

Innehållet i Euklides' femte bok, irrationaltalens teori, är således numera förvisat från geometrien till aritmetiken och behöver därför ej här studeras, utan antages vara bekant. Det arkimediska axiomet möjliggör för oss att som koordinater för punkterna på en rät linje använda talen i det reella talsystemet, med andra ord att avbilda punkterna på en rät linje i det reella talsystemet, så att mot varje punkt svarar ett enda tal, som aldrig motsvaras av två skilda punkter. Att däremot i denna avbildning varje tal motsvaras av en punkt, kan naturligtvis ej med hittills gjorda förutsättningar bevisas. Det skulle kunna åstadkommas genom en utvidgning av punktbegreppet på samma sätt som Dedekinds utvidgning av talbegreppet genom införandet av irrationella tal. Denna utvidgning tänker sig Hilbert redan utförd, då han postulerar:

V: 2. (Fullständighetsaxiomet). *Geometriens element (punkter, räta linjer och plan) bilda ett system av begrepp, som icke vidare kan utvidgas, om alla de övriga axiomen fortfarande skola vara giltiga.*

Vi ersätta detta med det lätthanterligare:

V: 2'. *Indelas punkterna på den godtyckligt valda sträckan AB i två sådana klasser I och II, att om A_1 är en godtyckligt vald punkt i klassen I och B_1 likaledes en godtyckligt vald punkt i klassen II, A_1 alltid ligger på sträckan AB_1 (således B_1 på sträckan A_1B), existerar en punkt C, som tillhör endera av dessa klasser och har den egenskapen, att varje punkt på sträckan AC är en punkt i klassen I och varje punkt på sträckan BC en punkt i klassen II.*

Nu kunna vi bevisa följande sats:

Sats 1. En cirkel råkar i två punkter varje rät linje a, som går genom en av cirkelns inre punkter.

Cirkelns inre punkter äro de, som ha ett avstånd till medelpunkten O, som är mindre än cirkelns radie. Existerar en sådan punkt A på a, existera sådana i obegränsat antal på a på varje sida om A. A_1 är en sådan punkt, om $AA_1 < r - OA$, där r är cirkelns radie. Det finns också på a punkter B, sådana att $OB > r$. Väljes blott B på a, så att $AB = 2r$, måste $OB + OA > 2r$, således $OB > r$ gälla.

Vi indela nu punkterna på sträckan AB i två klasser I och II och räkna till I varje punkt A_1, för vilken $OA_1 \leqq r$ gäller, till II de punkter B_1, som satisfiera $OB_1 > r$. Varje punkt på sträckan AB tillhör då endera klassen, och det är lätt att bevisa, att A_1 alltid ligger på sträckan AB_1. Det finns således en punkt C, som skiljer dem åt. Denna är en av cirkelns snittpunkter med a.

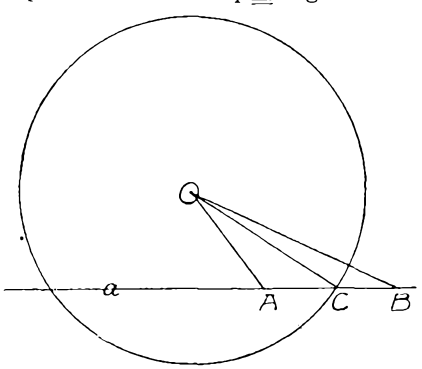

Fig. 17.

Vore ej $OC = r$ utan $OC < r$, d. v. s. $OC = r - a$, där a är en fullt bestämd sträcka, välja vi på sträckan CB en punkt D, så att $CD < a$. Då är $OD < r$ (Eukl. I: 20). Men D tillhör klassen II; således $OD > r$. Således gäller ej $OC < r$. På samma sätt kan man bevisa, att antagandet $OC > r$ måste förkastas. Således är $OC = r$, och C är den sökta snittpunkten. Att ytterligare en men endast en sådan snittpunkt finnes, är nu lätt att bevisa.

Sats 2. En cirkel med medelpunkten O, som går genom en inre punkt A och en yttre punkt B till en cirkellinje med medelpunkten O', skär denna i två punkter.

Vi kunna utan någon inskränkning antaga, att varken A eller B ligga på räta linjen OO', emedan vi eljes på samma sätt som i föregående sats kunna konstruera inre och yttre punkter med denna egenskap. Likaledes kunna vi antaga, att A och B ligga på samma sida om räta

linjen OO', emedan sådana eljes kunna konstrueras. I III: 7—8 är bevisat, att $OB_1 > OA_1$, om $\wedge B_1O'O > \wedge A_1O'O$. Vi indela nu vinkelbenen mellan vinkelbenen $O'A$ och $O'B$ i klasserna I och II, och räkna till klassen I de vinkelben $O'A_1$, vilkas ändpunkter A_1 på cirkeln O' satisfiera $OA_1 \leqq r$, där r är radien i den cirkel, som har O till medelpunkt. Till klassen II räknas då de övriga vinkelbenen $O'B_1$, för vilkas ändpunkter B_1 på cirkellinjen O' således $OB_1 > r$ gälla. Det är ju alldeles tydligt, att V: 2′ kan användas på dessa vinkelben. Således existerar ett vinkelben $O'C$, som skiljer dessa klasser åt. På ungefär samma sätt som i sats 1 visas nu, att detta vinkelben $O'C$ skär båda cirklarna i samma punkt. Att ytterligare en sådan snittpunkt existerar på andra sidan om OO' visas nu synnerligen lätt.

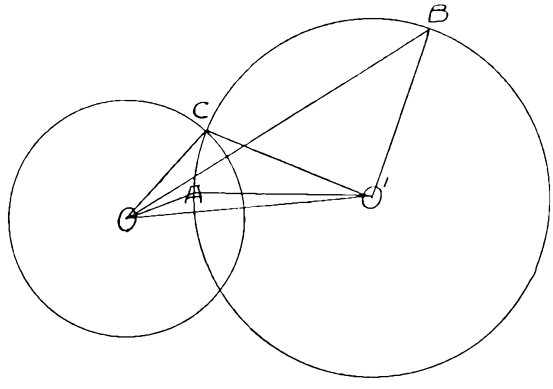

Fig. 18.

Att dessa satser ej kunna bevisas utan V: 2 eller V: 2′ har Hilbert i sitt arbete visat, förutsatt att parallellaxiomet godtages. Enligt våra kongruensaxiom kunna vi utom konstruktioner av räta linjer endast utföra sådana, som kunna reduceras på avsättandet av lika sträckor och vinklar. Den senare återför Hilbert på konstruktion av lika sträckor. Nu visar han, att man endast genom avsättning av lika sträckor ej kan konstruera alla kvadratiska irrationaliteter, vilket ju däremot kan ske, om snittpunkter mellan cirklar få användas.

Alla sådana kunna konstrueras med en enda cirkel (Steiner) eller medels en linjal med parallella kanter o. s. v. För att utan svårighet inse detta bör man vara hemmastadd i den projektiva geometrien, från vilken måttgeometrien kan överskådas som från ett högre plan.

Det inses utan vidare, att sats 1 i § 6 kan bevisas med hjälp av V: 2 utan konstruktioner.

§ 11. Parallellaxiomet.

IV. *Genom en punkt A utom en rät linje b går endast en med denna parallell rät linje a.*

Att det existerar minst en sådan parallell visas i Euklides I: 27.

Nu kan man bevisa den så kallade transversalsatsen:

Drages parallellt med sidan BC i triangeln ABC en transversal, som träffar sidorna AB och AC i B' och C' respektive, gäller

$$AB : AB' = AC : AC'.$$

Denna sats bevisas med lätthet genom att använda exhaustionssatsen eller, vilket kommer på ett ut, genom att påvisa, att de båda förhållandena definiera ett och samma snitt i den rationella talmängden. Hela likformighetsläran kan som bekant uppbyggas på denna sats, då ju den räcker till som grundval för bevisen av likformighetsfallen. Med tillhjälp av likformighetsläran, använd på en rätvinklig triangel, bevisas på bekant sätt Pythagoras' sats, som då får betraktas som ett samband mellan mätetalen på sidorna i en rätvinklig triangel, likaledes Euklides III: 35—37, som givetvis likaledes äro oberoende av alla satser om ytlikhet. De regelbundna månghörningar, som Euklides konstruerar, kunna också konstrueras oberoende av ytlikhetssatser. Det är bekant, att även 17-hörningen, 257-hörningen o. s. v. kunna konstrueras med passare och linjal (Gauss). Att de andra reguljära månghörningarna existera, följer naturligtvis ur V: 2. Med passare och linjal kunna de däremot i allmänhet ej konstrueras.

Euklides grundar sin likformighetslära på begreppet ytlikhet, vilket ju bör undvikas, då därigenom något för likformighet främmande införes. Mot hans framställning av teorien om ytlikhet kunna dessutom ganska grava anmärkningar göras. Vi skola senare behandla denna teori

på ett sätt, mot vilket inga invändningar kunna resas. Slutligen framhålles ännu en gång, att satserna I: 1—28 och III: 1—19 äro oberoende av parallellaxiomet.

§ 12. Allmänna betraktelser över Hilberts axiomsystem.

Vi ha nu sett, att Hilberts axiom I—V räcka till att bilda grundvalen för den euklideiska geometrien, i det vi kunnat bevisa alla satser av vikt utan att stödja oss på andra förutsättningar. Alla givna bevis kunna föras utan figurer. Det blir visserligen svårt att överskåda bevis, om figurer saknas, men är bevisföringen omöjlig utan sådana, tyder det på att ej alla behövliga förutsättningar uppförts bland axiomen. Åskådningens roll i en rationell geometri är därmed given. Den spelar givetvis en roll vid upptäckten av nya satser och ger god ledning vid bevisföringen, men som bevisgrund får den aldrig användas.

Ett villkor, som ett system av axiom nödvändigt måste uppfylla, är, att de måste vara med varandra förenliga, så att ett axiom ej strider mot något eller några andra. Att Hilberts axiom uppfylla detta villkor, torde väl få anses klart, då ännu ej någon motsägelse kunnat påpekas i den geometriska lärobyggnad, vartill grunden är lagd i Euklides' elementer. Att någon sådan motsägelse ej kan väntas, framgår för övrigt därav, att den då måste uppenbara sig inom den analytiska geometrien.

I den analytiska geometrien är en punkt sammanfattningen av tre reella tal x, y, z, punktens koordinater, en rät linje sammanfattningen av de punkter, som satisfiera två ekvationer av första graden i x, y, z, eller ekvationerna:

$$x = \alpha t + \xi\,,\ y = \beta t + \eta\,,\ z = \gamma t + \zeta \quad (\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta \text{ konstanter, } t \text{ variabel})$$

Punkten (x_3, y_3, z_3) på denna räta linje ligger mellan (x_2, y_2, z_2) och (x_1, y_1, z), om dess parametervärde t_3 är ett tal, som ligger mellan de parametervärden, som motsvara de båda andra punkterna. Ett vinkelben innehåller de punkter, vilkas alla parametervärden t ha samma tecken; α, β, γ äro detta vinkelbens riktningscosiner, på vilka är lagt villkoret $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Vinkeln ε mellan två vinkelben (α, β, γ) och $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ bestämmes av

$$\cos \varepsilon = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1$$

Avståndet d mellan två punkter (x, y, z) och (x_1, y_1, z_1) bestämmes av

$$d = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}.$$

Ett plan är sammanfattningen av alla de punkter, vilkas koordinater satisfiera

$$ax + by + cz + d = o.$$

Två punkter, som ej ligga i detta plan, sägas ligga på samma sida om det, om båda punkternas koordinater, antingen båda göra $ax + by + cz + d$ positivt eller båda två göra det negativt. I motsatt fall sägas de ligga på var sin sida av planet.

Klart är nu, att axiomen I—IV äro sanna i denna geometri. V: 1 gäller, om såsom koordinater användas tal inom det reella talsystemet. För att V: 2 skall gälla, fordras, att samtliga dessa tal få begagnas som koordinater. Så är ju ej förhållandet hos Euklides. Han har ej användning av andra tal än de rationella och de irrationella, som ur de rationella kunna bildas genom ett ändligt antal kvadratrotsutdragningar. I ett sådant geometriskt system är därför ej vinkelns tredelning, kubens fördubbling och cirkelns kvadratur lösbara problem. De båda första bli lösbara, om vi adjungera alla kubikrötter till talsystemet, det tredje, om vi adjungera det transcendenta talet π. De kunna således lösas, om V: 2 gäller. Skulle vi inom den analytiska geometrien tillåta imaginära koordinater, inses det omedelbart, att axiomen i gruppen II ej kunna gälla, emedan begreppen större och mindre ej äro användbara inom det imaginära talsystemet, åtminstone ej på ett naturligt sätt. Icke desto mindre är det av fördel att vid många geometriska undersökningar använda imaginära tal.

Ett annat villkor, som kan påläggas ett axiomsystem, är, att det ej skall innehålla några överflödiga axiom, d. v. s. att intet axiom får kunna bevisas med hjälp av de övriga. Det är i allmänhet en mycket svår uppgift att övertyga sig om, att en viss sats är oberoende av en viss samling andra. Det är egentligen åt denna uppgift, Hilbert ägnat sig i sina Grundlagen. Särskilt har han grundligt undersökt, villken roll det arkimediska axiomet V: 1 spelar. Dessa undersökningar äro mycket vackra, men torde bäst studeras i Hilberts eget arbete.

Att intet av axiomen i de båda första grupperna är överflödigt, förefaller ju tydligt. Särskilt är det ju uppvisat, att ej ens punkternas anordning på en rät linje tillfredsställande kan behandlas endast med II: 1—3. Först med II: 4 är det möjligt att lösa problemet att rationellt ordna punkterna på en rät linje.

Det är möjligt att något inskränka innehållet i III: 4[1]. Att III: 6 är oberoende av de andra, visar Hilbert på följande sätt. Han bibehåller definitionerna på punkt, rät linje, plan, »mellan» och på lika vinklar och ändrar definitionen på lika sträckor på följande sätt. Avståndet d mellan punkterna (x_1, y_1, z_1, t_1) och (x_2, y_2, z_2, t_2) definieras av:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = (t_1 - t_2)\sqrt{(\alpha + \beta)^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Då gälla givetvis alla axiom i grupperna I, II, IV, V. Utan vidare inses, att III: 1, 2, 4, 5 gälla; III: 3 gäller, emedan $t_1 - t_3 = (t_1 - t_2) + (t_2 - t_3)$, men III: 6 gäller ej. Låt oss betrakta följande punkter med $z = o$. $A : x = o, y = o$; $B : x = 1, y = o$; $C : x = o, y = 1$; $D : x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$. Då är $BD = CD = \frac{1}{2}$, AD gemensam och $\angle ADB = \angle ADC = R$. Men trianglarna ADB och ADC äro ej kongruenta, ty $AB = 1$, men $AC = \sqrt{2}$. Således kan ej III: 6 gälla allmänt, ehuru det gäller för dessa båda trianglar.

Att parallellaxiomet är oberoende av de andra axiomen, skall visas i nästa kapitel, där de icke-euklideiska geometrierna skola studeras.

KAP. II.

De icke-euklideiska geometrierna.

§ 13. Något ur parallellteoriens historia.

Det euklideiska parallellaxiomet innehåller ett påstående, som förefaller tarva ett bevis i lika hög grad som många av Euklides' lärosatser. Otaliga äro också försöken att bevisa detsamma, på det att geometrien måtte kunna befrias från denna »skamfläck», som någon kallat axiomet i fråga. Många trodde sig ha lyckats; andra voro medvetna om, att de blott återfört parallellaxiomet på ett annat obevisat påstående, vars sanning föreföll dem mera inlysande.[2]

Följande »bevis» anfördes för ej länge sedan i åtskilliga läroböcker i geometri. Skjut i triangeln ABC sidan AB längs linjen AB, tills A kommer i B, vrid sedan sträckan AB i sitt nya läge, så att den kommer på vinkelbenet BC! Upprepa nu samma procedur, så att sidan AB skjutes längs BC till C, där vrides över på CA, skjutes ned till A och vrides över i

[1] Detta har gjorts av någon författare i Mathematische Annalen för omkring fyra eller fem år sedan. Eftersom jag saknar tillgång till litteratur, kan jag för tillfället ej yttra mig mera bestämt.

[2] Så antog Proklus (410—485), att om a och b äro två i samma plan belägna räta linjer, som ej skära varandra, avståndet från b:s punkter till a ej kan växa över alla gränser. En utmärkt framställning av parallellteoriens historia finnes hos Bonola, Geschichte der Nicht-Euklidischen Geometrie, Leipzig 1908.

sitt förra läge! Slutresultatet av rörelsen är en vridning av ett varv i punkten A. Sidan har vridits i triangelns hörnpunkter, varje gång en vinkel lika stor med yttervinkeln till triangeln ABC i ifrågavarande hörnpunkt. Summan av de tre yttervinklarna skulle således vara fyra räta, d. v. s. triangelns vinkelsumma skulle vara två räta. Att parallellaxiomet i så fall är giltigt, skall längre fram visas.

Rörelsen består tydligen av tre translationer och tre vridningar. Det är lätt att inse, att rörelsen kan ersättas av en vridning av planet kring punkten A, som är summan av triangelns tre yttervinklar, samt den rörelse, som ersätter de tre translationerna längs triangelns sidor. Det förutsättes tydligen, att resultatet av dessa tre translationer är den identiska avbildningen.

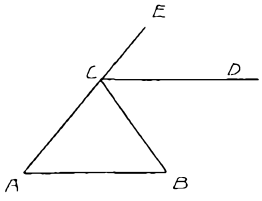

Fig. 19.

Om så vore förhållandet, skulle i yttervinkeln BCE till triangeln BCA finnas ett vinkelben CD, så att både $\angle DCB = \angle ABC$ och $\angle ECD = \angle CAB$ gälla. Detta förutsätter, att en triangels yttervinkel är lika med summan av de båda motstående innervinklarna. »Beviset» förutsätter således just det, som skulle bevisas.

Förnekas parallellaxiomet, kunna således ej två translationer längs två varandra skärande räta linjer ersättas av en translation, utan av en translation och en vridning. Detta visar i vilket stort beroende av parallellaxiomet rörelseteorien står.

Redan tidigt gjordes försök att definiera de med räta linjen a i planet α parallella räta linjerna i samma plan som orten för de punkter med lika avstånd till linjen a, som i planet α ligga på en bestämd sida om a. Det påpekades emellertid ganska snart, att denna definition förutsätter, att orten för dessa från a ekvidistanta punkter verkligen är en rät linje. Man kan bevisa, att så är förhållandet, om tre punkter A, B, C, som äro belägna i planet α på samma sida om a, ha lika avstånd till a och ligga i rät linje.

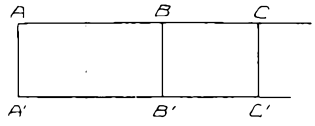

Fig. 20.

AA' BB', CC' äro sålunda tre normaler till a och $AA' = BB' = CC'$. Det är lätt att inse, att följande vinkellikheter gälla:

$\angle BAA' = \angle ABB'$; $\angle CBB' = \angle BCC'$; $\angle ACC' = \angle CAA'$; således $\angle ABB' = \angle CBB'$.

Var och en av dessa vinklar och därmed alla vinklarna vid A, B och C äro således räta. Fyrhörningen $ABB'A'$ är således en rektangel. Men vi skola strax se, att om det finns en enda rektangel, är varje fyrhörning, som har tre räta vinklar, också en rektangel. I så fall inses genast, att orten för punkter, som i ett plan α ligga på samma sida om en rät linje a i α och på samma avstånd från a, alltid är en rät linje. Men då är det lätt att bevisa parallellaxiomet.

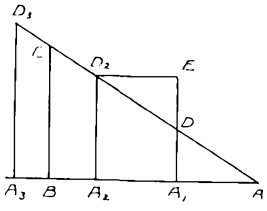

Fig. 21.

Vi antaga, att vinkeln CBA är rät, men den i samma plan belägna vinkeln BAD spetsig, och skola bevisa, att vinkelbenen BC och AD ha en gemensam punkt. Fäll från D normalen DA_1 till räta linjen AB! Om B fölle mellan A och A_1, vore satsen bevisad, ty enligt II: 4 måste då räta linjen BC träffa sträckan AD, då den enligt Euklides I: 27 ej kan träffa ens räta linjen A_1D. Vi antaga således, att A_1 ligger mellan A och B, välja D_2 på vinkelbenet AD, så att D ligger mellan D_2 och A och likheten $DD_2 = DA$ gäller. Från D_2 fälles normalen D_2A_2 mot AB och normalen D_2E mot A_1D. Enligt tredje kongruensfallet äro trianglarna D_2ED och AA_1D kongruenta; enligt vårt antagande är dessutom $D_2E = A_2A_1$. Således gäller $AA_1 = A_1A_2$. Faller ej B mellan A och A_2, konstrueras på AD den nya punkten D_3, så att $D_2D_3 = DD_2$. Från D_3 fälles normalen D_3A_3 mot AB. Därefter bevisas som ovan $A_3A_2 = A_2A_1 = AA_1$. Fortsätta vi att konstruera nya punkter D_4, D_5 ... och A_4, A_5 ..., måste enligt V: 1 slutligen en punkt A_n påträffas, som har ett sådant läge, att B ligger mellan A_n och A. På det sätt, som redan förut använts, bevisas, att räta linjen BC träffar sträckan AD_n i någon punkt. Därmed är parallellaxiomet bevisat.

Legendre (1752—1833) har nedlagt mycket arbete på frågan om en triangels vinkelsumma. Han bevisar ytterst elegant, att en triangels vinkelsumma ej kan vara större än två räta. Antag, att i triangeln ABC ingen sida är större än sidan AC! Dela BC mitt itu i D, och drag ut sträckan AD till C_1, så att $DC_1 = DA$.
På grund av konstruktionen gälla:

$$\wedge AC_1B = \wedge CAD,\ \wedge DBC_1 = \wedge BCA,\ \wedge AC_1B < \wedge CAB \leqq \wedge ABC < \wedge ABC_1.\ \wedge AC_1B \leqq \wedge C_1AB.$$

I triangeln ABC_1 är således AC_1 den största sidan, $\wedge AC_1B \leqq \frac{1}{2} \cdot \wedge CAB$ och vinkelsumman lika med vinkelsumman i triangeln ABC, vilken vi antaga vara lika med $2R + \alpha$, där α är en vinkel av bestämd storlek. Konstruera vi ur triangeln ABC_1 triangeln ABC_2 på samma sätt, som vi ur triangeln ABC konstruerade ABC_1, är vinkelsumman i den nya triangeln $2R + \alpha$, men $\wedge AC_2B < \frac{1}{4} \cdot \wedge CAB$. Fortsättas enligt samma förfaringssätt konstruktionerna, erhålles slutligen en triangel ABC_n, vars vinkelsumma är $2R + \alpha$, under det att $\wedge AC_nB < \frac{1}{2^n} \cdot \wedge CAB$. Om blott n är tillräckligt stort, gäller $\frac{1}{2^n} \wedge CAB < \alpha$. I triangeln ABC_n vore således summan av två vinklar större än två räta, vilket är orimligt. *Vinkelsumman i en triangel kan därför ej vara större än två räta.*

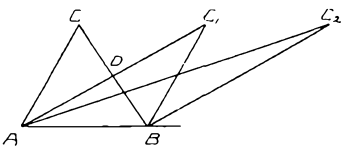

Fig. 22.

Slutligen har han bevisat, att *om vinkelsumman i en enda triangel är två räta, är vinkelsumman i varje triangel lika med två räta.*

Är vinkelsumman i triangeln ABC två räta, gäller detta också för trianglarna ADB och ADC, om punkten D ligger mellan B och C. Vore nämligen vinkelsumman i triangeln ADB lika med $2R - \alpha$, måste den i triangeln ADC vara $2R + \alpha$, vilket är bevisat vara orimligt. Varje triangel AEF, där E och F äro punkter på sträckorna AB och AC respektive, har således sin vinkelsumma lika med två räta. Speciellt existera rätvinkliga trianglar med två räta till vinkelsumma.

Existerar en sådan triangel, existerar också en rektangel. Av fyra med denna kongruenta rektanglar kan man konstruera en rektangel, vars sidor äro dubbelt så stora som den förras. Fortsätter man med detta förfarande, når man slutligen rektanglar med huru stora sidor som helst, således också rätvinkliga trianglar med huru stora kateter som helst och två räta till vinkelsumma.

Nu kan man bevisa, att vinkelsumman i varje rätvinklig triangel ABC är två räta. Är A den räta vinkelns spets, finns det enligt det föregående en rätvinklig triangel, vars vinkelsumma är två räta, och vars kateter äro större än kateterna AB och AC. Upprita en med denna kongruent triangel $AB'C'$, så att B faller mellan A och B' och C mellan A och C'. Enligt det föregående är då vinkelsumman i triangeln ABC två räta.

Varje triangel kan delas i två rätvinkliga trianglar. Då rätvinkliga trianglars vinkelsumma är två räta, gäller samma påstående för varje triangel, vilket skulle bevisas.

Existerar en enda rektangel, existerar också en rätvinklig triangel med två räta till vinkelsumma. Varje rätvinklig triangels vinkelsumma är då två räta, och det existerar rektanglar med sidorna lika med två givna sträckor. Varje fyrsiding $ABCD$, i vilken vinklarna vid B och C är räta samt $AB = CD$, måste vara en rektangel, emedan mittpunktsnormalen genom mittpunkten till sträckan BC delar den i två kongruenta hälfter. Det är nu lätt att visa, att varje punkt på räta linjen AD ligger lika långt från räta linjen BC. Vi ha förut bevisat, att parallellaxiomet i så fall är giltigt. Vidare bevisade vi, att det existerade rektanglar, om det fanns tre punkter A, B, C i ett plan α genom räta linjen a, som lågo på samma sida om a och lika långt från a. Under denna förutsättning gäller sålunda också parallellaxiomet.

Redan den bekante matematikern *Wallis* (1616—1703) hade påpekat, att om likformiga, ej kongruenta trianglar existerade, kunde parallellaxiomet bevisas. Det är ju tydligt, emedan det då finns fyrsidingar, vilkas vinkelsumma är fyra räta, vilket ej kan vara möjligt, om en triangels vinkelsumma avviker från två räta.

Saccheri (1667—1733) har bevisat följande viktiga sats: *Är vinkelsumman i en enda triangel lika med, större än eller mindre än två räta, är vinkelsumman i varje triangel lika med, större än eller mindre än två räta.* Han lyckades bevisa parallellaxiomet, om han antog, att vinkelsumman icke kunde vara mindre än två räta i någon triangel, och uppvisade sålunda falskheten i antagandet, att en triangels vinkelsumma är större än två räta. Han visade vidare, att om vinkelsumman är mindre än två räta, räta linjerna i planet Aa genom punkten A kunna uppdelas i två klasser, den ena bestående av sekanterna till a, den andra av de räta linjer, som icke träffa a. Det inses ju genast. Men han visade också, att de räta linjer p_1 och p_2, som skilja dessa åt, visserligen ej träffa a, men dock närma sig a oupphörligt, så att det finnes punkter på var och en av dem, vilkas avstånd från a är mindre än varje given sträcka. Av denna anledning förkastade han det antagande, som lett honom till denna slutsats, och ansåg sig därmed ha bevisat parallellaxiomet.

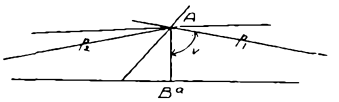

Fig. 23.

Lambert (1728—1777) kom oberoende av Saccheri till samma resultat som denne. Men han påpekade också, att om AB är normalen från A mot a, kan sträckan AB mätas av vinkeln mellan denna normal och endera av de ovan nämnda räta linjerna p_1 och p_2. För sträckor skulle således finnas ett absolut mått såväl som för vinklar. Anser man detta orimligt, är således parallellaxiomet riktigt. Han påpekade, att det ej kan vara alldeles orimligt, att en triangels vinkelsumma är större än två räta, då ju så är förhållandet i varje sfärisk triangel. På ett »imaginärt klot» borde enligt hans åsikt påträffas trianglar med vinkelsumman mindre än två räta, varför den plana trigonometrien för dylika trianglar bör framgå ur den sfäriska, om man gör sidorna i de sfäriska trianglarna imaginära. Att så är fallet för de reella motsvarigheterna till »imaginära klot», ytor med konstant negativ krökning, uppvisades också, fastän långt efter Lamberts död.

Ryssen *Lobatscheffsky* och ungraren *Bolyai* visade slutligen oberoende av varandra, att man ej kommer till några orimligheter, om man förkastar parallellaxiomet. Deras arbeten utkommo ungefär samtidigt, omkring år 1830. Båda hade lyckats att konstruera det nya geometriska systemets trigonometri, just den trigonometri, som Lambert förutsett. Därmed hade de också visat, att den nya lärobyggnaden ej gärna kunde innehålla några motsägelser, ty sådana borde ju uppenbara sig inom trigonometrien; men mot denna kunde inga invändningar göras.

Riemann visade senare, att om man tänkte sig ett koordinatsystem infört, så att man således kunde röra sig inom den analytiska geometrien, finns det tre olika sätt att införa mått på sträckor och vinklar, så att kongruensläran kan utvecklas. Väljer man det ena av detta, kommer man till den euklideiska geometrien, väljer man det andra, kommer man till det geometriska system, som Lobatscheffsky och Bolyai studerat. Väljer man slutligen det tredje, kommer man till ett nytt geometriskt system, i vilket triangelns vinkelsumma är större än två räta. Alla Hilberts axiom kunna då ej vara riktiga. Anordningsaxiomen måste förändras och därmed också kongruensaxiomen något modifieras. Anordningsaxiomen kunna emellertid räddas, om man inskränker deras giltighet till ett »begränsat område», inneslutet av en yta, som utåt är överallt konvex, exempelvis ett klot.

Det angenämaste och mest instruktiva av alla sätt att komma in i de icke-euklideiska geometriska systemen är att före allt tal om kongruens grundlägga den projektiva geometrien och från denna stiga ned till måttgeometrien. För att följa denna metod fordras dock ett ej ringa intresse för den projektiva geometrien själv.

För att komma fort in i de icke-euklideiska geometrierna lämpar sig ett av Wellstein[1] an-

[1] Weber-Wellstein, Encyklopädie der Elementar-Mathematik, Theil II. 2 A. Leipzig 1907.

givet sätt att i den euklideiska geometrien definiera ett system av kurvor och ytor, som ha de egenskaper, som i de icke-euklideiska geometrierna tillkomma räta linjer och plan. Den följande framställningen påminner visserligen föga om Wellsteins metod att komma fram. Den grundar sig i stället på ett uppslag av *H. Poincaré* i hans berömda arbete La science et l'hypothèse. Den torde vara både lättfattligare och leda raskare till målet än Wellsteins metod.

§ 14. Poincarés »icke-euklideiska värld».

Sidan 84 och följande i Poincarés arbete läsa vi följande:

»Supposons, par exemple, un monde renfermé dans une grande sphère et soumis aux lois suivantes:

La température n'y est pas uniforme; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint la sphère où ce monde est renfermé.

Je précise davantage la loi suivant laquelle varie cette température. Soit R le rayon de la sphère limite; soit r la distance du point considéré au centre de cette sphère. La température absolue sera proportionelle à $R^2 - r^2$.

Je supposerai de plus que, dans ce monde, tous les corps aient même coefficient de dilatation, de telle façon que la longueur d'une règle quelconque soit proportionelle à sa température absolue.

Je supposerai enfin qu'un objet transporté d'un point à un autre, dont la température est différente, se met immédiatement en équilibre calorifique avec son nouveau milieu.

Rien dans ces hypothèses n'est contradictoire ou inimaginable.

Un objet mobile deviendra alors de plus en plus petit à mesure qu'on se rapprochera de la sphère limite.

Observons d'abord que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants.

Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher de la sphère limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. Les pas qu'ils font sont donc aussi de plus en plus petits, de sorte qu'ils ne peuvent jamais atteindre la sphère limite.

Si pour nous, la géométrie n'est que l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides invariables; pour ces êtres imaginaires, ce sera l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides *déformés par ces différences de température* dont je viens de parler.

Sans doute, dans notre monde, les solides naturels éprouvent également des variations de forme et de volume dues à l'échauffement ou au refroidissement. Mais nous négligeons ces variations en jetant les fondements de la géométrie; car, outre qu'elles sont très faibles, elles sont irrégulières et nous paraissent par conséquent accidentelles.

Dans ce monde hypothétique, il n'en serait plus de même, et ces variations suivraient des lois régulières et très simples.

D'autre part, les diverses pièces solides dont se composerait le corps de ses habitants, subiraient les mêmes variations de forme et volume.

Je ferai encore une autre hypothèse; je supposerai que la lumière traverse des milieux diversement réfringents et de telle sorte que l'indice de refraction soit inversement proportionnel à $R^2 - r^2$. Il est aisé de voir que, dans ces conditions, les rayons lumineux ne seraient pas rectilignes, mais circulaires.»

Äro sträckorna $\triangle s$ och $\triangle s'$ så små, att alla punkterna på var och en av dessa kunna anses ha samma temperatur, har $\triangle s$ på avståndet r från klotets medelpunkt den absoluta temperaturen T och $\triangle s'$ på avståndet r' absoluta temperaturen T', räknas i den tänkta världen dessa sträckor lika, om:

$$\frac{\triangle s}{T} = \frac{\triangle s'}{T'} \quad \text{eller} \quad \frac{\triangle s}{R^2 - r^2} = \frac{\triangle s'}{R^2 - r'^2}.$$

Beteckna vi i vår euklideiska geometri bågelementet med $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, beräkna vi i den nya geometrien bågelementet $d\sigma$ på följande sätt:

1) ..... $d\sigma = \frac{kds}{R^2 - r^2}$,

där k är en konstant, som vi efter behag kunna förfoga över.

Nu gäller det att lösa följande problem: Längs vilka kurvor är $\int d\sigma$ ett minimum, d. v. s. vilken av kurvorna i vår geometri är det kortaste »avståndet» mellan två punkter, eller längs vilken kurva skall en punkt, som i den tänkta världen anses röra sig med konstant hastighet, förflyttas för att tillryggalägga avståndet mellan två givna punkter på kortast möjliga tid. Att bestämma minimum av

$$\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}$$

är ett relativt enkelt variationsproblem, om man övergår till polära koordinater. Resultatet är följande:

De sökta kurvorna äro cirklar, som ligga i plan genom det givna klotets centrum och skära detta klot under räta vinklar, eller med andra ord, de sökta kurvorna äro det givna klotets ortogonalcirklar.

Som bekant är ljusets hastighet i olika ljusbrytande ämnen omvänt proportionell mot deras brytningsindex n. För oss är således enligt Poincarés antagande, om ljusets hastighet som vanligt betecknas med $\frac{ds}{dt}$, denna hastighet variabel på samma gång som r, så att ständigt:

$$\frac{1}{R^2 - r^2} \frac{ds}{dt} = \text{konstant}.$$

Från den nya geometriens ståndpunkt är således ljusets hastighet $\frac{d\sigma}{dt}$ konstant. Bestämma vi därför efter kända brytningslagar en ljusstråles väg i den nya världen, ha vi på samma gång löst ovan angivna variationsproblem, ty en ljusstråle beskriver som bekant alltid den väg, som för den fortast fram mellan två punkter, som den passerar. Eftersom brytningen sker vid koncentriska klot, blir ljusstrålen alltid en plan kurva, vars plan går genom det begränsande klotets centrum. Vi kunna således studera förhållandena i ett bestämt av dessa plan och införa i detta plan polära koordinater r och v.

Är α den vinkel, som en ljusstråle eller rättare sagt dess tangent i punkten med koordinaterna r och v bildar med radiusvektor, bevisar man lätt, att följande brytningslag i detta fall (brytning vid koncentriska cirklar) gäller:

2) ..... $nr \sin \alpha = C_1$ eller $\sin \alpha = \frac{C(R^2 - r^2)}{r}$,

där C är ett för kurvan ifråga konstant tal. Det är lätt att visa, att kurvan är en cirkel. I stället för att integrera differentialekvationen, som erhålles, om $\sin \alpha$ ersättes med $\frac{rdv}{ds}$, beräkna vi i stället krökningsradien ρ, som bestämmes av $\frac{1}{\rho} = \frac{d\varepsilon}{ds}$, där $d\varepsilon$ är den så kallade kontingensvinkeln eller vinkeln mellan två successiva normaler eller tangenter. Nu gälla i polära koordinater följande ekvationer:

$$-d\varepsilon = dv + d\alpha; \quad rdv = \sin \alpha \,.\, ds; \quad dr = \cos \alpha \,.\, ds.$$

$$\therefore -\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{\sin \alpha}{r} + \frac{d\alpha}{dr} \,.\, \cos \alpha.$$

Insättas nu värdena på sin α och cos $\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dr}$, erhålles $\rho = \frac{1}{2C}$. Kurvan är sålunda en cirkel, ty det finns inga andra plana kurvor med konstant krökning. För $r = R$ är sin $\alpha = 0$. Kurvan är således en ortogonalcirkel till det givna klotet.

Det givna klotet med radien R, vars medelpunkt vi skola beteckna med O, kunna vi för korthetens skull kalla det *absoluta klotet* och beteckna det med ω. Detta klots ortogonalcirklar, den nya geometriens räta linjer, skola vi kalla o-cirklar. Dessa omfatta även de räta linjer, som gå genom O. Den nya geometriens plan bli givetvis de klot, som skära ω under räta vinklar; vi beteckna dem med o-klot. Innan vi gå vidare i studiet av dessa kurvor och ytor, måste vi ägna vår uppmärksamhet åt det slags transformationer, som kallas avbildningar med reciproka radier.

§ 15. Inversioner eller avbildningar med reciproka radier.

Givet är en cirkel med medelpunkten A och radien ρ. En inversion eller avbildning med reciproka radier med denna cirkel som inversionscirkel är en sådan transformation, att om punkten P motsvaras av punkten P' samt AP och AP' betecknas med r och r', följande relation gäller:

1) ..... $rr' = \rho^2$.

Därjämte skola vinkelbenen AP och AP' sammanfalla. Införas rätvinkliga koordinater med origo i O och beteckna vi de båda punkternas koordinater med respektive x, y och x', y', gälla således:

2) ..... $\frac{x}{\rho^2} = \frac{x'}{r'^2}; \frac{y}{\rho^2} = \frac{y'}{r'^2};$

men också

2') ..... $\frac{x'}{\rho^2} = \frac{x}{r^2}; \frac{y'}{\rho^2} = \frac{y}{r^2}.$

Genom räkning kan man lätt bevisa följande: *Varje inversion avbildar en cirkel i en cirkel och är konform, d. v. s. avbildar vinkeln mellan två kurvor i en lika stor vinkel mellan de motsvarande kurvorna.*

Härom kan man för övrigt övertyga sig utan räkning. Ligger punkten P på en cirkel med radien R, är medelpunktsavståndet från A för denna cirkel a och skär AP på denna cirkel ut en punkt S med avståndet s från A, så gäller följande bekanta likhet:

$$rs = a^2 - R^2.$$

Denna ekvation jämföres med ekv. 1. Vi finna då:

$$\frac{r'}{s} = \frac{\rho^2}{a^2 - R^2} = \text{konst.}$$

Punktraden P' är således likställd med punktraden S. Beskriver S en cirkel, beskriver P' en med denna likställd cirkel. I likställigheten äro P och P' ej homologa utan så kallade antihomologa punkter. Att avbildningen är konform, framgår av det upptäckta sambandet mellan inversion och likställighet.

Det behöver väl ej påpekas, att om punkten P i en inversion motsvaras av punkten P', motsvaras även P' av P, och att inversioner därför påminna om symmetriska avbildningar. Två inversioner kring samma inversionscirkel ge således till resultat identiteten. Däremot bör det kanske framhållas, att planets räta linjer måste räknas med till cirklarna, ty varje rät linje, som ej går genom inversionscentrum, avbildas i en cirkel genom inversionscentrum och tvärt om. Endast räta linjer genom inversionscirkelns medelpunkt förbli räta linjer. De motsvara sig själva.

Inversioner kring klot kunna avfärdas med den anmärkningen, att de kunna ersättas med inversioner kring de cirklar, som planen genom inversionscentrum utskära på inversionsklotet. Klot överföras således i klot, om vi betrakta planen som klot av speciell beskaffenhet. Endast planen genom inversionscentrum motsvaras av plan. De motsvara sig själva. Slutligen bör framhållas, att inversionscirkelns eller inversionsklotets centrum motsvaras av alla oändlighetspunkter, som därför böra uppfattas som en enda punkt.

§ 16. Hilberts axiom och den nya geometrien.

Vi återgå nu till det absoluta klotet ω och dess o-cirklar och o-klot. Varje o-cirkel motsvarar tydligen vid en inversion kring ω sig själv. En o-cirkel genom punkterna A och B går nämligen även genom de punkter A' och B', som vid inversionen kring ω motsvara A och B, och är därför fullt bestämd. Härav framgår genast riktigheten av följande: *Genom två punkter A och B, som ligga inom eller på det absoluta klotet ω, går en enda o-cirkel AB, nämligen den, som går genom A, B, A', B'.*

Ett ortogonalklot till ω är bestämt av en o-cirkel och en punkt utom denna. Ligger denna punkt i o-cirkelns plan, är o-klotet ett plan genom O. Ett o-klot innehåller alla o-cirklar genom två av dess punkter, om dessa senare ligga inom ω. Således: *Ett o-klot är bestämt av tre punkter inom eller på det absoluta klotet, om dessa tre punkter ej tillhöra samma o-cirkel. Två o klot, som ha en gemensam punkt, ha en gemensam o-cirkel.*

Vi ha således bevisat följande viktiga sats:

Utbytas i axiomen i Hilberts första grupp »punkt» mot »punkt inom det absoluta klotet», »rät linje» mot »o-cirkel» eller »ortogonalcirkel till det absoluta klotet», »plan» mot »o-klot» eller »ortogonalklot till det absoluta klotet», förbliva dessa satser fortfarande riktiga.

Äro A och B två punkter inom klotet ω, kunna vi definiera »sträckan AB» som den o-cirkelbåge AB, vars alla punkter ligga inom det absoluta klotet ω. Varje punkt C på »sträckan» AB, säges ligga »mellan» A och B. En »sträcka» AB kan från o-cirkeln AB:s medelpunkt M projicieras av vinkelben MC, som ligga mellan vinkelbenen MA och MB. Hilberts axiom II: 1—3 gälla därför, emedan de gälla för vinkelbenen mellan två vinkelben.

Varje klot delar de av rummets punkter, som ej ligga på klotet, i två klasser, inre och yttre punkter. Ett o-klot α delar således det absoluta klotets inre punkter i sådana, som ligga inom både α och ω, samt i sådana, som ligga inom ω men utom α. Naturligtvis bortse vi då från α:s egna punkter. Tillhör punkten A den första, punkten B den andra klassen, måste o-cirkeln AB skära α i två punkter C och C'. Dessa motsvara varandra i inversionen kring ω. Endast en av dem ligger därför inom ω. Vi ha således visat, att varje o-klot delar det absoluta klotets inre punkter i två klasser, så att om A och B tillhöra var sin av dessa klasser, »sträckan» AB och o-klotet ω ha en gemensam punkt. Eftersom en o-cirkel och ett o-klot endast skära varandra i *en* punkt inom ω, måste om ett o-klot och »sträckan» AB ha en gemensam punkt C, A och B tillhöra var sin av ovannämnda klasser. Det är sålunda tydligt, att axiomet II:4 gäller. Således:

Hilberts anordningsaxiom kunna tillämpas på det absoluta klotets inre punkter, dess o-cirklar och o-klot.

Varje sats, som stöder sig uteslutande på axiomen i grupperna I och II förblir således riktig, om »rät linje» och »plan» utbytas mot »o-cirkel» och »o-klot till ett givet klot» ω, »punkt» mot »punkt inom ω». Desargues' sats, satsen om den fjärde harmoniska punktens entydighet och över huvud taget den projektiva geometriens alla satser tillåta en sådan översättning. Det syns således, att en sträng grundläggning av geometrien och en undersökning av de enskilda

axiomens räckvidd äro av stor praktisk betydelse. Desargues' sats, översatt på det nya geometriska språket, vore det kanske ej så enkelt att direkt bevisa.

Ekvationerna för ortogonalkloten till det absoluta klotet ω äro, om ett rätvinkligt koordinatsystem med origo i O, införes:

1) ..... $x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+R^2=0,$

där A, B, C äro parametrar. Att genom räkningar bevisa föregående satser är således en enkel sak. Dessa ekvationer kunna göras linjära genom följande substitution:

2) ..... $\frac{x'}{R^2}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+R^2}$ (3 st.)

Mot varje reell punkt x, y, z svarar en reell punkt x', y', z'. Denna senare motsvarar också den punkt, som är bilden av x, y, z vid inversion kring ω. Även mot vissa imaginära punkter (x, y, z), svara reella punkter (x', y', z'). Man finner lätt, att om x, y, z äro reella, gäller $x'^2+y'^2+z'^2<R^2$. Är $x'^2+y'^2+z'^2>R^2$, motsvarar den reella punkten x', y', z' två imaginära punkter x, y, z. Tydligt är, att transformationen avbildar o-cirklarna och o-kloten på den euklideiska geometriens räta linjer och plan, så att snittpunkterna mellan två o-cirklar motsvara snittpunkten mellan de motsvarande räta linjerna. Det absoluta klotet avbildas i sig självt. Två o-cirklar, som skära varandra i punkter, som ej ligga på det absoluta klotet, motsvaras av två räta linjer, som skära varandra *inom* det absoluta klotet. Två o-cirklar, som ej skära varandra, motsvaras av två räta linjer, som skära varandra *utom* det absoluta klotet. Längre fram skola vi studera denna transformation ur andra synpunkter.

Däremot bör det genast nu framhållas, att denna transformation *ej* är konform. Det framgår ju därav, att en triangels vinkelsumma i den nya cirkelgeometrien tydligen alltid är mindre än två räta. Vidstående figur visar en triangel, vars alla vinklar äro noll. Dess hörnpunkter ligga visserligen på det absoluta klotet, och triangeln är således ingen egentlig triangel. Av exemplet framgår dock, att det finns trianglar med hur liten vinkelsumma som helst. Parallellaxiomet är sålunda ej giltigt inom den nya cirkelgeometrien. Däremot gälla kontinuitetsaxiomen. Som koordinater användas ju de reella talen. Därför gäller V:2. Att V:1 gäller, inser man genast av framställningen i nästa paragraf.

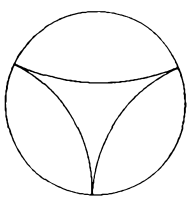

Fig. 24.

Vi gå nu att betrakta inversionerna kring det absoluta klotets o-klot. Är medelpunkten i ett sådant punkten a, b, c, gälla enligt § 15 transformationsformlerna

3) ... $\frac{x'-a}{\rho^2}=\frac{x-a}{r^2}$ (3 st.), där $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ och $\rho^2=a^2+b^2+c^2-R^2$, jämte

3') ..... $\frac{x-a}{\rho^2}=\frac{x'-a}{r'^2}$ (3 st.)

Att dessa transformationer ej förändra vinklarnas storlek, är redan bevisat. Att de ej heller förändra »sträckornas» storlek, uppvisas genom att genom räkning bevisa följande likhet:

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{R^2-(x^2+y^2+z^2)}=\frac{\sqrt{dx'^2+dy'^2+dz'^2}}{R^2-(x'^2+y'^2+z'^2)}.$$

Transformationerna överföra således »sträckor» och »vinklar» i lika stora »sträckor» och vinklar. De överföra vidare det absoluta klotets inre punkter i dess inre punkter.

Bland dessa transformationer finns en, som överför en efter behag vald inre punkt A i det absoluta klotets medelpunkt O. Utan att problemet inskränkes, kunna vi beteckna A:s koordinater med x_1, 0, 0. Följande inversion är den sökta:

4) ..... $\frac{x'-a}{a^2-R^2}=\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2+z^2}$ (3 st.), där $a=\frac{R^2}{x_1}$.

O är således ej någon punkt, som i något hänseende skiljer sig från de andra av det absoluta klotets inre punkter. Transformationen tillåter oss att utbyta varje punkt mot O, vilket är av stor fördel, emedan räkningarna därigenom förenklas. Önska vi studera förhållandena på ett o-klot, kan detta genom en dylik transformation utbytas mot ett o-klot, som är ett plan genom O. Varje o-cirkel kan genom en dylik transformation överföras i en rät linje genom O o. s. v. »Lika sträckor» OA, OB i O äro även i vanlig bemärkelse lika. Man inser således genast, att *hela gruppen III av Hilberts axiom äro giltiga*, ty III: 1—3, 6 äro giltiga i O, således alltid giltiga. Att III: 4—5 gälla, inses ju omedelbart, emedan »lika vinklar» äro i verklig mening lika vinklar.

§ 17. Trigonometrien i den nya geometrien.

Låt oss betrakta följande o-cirkel:

1) ..... $x^2+y^2-\frac{s^2+R^2}{s}x+R^2=o$

Den skär x-axeln i punkten $x=s$. Dess radie ρ bestämmes av $\rho=\frac{R^2-s^2}{2s}$.

Övergå vi till polära koordinater r och v, övergår 1) i

2) ..... $\cos v=\frac{R^2+r^2}{r}:\frac{R^2+s^2}{s}$

Införa vi slutligen värdet på ρ i ekv. 2, § 14 och erinra oss, att $2C=\frac{1}{\rho}$, bestämmes vinkeln α mellan o-cirkeln och radiusvektor i punkten r, v av ekvationen:

3) ..... $\sin\alpha=\frac{R^2-r^2}{r}:\frac{R^2-s^2}{s}$.

Slutligen beräkna vi ur ekv. 1, § 14 »avståndet» σ mellan O och punkten med koordinaterna r, v. Vi erhålla då:

4) ..... $\sigma=\frac{k}{2R}\log\frac{R+r}{R-r}$ eller:

4') ..... $r=R.\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=Rth\ x$, där $x=\frac{R\sigma}{k}$,

om, som vanligt, funktionerna $\operatorname{sih} x$, $\operatorname{coh} x$, $\operatorname{th} x$ definieras av:

$\operatorname{sih} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-i\sin ix$; $\operatorname{coh} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cos ix$; $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sih} x}{\operatorname{coh} x}$, där i är den imaginära enheten.

Vi sätta slutligen $k=2R$, varigenom de följande formlerna bli enklare.

Låtom oss nu studera en vid C rätvinklig triangel ABC! Låt B sammanfalla med det absoluta klotets medelpunkt O, och kalla »längderna» på de »sidor», som stå emot A, B, C för A, B, C respektive, vinklarna α, β, γ respektive! Vinkeln γ är rät. Tillämpa vi nu våra formler

2, 3, 4', erhållas följande fundamentala trigonometriska formler för en rätvinklig triangel:

I'. ..... $\sin \alpha = \frac{\text{sih } A}{\text{sih } C}$; $\sin \beta = \frac{\text{sih } B}{\text{sih } C}$,

II' ..... $\cos \beta = \frac{\text{th } A}{\text{th } C}$; $\cos \alpha = \frac{\text{th } B}{\text{th } C}$,

III'. ..... $\text{coh } C = \text{coh } A \,.\, \text{coh } B$.

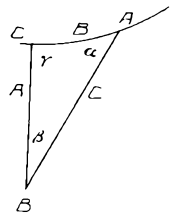

Fig. 25.

För att härleda dessa formler behöver man blott sätta $v = \beta$, $r = th\frac{C}{2}$; $s = th\frac{A}{2}$. Då erhållas ögonblickligen I' och II', om man övergår till sin i x, cos i x och tillämpar kända trigonometriska additionsteorem. Formeln III' erhålles med lätthet ur de båda andra.

Sönderdelas en triangel vilken som helst i två rätvinkliga och tillämpas på dessa de härledda trigonometriska formlerna, erhållas följande allmänna trigonometriska formler utan svårighet, om de trigonometriska additionsteoremen användas:

I ..... $\frac{\text{sih } A}{\sin \alpha} = \frac{\text{sih } B}{\sin \beta} = \frac{\text{sih } C}{\sin \gamma}$ (Sinusteoremet).

II ..... $\text{coh } C = \text{coh } A \text{ coh } B - \text{sih } A \text{ sih } B \cos \gamma$ (Första cosinusteoremet).

III ..... $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \text{ coh } C$ (Andra cosinusteoremet).

Betrakta vi ekv. 4, finna vi, att σ växer kontinuerligt med r från $\sigma = o$ för $r = o$ till $\sigma = \infty$ för $r = R$. »Avståndet» mellan en punkt inom och en punkt utom det absoluta klotet är imaginärt. Det absoluta klotets yttre punkter äro ju emellertid uteslutna, räknas ej som punkter i den nya cirkelgeometrien.

Ur formeln III härledes med lätthet $-\cos(\alpha + \beta) < \cos \gamma$, d. v. s. $180° - \alpha - \beta > \gamma$. Vinkelsumman i en triangel är således alltid mindre än två räta, vilket vi ju redan förut visste.

Som en lättnad för läsaren anföres följande lätt verifierbara formler: $\text{coh}^2 x - \text{sih}^2 x = 1$; $\text{coh}(x + y) = \text{coh } x \text{ coh } y + \text{sih } x \text{ sih } y$; $\text{sih}(x + y) = \text{sih } x \text{ coh } y + \text{coh } x \text{ sih } y$. Naturligtvis äro även negativa x-värden tillåtliga. Genast inses riktigheten av: $\text{coh}(-x) = \text{coh } x$; $\text{sih}(-x) = -\text{sih } x$; $\text{th}(-x) = -\text{th } x$.

Det har redan förut nämnts, att Lobatscheffsky och Bolyai genom att förkasta parallellaxiomet konstruerade ett nytt geometriskt system, vars plana trigonometri de lyckades härleda. Deras trigonometri är identisk med den nu härledda trigenometrien inom ortogonalcirkelgeometrien. Det förutsågs redan av den skarpsinnige Lambert, som påpekade, att om det existerade en geometri, i vilken en triangels vinkelsumma är mindre än två räta, borde dess plana trigonometri kunna erhållas ur den sfäriska genom att göra sidorna imaginära. Att så verkligen är förhållandet, framgår genast vid jämförandet mellan grundformlerna I, II, III och den sfäriska trigonometriens grundformler. Dessa är som bekant följande:

A ..... $\frac{\sin A}{\sin \alpha} = \frac{\sin B}{\sin \beta} = \frac{\sin C}{\sin \gamma}$ (Sinusteoremet).

B ..... $\cos C = \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos \gamma$ (Första cosinusteoremet).

C ..... $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C$ (Andra cosinusteoremet).

Hur förhåller det sig med cirkelgeometriens sfäriska trigonometri, d. v. s. vilka samband bestå mellan sidor och vinklar i en trekant? På denna fråga kan man ögonblickligen lämna svaret: *Cirkelgeometriens sfäriska trigonometri är densamma som den euklideiska geometriens sfäriska trigonometri.* Denna gäller ju i O, det absoluta klotets medelpunkt, emedan där ortogonalcirklarna

och de euklideiska räta linjerna äro identiska. *Den sfäriska trigonometrien är således oberoende av parallellaxiomet.* Bevisandet av denna viktiga sats var ett av de första och viktigaste stegen på Lobatscheffskys mödosamma väg fram till den icke-euklideiska geometriens plana trigonometri.

Lambert framhöll, att om parallellaxiomet förkastades, existerade ett absolut mått på sträckor, i det att till varje sträcka kunde tillordnas en bestämd vinkel, den så kallade parallellitetsvinkeln (se § 13). Denna parallellitetsvinkel kan nu beräknas. Antag, att i punkten A på »avståndet» S från räta linjen a, den spetsiga vinkel, som bildas av normalen mot a från A och den ena av de linjer, som skilja de a skärande från de a icke skärande linjerna genom A, är v. Denna vinkel kunna vi beräkna ur II' genom att låta C växa över alla gränser, d. v. s. göra $thC = 1$. Vi få då följande relation:

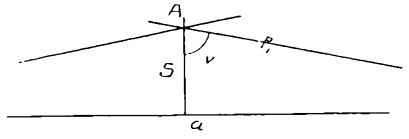

Fig. 26.

1) ..... $\cos v = thS.$

Mot $S = 1$ svarar $\cos v = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$.

I vår distansformel ingick ursprungligen en villkorlig konstant k, som vi sedan satte till $2R$. Hade den i stället satts till $2R^2$, hade $\frac{A}{R}$ uppträtt i stället för A, således fortfarande en villkorlig konstant uppträtt. Det kan ha sitt intresse att se vad det då blir av våra trigonometriska formler, om R får växa över alla gränser. Genom att utveckla funktionerna sih A o. s. v. i Taylors serie och sedan låta R växa, övergår I i det vanliga sinusteoremet, II i cosinusteoremet och III i $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta)$, d. v. s. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Till detta resultat kommer man naturligtvis också genom att göra A, B, C små. I infinitesimala trianglar gäller således den vanliga plana trigonometrien.

§ 18. Ortogonalcirkelgeometrien och den hyperboliska geometrien.

Lobatscheffskys och Bolyais geometriska system brukar man ofta kalla för den hyperboliska geometrien. Denna term är föreslagen av F. Klein.

Gemensamt för ortogonalcirkelgeometrien och den hyperboliska geometrien är förkastandet av parallellaxiomet men bibehållandet av alla övriga satser. Då nu också den enas trigonometri sammanfaller med den andras, kan ej längre sanningen av följande påstående betvivlas. *Ortogonalcirkelgeometrien och den hyperboliska geometrien äro identiska. Den ena geometriens satser gälla i den andra.* Eftersom ortogonalcirkelgeometrien står eller faller med den euklideiska, är givetvis *den hyperboliska geometrien ett system av satser, som ej motsäga varandra,* och *parallellaxiomet är oberoende av alla andra axiom i Hilberts system.*

Vill man studera den hyperboliska geometrien, kan man således studera ortogonalcirklarna till ett klot, vilket i allmänhet är en lättare uppgift, emedan åskådningen hjälper en framåt, under det att vid det direkta studiet av den hyperboliska geometrien åskådningen direkt hindrar. Naturligtvis kan man också vid studiet av cirkelgeometrien ha nytta av den hyperboliska geometrien. Med dess hjälp kan man med lätthet hitta en ganska elegant lösning till det bekanta problemet att finna en cirkel, som tangerar tre givna cirklar, vilken uppgift får betraktas som rätt svår.

I § 16 omnämndes en intressant kvadratisk transformation, som gjorde o-cirklarnas och o-klotens ekvationer linjära. Låt oss då i ekv. 2 § 16 införa polära kordinater, r, v, φ. Den övergår då i

1) ..... $\frac{r'}{R^2} = \frac{2r}{R^2 + r^2}$, $v' = v$, $\varphi' = \varphi$

Införas förmedelst ekv. 4', § 17 σ och σ', övergår 1 i

2) ..... $\sigma' = 2\,\sigma$.

Det rationellaste sättet att i den hyperboliska geometrien i planet[1] införa rätvinkliga koordinater är därför följande. De mot varandra vinkelräta kondinataxlarna OX och OY, på vilka positiva riktningar äro fixerade, väljas efter behag. Från den efter behag valda punkten P fällas normaler mot dessa axlar. Deras fotpunkter må vara P_x och P_y. $OP_x = X$, $OP_y = Y$. Det bör observeras, att PP_y och OP_x ej är lika, ej heller PP_x och OP_y, samt att vinkeln vid P ej är rät. Vi definiera nu koordinaterna x och y för punkten P på följande sätt:

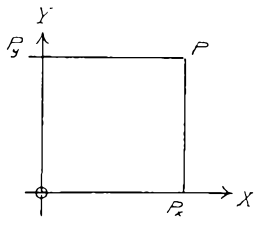

Fig. 27.

3) ..... $x = Rth\ X;\ y = Rth\ Y.$

Räta linjernas ekvationer bli då av första graden i x och y.

Mot reella ändliga värden på X och Y svara reella x- och y-värden, som satisfiera $x^2 + y^2 < R^2$. Oändliga värden på X och Y eller på endera ger $x^2 + y^2 = R^2$. Reella x- och y-värden, för vilka $x^2 + y^2 > R^2$ gäller, motsvara imaginära värden på X, Y. I cirkelgeometrien motsvara ett sådant par x, y de imaginära snittpunkterna mellan två varandra ej skärande o-cirklar. I rummet gälla naturligtvis motsvarande påståenden.

Ortogonalcirklarna till det absoluta klotet och räta linjerna inom den hyperboliska geometrien äro således genom denna transformation avbildade på de euklideiska räta linjerna. Avbildningen är ej konform. *Den euklideiska projektiva geometrien och den hyperboliska projektiva geometrien måste dock vara identiska*, ty för att uppbygga den analytiska projektiva geometrien behöver man endast stödja sig på att räta linjernas och planens ekvationer äro linjära. För att alla plan skola skära varandra, adjungeras inom den euklideiska geometrien de så kallade oändlighetspunkterna. Inom den hyperboliska får man adjungera punkterna utom och på klotet $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Dessa oegentliga punkter kunna oberoende av koordinatbegreppet införas på det sätt, som i § 3 skisserades.

§ 19. Knippen av o-cirklar och deras ortogonalcirklar.

Vi betrakta en cirkel och en punkt P i dess plan samt draga genom P en rät linje efter behag. Låt denna skära cirkeln i punkterna A och B. Som bekant är produkten av sträckorna PA och PB konstant. Denna för punkten P karakteristiska produkt, försedd med lämpligt tecken, kallas *cirkelns potens i P*. Vi förse den med positivt tecken, om P ligger utom cirkeln, med negativt tecken, om P ligger inom. Från varje punkt med positiv potens kunna således två tangenter dragas till cirkeln; från en punkt med negativ potens är det omöjligt att draga tangenter till cirkeln. Ligger punkten P på cirkeln, är cirkelns potens i denna punkt noll.

Orten för punkter, i vilka två cirklar ha lika potens, kallas *potenslinje* eller *radikalaxel*. Den är som bekant en rät linje, som går genom de båda cirklarnas snittpunkter, om sådana finnas.

Cirklar med gemensam radikalaxel i samma plan sägas bilda ett *plant cirkelknippe*. Tangera två cirklar i ett knippe varandra, måste de i tangeringspunkten A tangera radikalaxeln a. Radikalaxeln tangeras således i A av alla individerna i knippet. De olika individernas medelpunkter ligga på normalen b till a genom punkten A. Varje cirkel, som har sin medelpunkt på a och går genom A, skär varje individ i knippet under räta vinklar och tangerar b i A. Kalla vi ett knippe cirklar, som tangera en rät linje i en given punkt, för ett *paraboliskt* cirkelknippe, ha vi således bevisat följande: *Ortogonalcirklarna till ett paraboliskt cirkelknippe bilda ett paraboliskt cirkelknippe.*

Skär i ett cirkelknippe en enda individ knippets radikalaxel i två punkter A och B, måste alla individer i knippet gå genom dessa båda punkter. Ett cirkelknippe med två fixpunkter kallas ett *elliptiskt* knippe. I detta spela två individer en särskild roll, radikalaxeln AB och den

[1] I rummet förfar man på liknande sätt.

cirkel, som har AB till diameter. Välja vi nu på räta linjen AB en punkt P, som ej ligger på sträckan AB, men för övrigt var som helst, kunna ju från denna lika tangenter dragas till knippets alla cirklar. Med P som medelpunkt går således en fullt bestämd cirkel, som skär knippets alla cirklar under räta vinklar. Det är lätt att inse, att dessa ortogonalcirklar i varje punkt på AB:s mittpunktsnormal ha lika potens. *Ett elliptiskt knippes ortogonalcirklar bilda således ett knippe.* Det inses genast, att två individer i detta knippe ej kunna skära varandra. Ett sådant knippe kallas *hyperboliskt.* Knippet består av två system av cirklar, som skiljas åt genom deras radikalaxel. Det ena består av cirklar, som omsluta A; det andra av cirklar, som omsluta B. Dessa punkter kunna betraktas som individer i knippet och kallas såsom sådana det hyperboliska knippets punktcirklar. Tydligen består varje hyperboliskt knippe av ortogonalcirklar till ett givet elliptiskt knippe. Således:

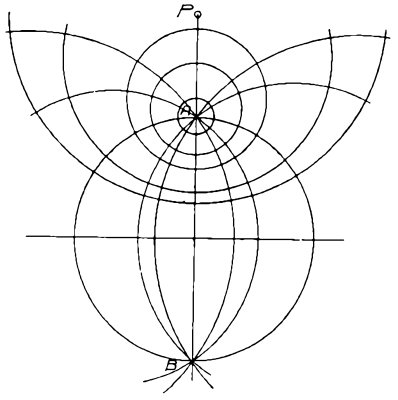

Fig. 28.

Ortogonalcirklarna till ett elliptiskt cirkelknippe bilda ett hyperboliskt cirkelknippe; ortogonalcirklarna till ett hyperboliskt cirkelknippe bilda ett elliptiskt cirkelknippe.

Det är tydligt, att ekvationerna för individerna i ett plant cirkelknippe kunna skrivas på följande sätt:

$$x^2+y^2+2\,A\,x+2\,B\,y+C+k\,(A'x+B'\,y+C')=0,$$

där k är en parameter, $A'x+B'\,y+C'=0$ radikalaxeln och $x^2+y^2+2\,A\,x+2\,B\,y+C=0$ ekvationen för en efter behag vald individ i knippet.

På ett klot α bestämmes ett cirkelknippe av planen genom en rät linje r. Detta knippe är elliptiskt, hyperboliskt eller paraboliskt, om den räta linjen r skär, icke råkar eller tangerar klotet α. *En inversion kring ett klot överför ett knippe cirklar på ett klot i ett cirkelknippe på samma eller på ett annat klot.* Klotet α överföres nämligen i ett bestämt klot α', planen genom r i kloten genom den mot r svarande cirkeln r'. Knippets individer bestämmas sålunda av följande ekvationer:

$$x^2+y^2+z^2+2\,A\,x+2\,B\,y+2\,C\,z+D=0. \quad \text{(klotet } \alpha')$$

$$x^2+y^2+z^2+2\,A'x+2\,B'y+2\,C'z+D'+k\,(a\,x+b\,y+c)=0, \quad \text{(kloten genom } r')$$

eller av ekvationen för klotet α' och följande plan:

$$2\,(A'-A)\,x+2\,(B'-B)\,y+2(C'-C)\,z+D'-D+k\,(a\,x+b\,y+c)=0,$$

vilka plan tydligen gå genom en och samma räta linje. Att elliptiska knippen överföras i elliptiska, hyperboliska i hyperboliska och paraboliska i paraboliska, är självklart.

Väljes nu inversionsklotet så, att det går genom centrum i klotet α, avbildas detta som bekant i ett plan, cirkelknippet på α således i ett plant cirkelknippe. Känner man egenskaperna hos det plana cirkelknippet, känner man därför egenskaperna hos cirkelknippena på ett klot.

Vi övergå nu till det absoluta klotets ortogonalcirklar. Två sådana cirklar a och b, som ligga på samma o klot γ, bestämma ett *knippe av o-cirklar* på följande sätt. De plan, i vilka a och b ligga, skära varandra längs en rät linje r genom O, det absoluta klotets medelpunkt. Planen genom r utskära på γ knippets individer. Vi utföra nu en inversion, så att o-klotet γ avbildas på ett av de o-klot, som går genom O, d. v. s. på ett plan genom O. Vi få då studera ett plant knippe, varigenom undersökningen blir enklare, utan att dess allmängiltighet inskränkes. Detta plan antages skära det absoluta klotet ω i cirkeln o. Både elliptiska, hyperboliska och paraboliska knippen förekomma. De senare lämna vi tills vidare å sido.

Ett elliptiskt knippe av o-cirklar består av alla o-cirklar, som gå genom två fixa punkter M och M', som äro varandras bilder i inversionen kring cirkeln o. En av dem, låt vara M, ligger inom o. Knippet är sålunda karakteriserat av att alla dess individer gå genom M. Knip-

pets ortogonalcirklar bilda ett hyperboliskt knippe. Bland dem finns o, som således ej kan råka någon annan individ i detta senare knippe. Av denna anledning finns ingen o-cirkel med inom knippet. Utföra vi inversioner kring o-cirklarna genom M, måste dessa o-cirklars ortogonalcirklar motsvara sig själva. Eftersom dessa inversioner överföra »sträckor» i »lika sträckor» gäller:

En ortogonalcirkel till o-cirklarna genom en punkt M har den egenskapen, att alla dess punkter ligga »lika långt» från M. I den hyperboliska geometrien motsvaras därför ett elliptiskt o-cirkelknippe och dess ortogonalcirklar av ett knippe räta linjer genom en fix punkt M och cirklarna med M till medelpunkt.

Vi gå nu till ett hyperboliskt knippe av o-cirklar och dess elliptiska ortogonalcirkelknippe. Till detta senare hör även o. Dess fixpunkter A' och B' ligga således på o. Genom dessa båda punkter går knippets enda o-cirkel $A'B'$. (På figuren är denna en diameter i o.) *Ett hyperboliskt knippe av o-cirklar kan således definieras som sammanfattningen av de o-cirklar, som skära en given o-cirkel under räta vinklar.*

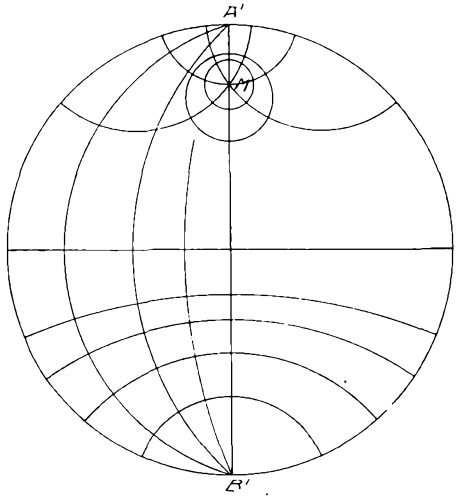

Fig. 29.

Inversionerna kring det hyperboliska o-cirkelknippets individer överföra dess ortogonalcirklar i sig själva, således även o-cirkeln $A'B'$. Det är då klart, att *ortogonalcirklarna till ett hyperboliskt o-cirkelknippe äro att betrakta som orten för punkter, som ligga på lika avstånd från den o-cirkel, som skär o cirkelknippets alla individer under räta vinklar.*

I den hyperboliska geometrien gäller sålunda, att ortogonaltrajektorierna till de räta linjer i ett plan, som skära en rät linje a under räta vinklar, ha den egenskapen, att alla punkter på var och en av dem ligga lika långt från a.

Egenskaperna hos räta linjer genom en och samma punkt och hos de ytor, som skära dessa under räta vinklar, liksom egenskaperna hos ett plans normaler och de mot dem vinkelräta ytorna torde nu omedelbart inses.

§ 20. Den hyperboliska geometriens absoluta polarsystem.

Villkoret för att två cirklar

$$x^2+y^2+2\,A\,x+2\,B\,y+C=o, \quad x^2+y^2+2A'x+2\,B'y+C'=o$$

skola skära varandra under räta vinklar är:

$$C+C'=2\,AA'+2\,BB'.$$

Ortogonalitetsvillkoret för två o cirklar är således, då för dem $C=R^2$ gäller, följande:

1) ..... $AA'+BB'=R^2$.

Denna ekvation uttrycker också villkoret för att de två räta linjerna

2) ..... $A\,x+B\,y+R^2=o, \quad A'x+B'y+R^2=o$

i den hyperboliska geometrien skära varandra under räta vinklar.

Är den räta linjen med koordinaterna A, B given, finner man, att om ekv. 1 gäller, de räta linjerna $A'x+B'y+R^2=o$ samtliga passera genom punkten med koordinaterna $x_1=-A$, $y_1=-B$. Denna punkt kallas den *absoluta polen* till räta linjen $A\,x+B\,y+R^2=o$. Likaledes finner man, att absoluta polerna till alla räta linjer genom punkten x_1, y_1 ligga på räta linjen

3) ..... $x x_1 + y y_1 = R^2$.

Denna räta linje kallas den *absoluta polaren* till punkten x_1, y_1.

Vi observera, att räta linjen 3) är polaren till x_1, y_1 med avseende på cirkeln $x^2 + y^2 = R^2$.

I rummet gälla motsvarande påståenden. Således:

Alla normaler till ett plan α gå genom en och samma oegentliga punkt A', α:s absoluta pol. Orten för polerna till alla plan, som gå genom en och samma punkt A, är ett oegentligt plan α', A:s absoluta polarplan. Orten för de absoluta polarplanen till punkterna på en rät linje a eller orten för de absoluta polerna till planen genom a är en oegentlig rät linje a', a:s konjugerade absoluta polar. Genom a' gå a:s alla normalplan. Det absoluta polarsystemet är det absoluta klotets polarsystem.

I den euklideiska geometrien kunna vi således införa den hyperboliska genom att välja ett klot ω efter behag, det absoluta klotet, och kalla alla dess inre punkter för verkliga punkter, de återstående för oegentliga. Normalerna till ett plan α definieras som de räta linjer, som gå genom polen A' till α med avseende på klotet ω. Normalplanen till en rät linje a äro de plan, som gå genom snittlinjen a' mellan polarplanen till två punkter på a. Innehåller planet α egentliga punkter, d. v. s. är α ett egentligt plan, är A' en oegentlig punkt. Av de båda räta linjerna a och a', de konjugerade polarerna, innehåller den ena egentliga, den andra endast oegentliga punkter, såvida ej a och i så fall även a' tangerar det absoluta klotet. Det absoluta klotet är att betrakta som orten för punkter, som ligga i sina polarplan.

Polariteten i ett plan α är bestämd av snittkurvan mellan α och det absoluta klotet. Denna är en cirkel, om α är ett egentligt plan. Är α ett oegentligt, det absoluta klotet ej tangerande plan, är denna cirkel imaginär. Polariteten i ett sådant plan α' är icke desto mindre bestämd. Projiciera vi planet från den egentliga punkt A, som är polen till α' (α' är då polarplan till A), projicieras en punkt P och dess polar p' i α' i en stråle p och dess normalplan π'. I varje punkt A är således också en polaritet bestämd, så att mot varje rät linje p genom A svarar ett plan π', p:s polar. Så är givetvis förhållandet, även om A är en oegentlig punkt. I detta senare fall finns det räta linjer, som ligga i sina egna polarer. De generera den tangentkon till det absoluta klotet, som har sin spets i A. Är A egentlig, är denna tangentkon imaginär.

I varje plan, som tangerar det absoluta klotet, och i varje punkt på det absoluta klotet är polariteten urartad. Räta linjer och plan genom en sådan punkt, »parallellerna», måste därför ha särskilda egenskaper. Vi skola studera dem i § 21.

För att definiera en andragradsyta behövs inga måttbegrepp. Den projektiva geometrien är i stånd att definiera dem. Den förmår endast urskilja tre slags andragradsytor: imaginära ytor, reella linjerbara och reella ej linjerbara. Till det senare slaget hör klotet. Den hyperboliska geometrien kan således införas i den projektiva genom att välja en reell, ej linjerbar andragradsyta till det absoluta. *Kongruenta avbildningar definieras sedan som sådana projektiva avbildningar, som avbilda en punkt A och dess polarplan α' i en punkt B och dess polarplan β', d. v. s. avbilda det absoluta i sig självt.*

Hur det går, om vi välja en imaginär andragradsyta till det absoluta, skola vi få se i § 22. En reell linjerbar yta kan ej gärna väljas till det absoluta. Från varje punkt kan nämligen till en sådan läggas en reell tangentkon. I alla punkter skulle det således finnas räta linjer, som låge i sina polarer, d. v. s. i sina normalplan.

Den euklideiska geometriens absoluta andragradsyta är en degenererad sådan. Det absoluta i varje punkt a, b, c är givetvis en imaginär kon: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = o$. Den utskär i oändlighetsplanet den så kallade »imaginära klotcirkeln». Genom denna går nämligen varje klot. Euklideiska geometriens absoluta system är således oändlighetsplanets »imaginära klotcirkel». Det absoluta i planet äro de på oändlighetslinjen belägna »imaginära cirkelpunkterna», planets snittpunkter med den imaginära klotcirkeln.

Låt oss nu återgå till den hyperboliska geometrien och betrakta två plan α och β, som ej skära varandra i någon egentlig punkt och ej heller råkas på det absoluta klotet. Deras poler må vara A' och B'. *Räta linjen $A'B'$ är då deras gemensamma normal.* Denna linje innehåller egent-

liga punkter, ty snittlinjen mellan α och β, som är $A'B'$:s konjugerade polar innehåller ju idel oegentliga punkter och tangerar ej det absoluta. *Två räta linjer a och b i samma plan, som ej skära varandra och ej äro »parallella», ha således en gemensam normal.* Uppenbarligen kan denna lätt konstrueras. Genom att på sätt som i § 3 visats, bestämma snittpunkterna mellan a och b samt den av två oegentliga punkter bestämda räta linjen $A'B'$, som går genom a:s och b:s poler A' och B', är denna normal $A'B'$ bestämd av två egentliga punkter.

Slutligen härleda vi de formler, som i den hyperboliska geometrien förmedla övergången från ett rätvinkligt koordinatsystem till ett annat. Vi kunna begränsa oss till planet och övergå då först till ett rätvinkligt koordinatsystem, som uppstått ur det givna genom en translation längs x-axeln. Koordinaterna i det gamla systemet beteckna vi med x och y, i det nya med x' och y' Det nya systemets origo må ha koordinaterna a, o. Vi införa först de i § 18 definierade X, Y, X', Y', A.

Vi gå först till två rätvinkliga trianglar ABC' och ABC' med sammanfallande hypotenusa C. Vinkeln mellan hypotenusan C och kateten B må vara α; vinkeln mellan C och kateten $A'=BC'$ välja vi till $90-\alpha$. Med formlerna I', II', III' bevisar man då lätt följande relation:

$$\operatorname{th} A' = \frac{\operatorname{th} A}{\operatorname{coh} B}.$$

Denna formel skola vi använda på koordinattransformationen. Bokstävernas betydelse framgår av figuren. Vi erhålla då följande formler:

$$\frac{\operatorname{th} Y'}{\operatorname{th} Z} = \frac{1}{\operatorname{coh} X'}; \quad \frac{\operatorname{th} Y}{\operatorname{th} Z} = \frac{1}{\operatorname{coh} X}; \quad X = A + X'.$$

$$\frac{\operatorname{th} Y'}{\operatorname{th} Y} = \frac{\operatorname{coh} X}{\operatorname{coh}(X-A)}$$

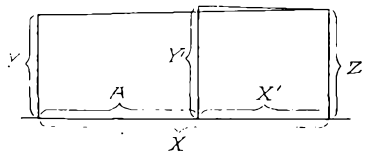

Fig. 30.

Återgå vi nu till x, y, x', y', a förmedels ekv. 3 § 18, erhålla vi:

$$4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad x' = \frac{x-a}{1-\frac{a\,x}{R^2}}; \quad y' = \frac{y\sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}}}{1-\frac{a\,x}{R^2}}$$

I rummet kompletteras dessa av:

$$4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad z' = \frac{z\sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}}}{1-\frac{a\,x}{R^2}}$$

Eftersom alla rörelser kunna reduceras på en translation och en vridning och formlerna för vridning av ett koordinatsystem givetvis äro desamma som i den euklideiska geometrien, är således problemet att utföra en koordinattransformation löst. Vi komplettera dessa formler genom att ge ekvationen för ett klot med centrum i punkten a, b, c och radien S. Vi sätta: $\rho = R\,th\,S$. Då blir klotets ekvation:

$$5) \quad R^2\,[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]-[(ay-bx)^2+(bz-cy)+(cx^2-az)^2]=\rho^2\left[R-\frac{a\,x+b\,y+c\,z}{R}\right]^2.$$

Ekvationen erhålles givetvis genom att hänföra $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ till ett koordinatsystem med origo i a, b, c.

Är a, b, c en verklig punkt, betyder ekv. 5 ett klot, d. v. s. orten för punkter, som ha samma avstånd till punkten a, b, c. Är däremot denna punkt oegentlig och ligger den ej på det absoluta klotet, är det klart, att ekv. 5 betyder orten för punkter på lika avstånd från det absoluta polarplanet till punkten a, b, c, d. v. s. planet $ax+by+cz=R^2$.

Sätta vi $z=o$ och $b=c=o$ samt göra a oändlig, övergår 5 i

6) . . . . . $\rho^2x^2+R^2y^2=R^4$.

Detta är orten för de punkter i xy-planet, som ha konstant avstånd från y-axeln. Orten går genom punkterna $x=o$, $y=\pm R$. Den motsvarar i cirkelgeometrien två cirklar genom dessa båda punkter.

§ 21. Den hyperboliska geometriens paralleller och gränsklot.

Givna i ett och samma plan äro räta linjen a, en punkt A utom den och alla räta linjer genom A. Dessa låta dela sig i tre klasser. Till den första höra de, som skära a i en egentlig punkt. Till den andra höra de, som varken skära a i en egentlig punkt, ej heller i en sådan oegentlig punkt, som ligger på det absoluta klotet. Vi ha redan visat, att *varje sådan rät linje har en normal, som också är normal till a.* Till den tredje klassen höra två räta linjer p_1 och p_2, den hyperboliska geometriens »paralleller». De skilja de båda första klasserna åt. I § 18 beräknade vi den vinkel, dessa bildade med a:s normal genom A. Den berodde uteslutande på A:s avstånd från a.

De båda linjerna p_1 och p_2 äro ej sinsemellan parallella. För att skilja dem från varandra, säga vi att p_1 *är parallell med den ena riktningen av a*, p_2 *med den andra riktningen.* Är B en punkt på a, kunna vi också säga, att *de äro parallella med var sitt av de vinkelben, i vilka B delar räta linjen a.* För oss, som komma från cirkelgeometrien och för övrigt känna till det absoluta polarsystemet, äro följande satser, som med Lobatscheffskys metod ej alltid äro så enkla att bevisa, självklara:

Är a i någon punkt parallell med b, så är a i var och en av sina punkter parallell med b, likaledes b i var och en av sina punkter parallell med a.

Två räta linjer, som äro parallella med ett och samma vinkelben, äro sinsemellan parallella. (Gäller givetvis, även om ej alla tre räta linjerna ligga i ett och samma plan).

Om tre plan, som ej gå genom samma räta linje, skära varandra i tre räta linjer, av vilka två äro parallella, är den tredje parallell med dem båda.

En rät linje, som är parallell med en rät linje i ett plan, är parallell med planet. Detta är definitionen på parallellitet mellan en rät linje och ett plan. Följande satser inses då omedelbart:

En rät linje a, som är parallell med planet α, är parallell med varje rät linje, som i α utskäres av ett plan genom a.

Genom en rät linje, som är parallell med ett plan, går ett enda plan, som ej träffar det förstnämnda i någon egentlig punkt.

Två sådana plan kallas parallella. De skära varandra i en oegentlig rät linje, som tangerar det absoluta klotet.

Det är lätt att inse, att *om två vinkelben AB och CD äro parallella, minskas avståndet från en punkt P på vinkelbenet AB till räta linjen CD oupphörligt, då punkten P avlägsnar sig från A, så att det kan bli hur litet som helst.* För att visa detta kan man betrakta vidstående figur, som åskådliggör förhållandena inom cirkelgeometrien. På figuren äro paralleller med en och samma riktning av räta linjen och o-cirkeln $A'B'$ ritade jämte orten $A'B'$ för punkter, som ha ett bestämt avstånd till denna o-cirkel och räta linje. Denna ort skär en parallell i A. Påståendet utläses också med lätthet ur ekv. 6, § 20.

Låtom oss övergå till cirkelgeometrien och betrakta alla o-cirklar genom samma punkt A' på det absoluta klotet! Vi kunna först studera dem, som ligga på samma o-klot. Utan att

undersökningen därigenom inskränkes, kan ju detta få vara ett plan genom O. Ortogonaltrajektorierna till dessa o-cirklar äro cirklar, som i A' tangera den på det absoluta klotet ω utskurna cirkeln o. Motsvarigheten till dessa cirklar inom den hyperboliska geometrien kallas *gränscirklar*, emedan de kunna betraktas som cirklar, vilkas medelpunkter ryckt oändligt långt bort. Dessa gränscirklar måste Lobatscheffsky undersöka grundligt, innan han kunde komma framåt i sina studier av den hyperboliska geometrien.

Motsvarigheten i rummet till dessa gränscirklar äro *gränskloten*. De övergå i sig själva vid varje symmetri kring ett plan genom den oegentliga punkt A', i vilken de tangera det absoluta klotet. Varje rörelse, i vilken A' motsvarar sig själv, i vilken således varje rät linje, som går genom A', motsvaras av en parallell genom A', för de till A' hörande gränskloten i sig själva. Till en sådan rörelse finns ingen motsvarighet i den euklideiska geometrien. Även den hyperboliska translationen längs en axel r är ju av säreget slag, i det en punkt utom r ej beskriver en rät linje utan en kurva, orten för punkter i ett av r:s halvplan, som från r ha lika avstånd.

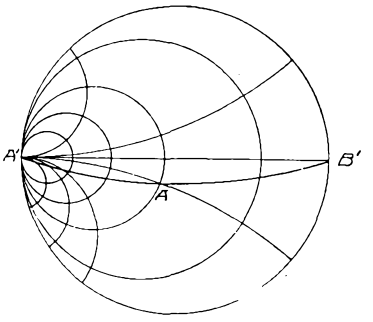

Fig. 31.

Låt oss nu betrakta ett bestämt gränsklot, som tangerar det absoluta klotet i punkten A' och alla detta klots gränscirklar! Dessa måste gå genom A'. Utan vidare inses riktigheten av följande sats:

Genom två punkter på ett gränsklot går en enda gränscirkel.

Till gränsklotets punkter räkna vi då ej A', genom vilken alla gränsklotets cirklar gå. A' är ju en oegentlig punkt.

Låt oss nu återigen gå tillbaka till cirkelgeometrien, och låt A' vara den punkt, i vilken gränsklotets motsvarighet tangerar det absoluta klotet! Med A beteckna vi den punkt, som är så belägen på detta gränsklot, att AA' är en diameter i gränsklotet. Gränsklotets gränscirklar utskäras av o-klot genom A'. De utskäras då också av plan genom A'. Projiciera vi nu från A' gränsklotets punkter på det plan α, som i A tangerar detta klot, projicieras gränscirklarna i räta linjer. A' själv motsvaras av oändlighetslinjen i planet α. *Punkterna på gränsklotet kunna således anordnas på samma sätt som punkterna i α.* Men icke nog med detta. Två i α belägna räta linjer, som äro i euklideisk mening parallella, motsvaras av två gränscirklar, som i A' tangera varandra. Det är således tydligt, att om *a är en gränscirkel och B en punkt på samma gränsklot, går på detta gränsklot genom B en enda gränscirkel, som ej skär a.* Vi ha således visat följande:

På ett gränsklot gälla Hilberts axiom I: 1—3 samt axiomen i grupperna II och IV, om vi med rät linje och plan mena gränscirkel och gränsklot.

Eftersom det i den hyperboliska geometrien finns rörelser, i vilka ett gränsklot motsvarar sig självt, så att gränscirklar motsvaras av gränscirklar, gälla för gränscirkelbågar och vinklar mellan sådana alla axiomen i Hilberts tredje grupp. Att axiomen i gruppen V äro giltiga, är uppenbart. Vi ha således visat följande:

På ett gränsklot gäller den euklideiska geometrien.

Denna sats var en av Lobatscheffskys viktigaste upptäckter inom den hyperboliska geometrien. Med dess tillhjälp lyckades det honom att bevisa, att den hyperboliska geometriens sfäriska trigonometri är identisk med den euklideiska sfäriska triogonometrien, och tack vare den kunde han komma åt den hyperboliska geometriens plana trigonometri.

I den hyperboliska geometrien existerar således en singularitetsfri yta, på vilken den euklideiska geometrien gäller. Inom den euklideiska finnas visserligen en mångfald ytor,[1] på vilka

[1] Alla ytor med konstant negativ krökning.

den hyperboliska geometrien gäller, om vi med räta linjer mena ytornas geodetiska linjer, men ingen av dessa ytor är fri från singulariteter.

Härmed avslutas framställningen av den hyperboliska geometrien. Att denna är fri från motsägelser, torde för läsaren vara höjt över allt tvivel. Det torde kanske också böra framhållas, att den synes komma att spela en betydande roll inom den matematiska fysiken. Slår relativitetshypotesen igenom, är detta fullt säkert. Inom relativitetsteorien är nämligen vektorgeometrien icke-euklideisk, närmare bestämt hyperbolisk. Vinkelräta hastighetsvektorer adderas enligt formeln 4 i § 20. Den hyperboliska geometrien har ju dock ett stort intresse, frånsett alla användingar av densamma vare sig inom relativitetsteorien eller på ytor med konstant negativ krökning. Dess existens är det tänkbarast kraftiga bevis för parallellaxiomets obevisbarhet.

§ 22. De sfäriska och elliptiska geometrierna.

Vi återgå till vår cirkelgeometri, i vilken ortogonalcirklarna och ortogonalkloten till det absoluta klotet ha precis samma egenskaper som den hyperboliska geometriens räta linjer och plan. Dessa båda geometrier äro fullständigt identiska. Cirkelgeometrien är endast att betrakta som en avbildning av den hyperboliska geometrien i det euklideiska rummet. Kunna vi blott ange tre system av geometriska begrepp, som stå i sådant förhållande till varandra, att Hilberts samtliga axiom utom axiom IV äro giltiga för dessa tre system av geometriska begrepp, ha vi rättighet att på dem tillämpa den hyperboliska geometrien. Beteckna vi individerna i det ena systemet, »punkterna», med A, B, C . . . , individerna i det andra, »räta linjerna», med a, b, c . . . och i det tredje, »planen», med α, β, γ . . . . , skall det sålunda vara möjligt att definiera följande begrepp: A »ligger på» a och »i» α, A »ligger mellan» B och C, AB och $A'B'$ äro »lika sträckor», ABC och $A'B'C'$ äro »lika vinklar». Kan det sedan bevisas, att Hilberts axiom i grupperna I, II, III och V gälla för dessa tre system av geometriska begrepp, gälla också alla satser, som ur dessa kunna härledas. Gäller ej axiom IV, gäller i systemet hela den hyperboliska geometrien. Gäller däremot IV, är systemets geometri den euklideiska. Vi ha sett, att det i den euklideiska geometrien är möjligt att finna tre system av geometriska begrepp, som ha den hyperboliska geometriens punkters, räta linjers och plans egenskaper. Denna geometris, cirkelgeometriens, »räta linjer» voro icke i vanlig mening räta, deras» plan» lika litet i vanlig bemärkelse plana. Det är ingalunda omöjligt att definiera »punkter», »räta linjer» och »plan», för vilka den hyperboliska eller den euklideiska geometrien gäller, så att »punkt» icke heller är en punkt i vanlig bemärkelse, d. v. s. »det, som ej har några delar». Hilberts axiom kunna och böra visserligen betraktas som ett slags definitioner av de ursprungliga, d. v. s. ej definierade, begreppen punkt, rät linje o. s. v. Men de fastlägga ej entydigt dessa begrepp var för sig. De fastlägga endast deras relationer till varandra. Denna omständighet ha vi i det föregående utnyttjat för att komma åt den hyperboliska geometrien.

Skulle det nu ej vara möjligt att i vår cirkelgeometri låta R bli imaginär, närmare bestämt ersätta R^2 med $-R^2$? Granska vi våra ekvationer och formler, finna vi, att detta mycket väl är möjligt. Vi antaga sålunda i det följande, att det absoluta klotet är imaginärt, d. v. s. att dess ekvation är

1) ..... $x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = 0.$

Det imaginära absoluta klotets »ortogonalklot» ha då ekvationerna:

2) ..... $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz - R^2 = 0.$

Dessa klot, som samtliga äro reella, skola vi fortfarande kalla o-klot, deras snittcirklar o-cirklar. Det är lätt insett, att de skära följande klot

3) ..... $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

i detta klots storcirklar. Det imaginära absoluta klotets o-cirklar och o-klot kunna därför be-

traktas som *diametralcirklar* och *diametralklot* till klotet $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, vilket klot vi beteckna med ω. Detta tillhör tydligen självt o-klotens skara. Varje o-cirkel skär sålunda ω i två punkter A och A', som ligga på en diameter i ω. Planen genom O- och o-cirklarna genom O äro speciella o-klot och o-cirklar.

Inversionerna kring det imaginära absoluta klotet fortfara att äga reell betydelse. Studera vi transformationsformlerna 1 och 2 i § 15, finna vi, att bilden P' av punkten P vid inversionen kring det imaginära absoluta klotet kan konstrueras på följande sätt: Uppsök den punkt P' på räta linjen OP, som är så beskaffad, att O ligger mellan P och P' och relationen $OP \cdot OP' = R^2$ gäller. Går sålunda en o-cirkel genom P, måste den också gå genom P', ty det inses genast, att inversionen ifråga överför en cirkel i en cirkel och en o-cirkel, d. v. s. diametralcirkel till ω, i sig själv. Två punkter P och P', som vid inversionen kring det imaginära absoluta klotet motsvara varandra, kunna vi kalla *till varandra hörande punkter*. *P' hör till P och P till P'*. Den ena av dessa punkter kunna vi ej utesluta, såsom förhållandet var, då det absoluta klotet var reellt. Motsatsen mellan det absoluta klotets inre och yttre punkter är ju upphävd, då detta klot är imaginärt.

Följande satser äro tydligen giltiga:

Genom två varandra ej tillhörande punkter, går en enda o-cirkel. Genom en o-cirkel och en på denna ej belägen punkt går ett enda o-klot. Två o-klot skära varandra i en o-cirkel. Två o-cirklar på samma o-klot skära varandra alltid i två till varandra hörande punkter.

Hilberts axiom i gruppen I äro således ej giltiga i den nya cirkelgeometrien, men det är lätt att modifiera deras lydelse, så att de så ändrade axiomen gälla i den nya geometrien.

Hilberts anordningsaxiom äro ej heller giltiga. Alla en cirkels punkter kunna tydligen ej anordnas på samma sätt som punkterna på en euklideisk eller hyperbolisk rät linje. Borttages emellertid en enda punkt, är det möjligt att ordna en cirkels punkter, så att Hilberts anordningsaxiom gälla. Det har i det föregående visats, då punkterna på en gränscirkel ordnades.

I den nya cirkelgeometrien kunna vi säga, att två varandra ej tillhörande punkter A och B bestämma två sträckor AB, nämligen de båda cirkelbågar, i vilka A och B dela o-cirkeln AB. En tredje punkt C på denna o-cirkel bestämmer jämte A och B *en* av dessa två sträckor AB. Med denna utgångspunkt är det möjligt att ordna punkterna på de nya o-cirklarna och o-kloten. Vi gå ej in på denna fråga. Så mycket bör dock framhållas, att varje o-klot α skiljer rummets punkter i två klasser, så att om A och B tillhöra var sin av dessa klasser, var och en av sträckorna AB har med α en gemensam punkt. Dessa två punktklasser äro α:s inre och yttre punkter. Varje o-cirkel på α delar således detta klots punkter i två delar med samma egenskaper som de delar, i vilka i den euklideiska eller hyperboliska geometrien en rät linje delar sina plan.

Inversionerna kring o-kloten, den nya cirkelgeometriens symmetriska avbildningar, ha precis samma egenskaper, som då det absoluta klotet är reellt. Hilberts kongruensaxiom böra därför gälla, sedan vi lämpligt modifierat dem. En sådan modifikation är nödvändig, emedan anordningsaxiomen ej gälla i den nya geometrien. Fortfarande finnas emellertid på varje »rät linje» genom punkten A endast två sådana punkter B och B', att sträckorna AB och AB' äro lika med en uppgiven sträcka. Varje o-klot kan »kongruent» avbildas på ett o-klot vilket som helst, således speciellt på klotet ω. Men detta klots o-cirklar äro storcirklar. Den »plana geometrien» i vårt nya system är därför den euklideiska geometrien på en sfär. Därför kallas den nya cirkelgeometrien den *sfäriska* geometrien.

Det förefaller, som om det ej funnes någon punkt, som hör till O, medelpunkten i klotet ω. Vi föreskriva emellertid, att en sådan skall finnas. Vid inversionen kring det imaginära absoluta klotet motsvaras tydligen O av oändlighetsplanets alla punkter. Dessa betrakta vi som en enda och beteckna den med O'. Efter denna utvidgning av punktbegreppet har O ej längre några egenskaper, som ej tillkomma alla andra punkter, och vi kunnna därför vid studiet av den sfäriska geometrien hålla oss till klotet ω.

Den sfäriska geometriens både plana och sfäriska trigonometri är den euklideiska sfäriska

trigonometrien. I dennas grundformler övergå också formlerna I, II, III, om A, B, C göras imaginära. Vinkelsumman i en triangel är städse större än två räta.

Ett knippe o-cirklar på ω har två fixpunkter A och A', som vi kunna betrakta som klotets poler. Dess ekvator a är då en o-cirkel på ω, som skär o-cirklarna genom A och A' under räta vinklar. Den är absoluta polaren till punkterna A och A', som å sin sida äro de absoluta polerna till a. Klotets parallellcirklar äro icke blott orter för punkter med lika avstånd till A och A', deras båda medelpunkter, utan även orter för punkter, som ligga lika långt från a. *I den sfäriska geometrien höra således till varje cirkel två medelpunkter och en rät linje, som ha lika avstånd till cirkelns alla punkter. Denna räta linje a är absoluta polaren till cirkelns medelpunkter A och A'. Är a given, kunna cirklarnas medelpunkter A och A' entydigt bestämmas.* Motsvarande egenskaper gälla för den sfäriska geometriens klot.

Utföra vi nu transformationen 2 i § 16, *övergå två varandra motsvarande punkter i en enda.* Ekvationerna för motsvarigheterna till o-kloten och o-cirklarna bli linjära och alla axiomen i Hilberts grupp I gälla. Denna gång komma vi därför till en annan geometri än den sfäriska. Den nya geometrien kallas den elliptiska.

Ej heller i denna geometri gälla axiomen i grupp II, däremot samtliga i grupp I. Eftersom inga oegentliga punkter existera, då den elliptiska geometriens punkter äro den euklideiska geometriens alla punkter jämte dess oändlighetspunkter, måste punkterna på en rät linje kunna anordnas på samma sätt som den räta linjens punkter i den projektiva geometrien. Två punkter A och B bestämma två sträckor AB; först en tredje punkt C på räta linjen AB bestämmer jämte A och B *en* sträcka. Vi ingå ej nu på de nya anordningssatserna. Sedan dessa fastställts på lämpligt sätt, kunna emellertid Hilberts kongruensaxiom, på lämpligt sätt något modifierade, bibehållas.

Den elliptiska geometriens absoluta polaritet erhålles genom att i ekvationerna i § 20 ersätta R^2 med $-R^2$. Ett knippe räta linjer har i den elliptiska geometrien en fixpunkt. Är denna punkt A, äro alla knippets individer normaler till A:s absoluta polarplan α. Ortogonaltrajektorierna till knippets samtliga individer äro icke blott orter för punkter, som ligga lika långt från A, utan även orter för punkter, som ligga lika långt från α.

De viktigaste satserna inom den elliptiska geometrien torde nu för läsaren vara påpekade. För att få en riktig uppfattning av detta egendomliga geometriska system, i vilket ju varje rät linje är sluten och har ändlig längd, torde dock några nya egendomligheter böra påpekas.

De elliptiska och de hyperboliska translationerna äro fullständigt skilda från de euklideiska translationerna. De bilda ej någon undergrupp inom gruppen av rörelser. Punkterna på translationslinjen r röra sig på en rät linje. I den hyperboliska geometrien äro translationslinjens punkter de enda, som beskriva räta linjer. I den elliptiska geometrien måste dessutom varje punkt på den med r konjugerade absoluta polaren r' vara fix. Alla andra röra sig längs cirklar. Genom r' gå alla normalplan till r, och därför måste punkterna på r' ligga stilla. Inom den elliptiska geometrien finns det sålunda ingen skillnad mellan translationer och rotationer, utan dessa båda rörelser sammanfalla. Translationer längs r äro rotationer kring r'.

Formlerna 4 i § 20 ge oss tydligen sambandet mellan koordinaterna för en punkt P och dess bild P' i en translation längs x-axeln. Inför i dessa $-R^2$ i stället för R^2, sätt $a = \infty$! Då övergå dessa formler i:

$$x' = -\frac{R^2}{x}, \quad y' = \frac{Ry}{x}.$$

Utför ännu en gång samma translation! Låt x', y' motsvaras av x'', y''. Vi erhålla:

$$x'' = -\frac{R^2}{x'} = x; \quad y'' = \frac{Ry'}{x'} = -y.$$

Dessa båda translationer kunna givetvis ersättas av en enda. Genom en translation längs samma räta linje åt samma håll komma vi således först och främst tillbaka till samma punkt,

vilket ju ej var så förvånande. Men vi komma tillbaka med motsatt riktning på y-axeln. Mellan direkt kongruens och symmetri i planet finns i den elliptiska geometrien ingen motsats. Det elliptiska planet är ensidigt, ej tvåsidigt som i de euklideiska och hyperboliska geometrierna. Det är detta, som är anledningen till att translationen är så egendomlig. Ett enkelt exempel på en ensidig yta erhåller man på följande sätt: Utklipp ur ett papper en rektangel $ABCD$! Böjes denna rektangel ihop, så att A och D samt B och C sammanfalla, erhålles en vanlig cylinder. Men vrides pappersremsan före böjningen, så att A och C samt B och D efter hopböjningen sammanfalla, erhålles en yta, som man kan konstatera vara ensidig. Av samma beskaffenhet är det elliptiska planet.

Den elliptiska geometriens plan delar ej såsom de euklideiska och hyperboliska geometriernas plan rummets punkter i två klasser. Hur än A och B ligga utom planet α, finns det nämligen en sträcka AB, som ej träffar α. Men den andra sträckan AB träffar *alltid* α.

Äro a, b, c, d fyra räta linjer genom samma punkt O och i samma plan α och ligga c och d i var sitt av de två par av vertikalvinklar, som a och b bestämma, sägas *paren ab och cd* eller *paren cd och ab skilja varandra.* Det är tydligen endast på *ett* sätt möjligt att ordna fyra räta linjer genom samma punkt och i samma plan i varandra skiljande par. Antaga vi, att vi röra oss inom de euklideiska eller hyperboliska geometrierna, kan detta påstående med tillhjälp av Hilberts anordningsaxiom lätt bevisas. Det kan också bevisas, att om en rät linje l skär de fyra givna a, b, c, d i punkterna A, B, C, D respektive, och om dessa punkter från en efter behag vald punkt O' projicieras i räta linjerna a', b', c', d', så skilja paren $a'b'$ och $c'd'$ varandra, om paren ab och cd skilja varandra, och tvärt om. Sedan de oegentliga punkterna adjungerats, kan det likaledes visas, att detta gäller, även om en eller flera av punkterna A, B, C, D, O' äro oegentliga. Såsom anordningsprincip för oegentliga och egentliga punkter kan man därför införa begreppet »varandra skiljande punktpar». Såsom anordningsprincip för planen genom en rät linje införes likaledes begreppet »varandra skiljande planpar». Anordningsprinciperna i de tre olika slagen av elementära knippen, den räta linjens punkter, den räta linjens plan och de räta linjerna genom samma punkt och i samma plan, äro således desamma, och de grundläggande anordningsaxiomen kunna formuleras så, att de gälla i alla tre slagen av elementära knippen. Den projektiva geometriens anordningssatser kunna härledas, om vi antaga att Hilberts anordningssatser gälla i ett begränsat område, exempelvis i det inre av en sfär. Med uteslutande tillhjälp av denna sfärs inre punkter kunna nämligen också de oegentliga punkterna, räta linjerna och planen definieras och därefter adjungeras.

Omvänt kunna vi utgå från den projektiva geometriens anordningsprinciper och såsom axiom antaga så många av anordningssatserna, att de andra därur kunna härledas. I en geometri, i vilken det finns åtminstone ett plan, som innehåller uteslutande oegentliga punkter, kunna vi för de egentliga punkterna införa begreppet »mellan» på följande sätt: Äro A, B, C tre punkter på en rät linje, som skär det nämnda planet i D, säges C ligga mellan A och B, om punktparen AB och CD skilja varandra. Hilberts anordningsaxiom äro således att betrakta som specialfall av den projektiva geometriens anordniogsaxiom. Å andra sidan kunna dessa också härledas ur Hilberts, om dessa antagas gälla inom ett begränsat område.

De projektiva anordningsprinciperna och anordningsaxiomen kunna givetvis införas i den elliptiska geometrien. De projektiva anordningsaxiomen räcka till att definiera riktning på en rät linje, i ett knippe av räta linjer och i ett planknippe. Detta är allt som behövs för att kunna formulera Hilberts kongruensaxiom. *De enda geometriska system, i vilka axiomen i grupperna I, III, V och de projektiva anordningsaxiomen gälla, äro de euklideiska, hyperboliska och elliptiska geometrierna.*

Geometrien på devcloppabla ytor är euklideisk, på ytor med konstant negativ krökning hyperbolisk och på ytor med konstant negativ krökning elliptisk. Dessa geometrier äro dock i allmänhet ej användbara på ytorna i hela deras utsträckning, emedan förekommande singulariteter eller olika sammanhangsförhållanden omöjliggöra detta. Inom ett singularitetsfritt begränsat område, som genom ett snitt sönderfaller i två delar, gälla emellertid dessa geometrier.

Inom den elliptiska geometrien kunna i samtliga axiomen punkt och plan i rummet utbytas mot varandra, utan att de upphöra att vara sanna. Att så är förhållandet med axiomen i gruppen I, är ju tydligt, emedan både två punkter och två plan beatämma en rät linje och tre plan, som ej gå genom samma räta linje, alltid en punkt. Anordningsaxiomen ha ju också samma egenskap. Men även för kongruensaxiomen måste detsamma gälla, ty den plana trigonometrien och den sfäriska sammanfalla. Därför gäller i den elliptiska geometrien *dualitetsprincipen: Varje sats förblir riktig, om »plan» utbytes mot »punkt» och »punkt» mot »plan»*. Med »punkt» i den elliptiska geometrien har jag således rättighet att beteckna plan, i strid med definitionen: »Punkt är det, som ej har några delar.»

Men man finner också, att i ett och samma plan punkt och rät linje kunna utbytas mot varandra, utan att satserna därigenom bli falska. Så är också förhållandet med begreppen rät linje och plan genom samma punkt. Är därför i den elliptiska gemetrien en sats om punkter och räta linjer i ett plan bevisad, gäller den också för räta linjer och punkter i ett plan, för plan och räta linjer eller räta linjer och plan »i en punkt». Såsom exempel må anföras Desargues' sats och trigonometrien.

§ 23. Cirklar, som tangera tre givna cirklar.

Inom den elliptiska geometrien löses uppgiften att upprita en cirkel, som tangerar tre givna räta linjer, som ej gå genom samma punkt utan således bilda en triangel ABC, på precis samma sätt som i den euklideiska geometrien. Man uppritar således de sex bisektriserna till triangelns vinklar och yttervinklar. Dessa sex bisektriser gå tre och tre genom fyra punkter, de sökta cirklarnas medelpunkter. Genom en av dessa, låt vara M, gå tre av bisektriserna. Vi beteckna dessa med a, b, c, så att a går genom A, b genom B och c genom C. Från M fälla vi normalerna a', b', c' mot räta linjerna BC, CA och AB respektive. Dessa skära ut tangeringspunkterna för cirkeln med medelpunkten M. De sex räta linjerna a, b, c, a', b', c' bilda ett knippe av räta linjer genom M.

Gå vi nu över till cirkelgeometrien, motsvaras de tre räta linjerna AB, AC, BC av tre cirklar o_3, o_2, o_1 respektive, som äro diametralcirklar till en bestämd cirkel o med medelpunkten O. I denna punkt ha de tre cirklarna samma potens. Cirklarna o_3 och o_2 skära varandra i de varandra tillhörande punkterna A och A', o_3 och o_1 i B och B', o_2 och o_1 i C och C'. Bisektriserna till triangelns vinklar motsvaras av två bestämda diametralcirklar till o genom var sitt av punktparen AA', BB', CC'. Tre bestämda av dessa, som vi som ovan beteckna med a, b, c, skära varandra i de till varandra hörande punkterna M och M'. Normalerna a', b', c' genom M mot triangelns sidor motsvaras av de tre fullt bestämda ortogonalcirklarna a', b', c' till cirklarna o_1, o_2, o_3 respektive. De tre cirklarna a', b', c', som också gå genom M', äro diametralcirklar till cirkeln o. De sex diametralcirklarna a, b, c, a', b', c' bilda ett knippe diametralcirklar med M och M' till fixpunkter. Cirkeln a' utskär på o_1 två tangeringspunkter P och P'. Av dem ligger en inom och en utom cirkeln o. Låt P ligga inom! Cirkeln b' utskär på o_2 tangeringspunkterna R och R', av vilka R ligger inom o. På motsvarande sätt bestämmas av c' och o_3 punkterna S och S', av vilka S ligger inom o. Cirkeln genom de tre punkterna P, R, S måste tangera de tre cirklarna. Likaledes cirkeln genom de tre punkterna P', R', S'. Dessa två cirklar motsvara nämligen i den elliptiska geometrien den ena av de fyra cirklar, som tangera de tre räta linjerna AB, AC, BC. Problemet att upprita en cirkel, som tangerar o_1, o_2, o_3, har således åtta lösningar.

Det gäller emellertid att finna en enkel konstruktion av de tre cirklarna a, b, c. Låt oss betrakta en av dem, exempelvis a, som går genom A och A'! I inversionen kring denna måste cirklarna o_2 och o_3 motsvara varandra, ty så är ju förhållandet vid symmetrien kring bisektrisen c i den elliptiska triangeln ABC. I denna motsvara räta linjerna AC och AB varandra. Eftersom således o_2 och o_3 motsvara varandra i inversionen kring a, måste de vara likställda med

avseende på dennas medelpunkt. (Se framställningen i § 15!) I cirkeln a känner man således medelpunkten och två av dess punkter; den är således fullt bestämd.

Eftersom nu a, b, c bilda ett knippe, måste deras medelpunkter ligga i rät linje. Vi ha således funnit och bevisat den kända satsen, att *de sex likställighetspunkterna till två och två av tre givna cirklar alltid tre och tre ligga på fyra räta linjer, de tre cirklarnas likställighetsaxlar.* På varje axel ligger en likställighetspunkt till vart och ett av de tre par av cirklar, som kunna bildas genom kombination av de tre cirklarna. Den ena likställighetsaxeln innehåller de tre yttre likställighetscentra, de tre andra likställighetsaxlarna en yttre och två inre likställighetscentra.

Vi antaga i det följande, att denna sats om tre cirklars likställighetspunkter är bevisad, hur än de tre cirklarna äro belägna.[1] Utesluta vi det fallet, att de tre cirklarna tillhöra samma knippe, är det lätt att bevisa, att de tre cirklarna ha en gemensam ortogonalcirkel o. Dess medelpunkt är den punkt O, i vilken de tre cirklarna ha samma potens. Den är fullt bestämd. Radien i o kan däremot vara reell, noll eller imaginär. Är radien noll, gå cirklarna genom O; är raden imaginär, ha de en gemensam diametralcirkel, i vilket fall vi ha löst problemet att upprita en cirkel, som tangerar de tre givna cirklarna. Denna metod är emellertid användbar i alla tre fallen. Dock antaga vi tillsvidare, att de tre cirklarna ha en gemensam ortogonalcirkel o, vars radie ej är noll.

Skära cirklarna o_2 och o_3 varandra, kunna de två cirklarna a bestämmas som ovan. Skära *ej* o_2 och o_3 varandra, äro likväl medelpunkterna för de båda cirklarna fullt bestämda. Det gäller således att bestämma den individ i knippet, som bestämmes av o_2 och o_3, som har en bestämd medelpunkt T på den räta linje, som går genom medelpunkterna till o_2 och o_3. Detta problem löses genom att med T till medelpunkt upprita den cirkel, som skär o under räta vinklar. Skära o_2 och o_3 ej varandra, ligger dessa båda cirklars inre likställighetspunkt inom cirkeln o; den yttre däremot ligger utom. Endast *en* cirkel a existerar i detta fall, men den existerar alltid. Vid inversion kring denna överföres o_2 och o_3 i varandra. I den hyperboliska gemetrien motsvaras den av den räta linje, som är orten för punkter, som ligga lika långt från två givna räta linjer. Den är normal till den för de båda räta linjerna gemensamma normalen. Tangera de båda cirklarna varandra, är det tydligt, att den ena av cirklarna a ej heller existerar.

Vi kunna således konstuera de två cirklarna a och b. Den senare är sådan, att inversionen kring den överför o_1 i o_3. Vi veta nu, att av de två likställighetscentra till o_2 och o_1 ligger ett på den räta linje, som går genom medelpunkterna i a och b. Den cirkel, som har detta likställighetscentrum till medelpunkt och tillhör det av o_2 och o_1 bestämda knippet, benämna vi med c.[2] Det är lätt insett, att de tre ortogonalcirklarna a. b, c till en cirkel o alltid tillhöra samma cirkelknippe, om deras medelpunkter ligga i rät linje. Ortogonalcirklarna till $x^2 + y^2 = R^2$ ha ju ekvationerna

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + R^2 = o.$$

Nu måste vi gå till konstruktionen av a', b', c'. De tillhöra det av a, b, c bestämda knippet K och äro ortogonalcirklar till var sin av o_1, o_2, o_3. Har knippet K ej några reella fixpunkter, i vilket fall konstruktionen är given, förfara vi på följande sätt vid konstruktionen av a'. Välj i knippet K', som innehåller ortogonalcirklarna till knippet K, som ej innehåller o_1, utom o en annan cirkel s, och bestäm sedan ortogonalcirkeln till o, o_1 och s! Denna är den sökta cirkeln a'. De tre cirklarna a', b', c' jämte deras snittpunkter med o_1, o_2 och o_3 äro nu bestämda. Vi beteckna dessa senare som ovan med P, P', R, R', S, S', så att P, R, S ligga inom cirkeln o. I inversionen kring o motsvara P och P', R och R', S och S' varandra.

Vid inversionen kring cirklarna i knippet K övergå cirklarna i knippet K', som innehåller

[1] Den bevisas med lätthet med tillhjälp av Desargues' sats.

[2] Därmed är också bevisat, att en triangels sex bisektriser tre och tre gå genom fyra punkter även inom den hyperboliska geometrien. En del av dessa punkter kunna vara oegentliga. Bibehålla vi benämningen bisektris på den räta linje, som är orten för de punkter, som ligga lika långt från två givna varandra ej skärande räta linjer, gäller påståendet, lämpligt modifierat.

ortogonalcirklarna till knippet K i sig själva. En cirkel i K', som går genom P, måste i denna punkt tangera o_1. Den tangerar då i R och S de båda cirklarna o_2 och o_3.

Även för det fall, att de tre cirklarna o_1, o_2, o_3 ha en gemensam ortogonalcirkel o, ha vi således löst problemet att upprita en cirkel, som tangerar en given cirkel. På antalet lösningar ingå vi emellertid icke. Skulle o_1, o_2, o_3 gå genom samma punkt O, löses problemet på samma sätt. En inversion kring en cirkel genom O, överför de tre cirklarna o_1, o_2, o_3 i räta linjer och O i oändlighetslinjens punkter. *Geometrien i cirklarna genom en fix punkt O är därför den euklideiska.* Den erhålles ur de båda andra cirkelgeometrierna genom att låta R tendera mot noll.

Om tre cirklar o_1, o_2, o_3 tillhöra samma knippe, finns ingen cirkel, som tangerar dem alla tre, såvida ej knippet är paraboliskt, d. v. s. o_1, o_2, o_3 tangera varandra i samma punkt. I så fall är varje cirkel i knippet en lösning.

Cirklarna a, b, c, a', b', c' tillhörde ett knippe K, vars ortogonalcirklar bildade ett knippe K', innehållande två av de cirklar, som tangera de tre givna o_1, o_2, o_3. De tangerande cirklarna äro således att söka bland fyra knippen, vilka som radikalaxlar ha var sin av de fyra likställighetsaxlarna. Det är lätt att bevisa, att varje cirkel i var och en av dessa fyra knippen skär de tre givna cirklarna under lika vinklar. Ha de tre cirklarna o_1, o_2, o_3 en gemensam ortogonalcirkel o, tillhör den alla dessa fyra knippen. I detta fall få vi följande enkla och välkända lösning på problemet att konstruera de o_1, o_2, o_3 tangerande cirklarna.

Upprita de cirklar, som tillhöra något av de fyra knippen, som bestämmas av o och de fyra likställighetsaxlarna till de tre givna cirklarna, och som tangera en av de tre givna cirklarna. Dessa cirklar tangera då även de båda andra givna cirklarna. Problemet att upprita en cirkel, som tillhör ett givet knippe och tangerar en given cirkel, sammanfaller med problemet att upprita en cirkel, som går genom två givna punkter och tangerar en given cirkel, eller ock löses det på ungefär samma sätt som detta problem.

KAP. III.

Polygoner med lika stora ytor och polyedrar med lika stora volymer.

§ 24. Euklides behandling av ytlika polygoner och volymslika polyedrar.

Euklides börjar sin framställning av likytiga polygoner genom att i I: 35 bevisa, att parallellogrammer med samma bas och höjd äro likytiga. Åt likytiga figurer ägnar han sedan resten av första och hela andra boken samt dessutom en god del av sjätte boken. Hela innehållet i denna bok vilar ju för övrigt på teorien om likytiga, trianglar och parallellogrammer.

För att avgöra om två polygoner äro likytiga, använder sig Euklides av följande kriterier:

Kongruenta polygoner äro likytiga.

Läggas kongruenta polygoner till kongruenta polygoner, äro summorna likytiga polygoner.

Dragas kongruenta polygoner från kongruenta polygoner, äro skillnaderna likytiga polygoner.

Polygoner, som äro likytiga med en och samma polygon eller med likytiga polygoner, äro likytiga.

Om dessa kriterier äro samstämmiga eller ej, undersöker ej Euklides. Han antager i stället utan bevis, att polygoners ytor äro storheter, och att således hans storhetsaxiom (1—7, 9) på dem kunna tillämpas. Av två figurer, som ej ha lika stora ytor, måste således den enas yta vara större än den andras. Har en polygon större yta än en annan och denna senare i sin tur större yta än en tredje, är den första polygonens yta större än den tredjes o. s. v.

Vad som sagts om Euklides behandling av likytiga polygoner, gäller även om hans fram-

ställning av polyedrar med lika volymer. För att avgöra om två pyramider ha lika volym eller ej, måste han dessutom använda sig av exhaustionssatsen.

Vi ha sett, att det är möjligt att med stöd av axiomen i grupperna I—III bevisa, att sträckor och vinklar äro storheter i Euklides mening, d. v. s. att hans storhetsaxiom och även andra storhetsaxiom, som han stöder sig på utan att formulera, kunna tillämpas på sträckor och vinklar. Vi skola nu visa, att det är möjligt att definiera »polygoner med lika stora ytor» och »polyedrar med lika stora volymer» och sedan bevisa, att dessa begrepp äro storheter.

§ 25. Ekvivalenta polygoner.

Två polygoner äro ekvivalenta, om de kunna indelas i ett ändligt antal trianglar, så att mot varje triangel i den ena svarar en enda triangel i den andra och omvänt och mot varandra svarande trianglar äro kongruenta.

Äro två polygoner I och II ekvivalenta med polygonen III, finns det en indelning av polygonerna I och III i trianglar, så att mot varje triangel i I svarar en kongruent triangel i III och omvänt, samt en annan indelning av polygonerna II och III med samma egenskaper. Dela vi nu de två polygonerna I och II enligt båda dessa delningsprinciper, bliva dessa två polygoner delade i nya polygoner, så att mot varje polygon α_1 i I svarar en kongruent polygon α_3 i III, och så att mot α_3 i III svarar en kongruent polygon α_2 i II. Således äro α_1 och α_2 kongruenta. Polygonerna I och II äro således indelade i polygoner, så att mot varje sådan i I svarar en kongruent polygon i II och omvänt. Dessa polygoner kunna sedan delas i trianglar, varvid polygonerna I och II bli indelade i trianglar, så att mot varje triangel i I svarar en triangel i II och omvänt och mot varandra svarande trianglar äro kongruenta. Således:

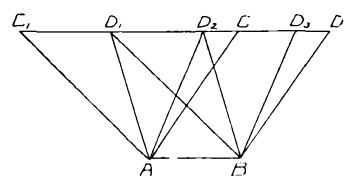

Fig. 32.

Sats 1: Två polygoner, som äro ekvivalenta med en och samma polygon eller med ekvivalenta polygoner, äro ekvivalenta.

Parallellogrammer på samma bas och mellan samma parallella linjer äro ekvivalenta.

$ABCD$ och ABC_1D_1 stå på samma bas och mellan samma parallella linjer, och vi antaga, att D_1 ligger mellan C_1 och C. Avsätt $D_1D_2 = C_1D_1$ på räta linjen C_1D_1, så att D_1 ligger mellan C_1 och D_2! Eftersom $D_1D_2 = C_1D_1 = CD$, måste D_2 falla mellan D_1 och C eller mellan C och D. Antag, att den faller mellan D_1 och C! Vi konstruera enligt samma princip punkterna D_3, D_4 . . . Enligt V: 1 måste det finnas en punkt D_n, som faller mellan C och D. På figuren är denna punkt D_3. Utan vidare inses nu, att ABC_1D_1 är ekvivalent med ABD_1D_2, som är ekvivalent med ABD_2D_3, vilken slutligen är ekvivalent med $ABCD$.

Ligger ej D_1 mellan C_1 och C, ligger den antingen mellan C och D, i vilket fall satsen är bevisad, eller också ligger C_1 mellan C och D eller mellan D och D_1, i vilka fall satsen kan bevisas på samma sätt, som då D_1 ligger mellan C och D eller mellan C_1 och C.

Sats 2. Parallellogrammer med lika baser och höjder äro ekvivalenta.

Följer direkt av föregående sats.

Betrakta parallellogrammen $ABCD$ och triangeln ABE, där E ligger på räta linjen AC, C mellan A och E och sträckorna AC och CE äro lika stora! Räta linjen BE skär sträckan CD i dess mittpunkt F, och trianglarna CFE och DFB äro kongruenta. Därför är triangeln ABE ekvivalent med parallellogrammen $ABCD$, som har samma bas men endast hälften så stor höjd som triangeln ABE. Tillämpas nu satserna 1 och 2, bevisas med lätthet följande sats:

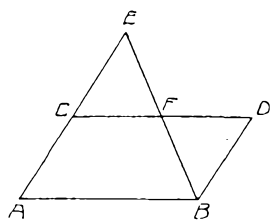

Fig. 33.

Sats 3. Trianglar med lika stora baser och höjder äro ekvivalenta.

Nu skola vi bevisa följande viktiga sats:

Sats 4. Två trianglar ABC och $A'B'C'$ äro ekvivalenta, om baserna AB och *$A'B'$ och de tillhörande höjderna CP och $C'P'$ äro omvänt proportionella:*

Först framhålles, att i en och samma triangel två sidor äro omvänt proportionella mot de tillhörande höjderna. Detta påstående bevisas med lätthet med tillhjälp av likformighetsläran, som vi ju utvecklat oberoende av begreppet ytlikhet. Det är således likgiltigt vilken sida i en triangel vi betrakta som bas.

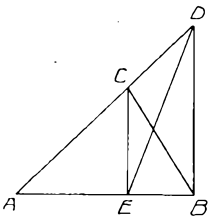

Fig. 34.

Vi antaga, att $A'B'$ är mindre än AB. I så fall är höjden $C'P'$ större än höjden CP.

Välj således på sträckan AB punkten E, så att $AE = A'B'$! Drag EC! Drag räta linjen BD parallell med EC! Den skär vinkelbenet AC i D. Trianglarna CEB och CED äro ekvivalenta, emedan de ha samma bas och lika höjder. Således äro också trianglarna ABC och AED ekvivalenta. Beteckna vi nu höjderna från C och D mot AB med h och h' respektive gälla:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} = \frac{h'}{h};$$

men också enligt antagandet, då $AE = A'B'$,

$$\frac{AB}{AE} = \frac{C'P'}{CP}, \text{ d. v. s. } h' = C'P', \text{ då ju } h = CP.$$

Således ha trianglarna AED och $A'B'C'$ lika baser AE och $A'B'$ samt lika höjder, och äro därför ekvivalenta. Då äro även ABC och $A'B'C'$ ekvivalenta.

Antagandet $A'B' < AB$ betyder ju ingen inskränkning i beviset.

Vi skulle nu i likhet med Euklides kunna vända om satserna 3 och 4, om vi antoge, att delen ej är lika med det hela, eller bättre uttryckt, stödde oss på följande sats: *En triangel kan icke vara ekvivalent med en av sina deltrianglar.* (De Zolt's princip).

Man behöver emellertid ej göra ett dylikt antagande, som vi i det följande skola se.

§ 26. Likytiga polygoner.

Hela framställningen i § 25 hänger på Arkimedes axiom, V: 1. På detta axiom vilade nämligen beviset av sats 2. Hilbert har bevisat, att denna sats är direkt falsk, om axiomet i fråga förkastas.

Hilbert inför begreppet en triangels *ytmått.* Emedan sidor och tillhörande höjder i en och samma triangel äro omvänt proportionella, bör detta ytmått vara proportionellt mot produkten av en sida och dess tillhörande höjd. Av lätt insedda skäl väljer han proportionalitetsfaktorn $\frac{1}{2}$. En triangels ytmått är således halva produkten av en dess sida och tillhörande höjd. Hilbert kallar de trianglar *ytlika,* som antingen äro ekvivalenta eller äro skillnader mellan parvis ekvivalenta trianglar. Han bevisar oberoende av V: 1, att ytlika trianglar ha lika ytmått, och att trianglar med lika baser och höjder äro ytlika, således också trianglar, vilkas baser och höjder äro omvänt proportionella. Han kan komma fram utan V: 1, emedan han också utvecklat en likformighetslära, som är oberoende av detta axiom, och arbetar med tal, för vilka V: 1 icke gäller.

Vi införa definitionen: *Två trianglar äro likytiga, om de ha samma ytmått.* Vi kunna då bevisa följande viktiga sats:

Delas en triangel på något sätt i deltrianglar, så är triangelns ytmått lika med summan av deltrianglarnas ytmått.

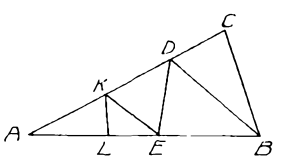

Fig. 35.

Delas triangeln ABC i deltrianglar genom att från en vinkelspets, exempelvis B draga räta linjer BD, BD', o. s. v., är satsen självklar för en sådan delning, ty alla deltrianglarna ha då lika höjder. En delning, vid vilken delningslinjerna gå genom en vinkelspets, skola vi kalla *transversell* delning. Delas triangeln ABD i sin tur transversellt och dessa

deltrianglar i sin tur transversellt, gäller tydligen satsen för en sådan delning av triangeln ABC, d. v. s. för en upprepad transversell delning.

Är triangeln ABC delad på ett godtyckligt sätt, draga vi genom en av dess vinkelspetsar, exempelvis A, transversaler genom varje hörnpunkt i var och en av dess deltrianglar Δ. Vi skola betrakta en triangel, som begränsas av två transversaler genom A, som följa efter varandra. Skära dessa BC i punkterna X och Y, ligga mellan dessa båda punkter inga hörnpunkter hos någon av de första deltrianglarna. Deltriangeln AXY måste vara delad som triangeln ABC i fig. 35, dock med den inskränkningen, att någon eller några av trianglarna kunna vara ersatta med fyrhörningar, av vilkas hörnpunkter två ligga på AX och två på AY. Någon av trianglarna exempelvis BDE, kan också vara delad av transversaler genom D. Genom att i en fyrhörning av angiven beskaffenhet draga en diagonal, sönderdelas den i två trianglar. Varje triangel AXY är således delad genom en upprepad transversell delning. Samma gäller givetvis om varje deltriangel Δ i den ursprungliga delningen.

Ytmåttet av triangeln ABC är således lika med summan av ytmåtten för alla de deltrianglar, i vilka den slutligen delats. Samma gäller för varje triangel Δ, som tillhör den ursprungliga delningen. Eftersom additionslagarna

$$a+b=b+a;\ a+(b+c)=(a+b)+c$$

gälla för ytmåtten, är satsen i sin helhet bevisad.

Vi kunna nu definiera en *polygons ytmått* som summan av ytmåtten för dess deltrianglar. Ytmåttet är tydligen oberoende av hur denna delning verkställts. Vi införa sedan definitionen:

Polygoner med samma ytmått äro likytiga.

Till varje polygon hör således ett visst tal, som är summan av alla de tal, som äro tillordnade dess deltrianglar eller delpolygoner, så att om en delpolygon avlägsnas från polygonen, den så erhållna restpolygonen motsvaras av ett tal, som är mindre än det, som motsvarar hela polygonen. Det hela är således större än var och en av sina delar. Helt allmänt gäller, eftersom vi avbildat polygoners ytor på talen, så att mot varje polygons yta svarar ett enda tal och mot en »större» polygon ett större tal:

Polygoners ytor äro storheter, på vilka de vanliga storhetsaxiomen (Euklides 1—7, 9) *kunna tillämpas.*

De använda talen behöva ej vara »arkimediska», d. v. s. om $a>b$, behöver det ej finnas något heltal n, sådant att $nb>a$.

Vi ha nu också visat, att *ekvivalenta polygoner äro likytiga.* Med tillhjälp av V: 1 visade vi i § 25, att likytiga trianglar äro ekvivalenta. Vi ha således också visat, *att likytiga polygoner äro ekvivalenta,* eller *att storhetsaxiomen gälla för ekvivalenta figurer.*

Vi kunna således införa följande nya definition på likytiga polygoner: *Likytiga polygoner äro sådana polygoner, som äro ekvivalenta.*

En fullt sträng grundläggning av läran om om rätlinjiga figurers ytlikhet är därmed genomförd, utan att något nytt axiom behöft införas. Givetvis ha vi begränsat oss till *enkla polygoner*, d. v. s. sådana polygoner, vilkas sidor träffa varandra endast i polygonens hörnpunkter, från vilka endast två sidor utgå.

Slutligen kan tilläggas, att en triangels ytmått inom den hyperboliska geometrien är triangelns defekt, d. v. s. skillnaden mellan två räta vinklar och triangelns vinkelsumma, inom den elliptiska geometrien triangelns excess, d. v. s. skillnaden mellan dess vinkelsumma och två räta. Man torde utan vidare inse, att inom de båda icke-euklideiska geometrierna en triangels ytmått är summan av alla dess deltrianglars ytmått. Det kan också bevisas, att trianglar med samma ytmått äro ekvivalenta.

§ 27. Polyedrar med lika volymer.

Såsom *volymmått för en tetraeder* införa vi tredjedelen av produkten av en av dess sidoytor och höjden mot denna. Att *detta volymmått är oberoende av valet av sidoyta,* kan med lätthet bevisas.

Tetraedern $ABCD$ är given. Fäll från A normalen AH mot planet BCD! Fotpunkten må vara H! Fäll från H i planet BCD normalen HK mot räta linjen CD! Fotpunkten må vara K! Då är planet AHK normalplan till räta linjen CD. Vinkeln AKH är vinkeln mellan de båda halvplanen CDA och CDB. På samma sätt fälles normalen BL mot planet ACD och normalen LM mot räta linjen CD. Även vinkeln BML är således vinkeln mellan de båda halvplanen CDA och CDB. Därför äro trianglarna AKH och BML likformiga, d. v. s.

$$AH \,.\, BM = BL \,.\, AK \text{ eller } AH \,.\, BM \,.\, CD = BL \,.\, AK \,.\, CD.$$

Satsen är sålunda bevisad.

På ungefär samma sätt som i § 26 för ytmått kan man nu bevisa:

En tetraeders volymmått är summan av volymmåtten av alla de tetraeder, i vilka den är delad.

Definieras nu en *polyeders volymmått* som summan av dess deltetraedrars volymmått, inses genast, att detta volymmått är oberoende av det sätt, på vilket delningen företagits.

Polyedrar med lika volymmått ha lika volymer.

Ur denna definition och ur det föregående följer:

Polyedrars volymer äro storheter, för vilka storhetsaxiomen således gälla.

Med ekvivalenta polyedrar menas sådana polyedrar, som kunna indelas i ett ändligt antal delpolyedrar, så att mot varje delpolyeder i den ena svarar en kongruent delpolyeder i den andra och omvänt.

Dehn[1] *har bevisat, att polyedrar med lika volymer i allmänhet ej äro ekvivalenta och ej heller kunna göras ekvivalenta genom att tillfoga ekvivalenta polyedrar.*

Vill man därför ej använda den ovan givna definitionen på polyedrar med lika volymer, får man gripa till gränsförfaranden.

---

[1] Hans bevis finnes i Enriques, Fragen der Elementargeometrie.

Pedagogiska tillämpningar.

Det är uppenbart, att framställningen i kapitlen I och III av detta arbete ej är lämplig för skolan. Emellertid bör det ej vara svårt att lämna en sträng framställning av geometrien, som är fattbar även för de allmänna läroverkens elever. Det gäller bara att avstå från den fordran, att geometriens axiom skola reduceras till ett minimum.

Utökar man Hilberts anordningsaxiom med satserna 1, 2, 3 och kanske 4 i § 2, kunna övriga behövliga anordningssatser lätt bevisas. Det är ej lämpligt att, såsom nu sker i våra skolor, helt avstå från en rationell framställning av punkternas anordning på en rät linje, i ett plan och i rummet. Det är svårt för eleverna att förstå, varför man ibland får stödja sig på åskådningen av figurer, under det att åskådningen i andra fall ej får användas vid bevisföringen. Man kan ej heller nu för tiden komma med den invändningen, att det är omöjligt att lämna en sträng, men ändock lättfattlig framställning av punkters anordning.

Såsom kongruensaxiom skulle man kunna uppföra III: 1, III: 4 och första kongruensfallet. Dessutom vore det väl lämpligt att som axiom antaga, att sträckor och vinklar äro matematiska storheter. Detta antagande skulle då kompletteras med lämpligt valda storhetsaxiom. Axiomet V: 2 bör ersättas av satserna 1 och 2 i § 10. Axiomen i grupperna I och IV kunna bibehållas, vilket ju ej hindrar, att de erhålla en för skolpojkar lämpligare formulering. Behandlingen av yt- och volymslikhet bör väl helst ej förändras. Men i så fall bör det påpekas, att figurers ytor och volymer antagas vara matematiska storheter.

En på dessa principer grundad geometrisk framställning skulle emellertid knappast vara njutbar för eleverna i realskolan. För lärjungarna i fjärde klassen vore den obegriplig. Men denna anmärkning gäller också i viss mån Euklides' elementer och en del andra för realskolan avsedda läroböcker i geometri. Däremot synes det mig, som om Josephsons nyligen utgivna lärobok i geometri för realskolan skulle vara synnerligen lämplig och fullt begriplig för eleverna på detta stadium. Om jag rätt förstått författarens avsikt med sin lärobok, menar han, att man i realskolan bör avstå från att fordra allt för stor stränghet i bevisföringen. Detta är också min åsikt. Det är ju orimligt att begära, att pojkar på 12 à 13 år skola fullt förstå ett arbete, som ställer så stora fordringar på tankeskärpa som Euklides' elementer.

Sådana fordringar på tankeskärpa bör man däremot kunna ställa på gymnasiets lärjungar. Att dessa få göra bekantskap med en någorlunda sträng framställning av geometrien, synes mig högeligen önskvärt. Det kan ej förnekas, att studiet av en sträng framställning av geometrien utgör ett av de yppersta medlen att bibringa skolans elever vana vid stränghet i bevisföring och insikt i betydelsen av exakthet i uttrycken.

Min åsikt om geometriundervisningen vid de allmänna läroverken är sålunda följande. I realskolan bör man huvudsakligen hålla sig till de geometriska satsernas innehåll, d. v. s. bibringa eleverna geometriskt vetande och utveckla deras åskådningsförmåga. Framställningens form bör spela en mera underordnad roll. Vid repetitionen i gymnasiet av realskolans geometriska kurs bör däremot framställningens form vara huvudsaken. Bevisföringen bör helst vara strängare än den euklideiska. Denna senare fordran behöver ej betyda, att ämnet därigenom göres mera svårfattligt för eleverna. Jag är övertygad om, att det nu för tiden är möjligt att skrifva en lärobok i geometri för gymnasiet, som i skärpa överträffar Euklides' elementer, utan att därmed bliva mera svårfattlig.

REGISTER.

Sidan

Förord ... 3
Inledning ... 5

Kap. I. Den euklideiska geometriens grunder enligt Hilbert.

§ 1. Förknippningsaxiomen ... 7
§ 2. Anordningsaxiomen ... 8
§ 3. Den projektiva geometrien ... 11
§ 4. Peanos grafiska axiom ... 15
§ 5. Kongruensaxiomen ... 16
§ 6. Euklides I: 1—28 ... 18
§ 7. Satserna i Euklides' 3:dje bok ... 19
§ 8. Kongruenssatser i det tredimensionala rummet ... 20
§ 9. Kongruenta avbildningar ... 21
§ 10. Kontinuitetsaxiomen ... 23
§ 11. Parallellaxiomet ... 25
§ 12. Allmänna betraktelser över Hilberts axiomsystem ... 26

Kap. II. De icke-euklidiska geometrierna.

§ 13. Något ur parallellteoriens historia ... 27
§ 14. Poincarés »icke-euklideiska värld» ... 31
§ 15. Inversioner eller avbildningar med reciproka radier ... 33
§ 16. Hilberts axiom och den nya geometrien ... 34
§ 17. Trigonometrien i den nya geometrien ... 36
§ 18. Ortogonalcirkelgeometrien och den hyperboliska geometrien 38
§ 19. Knippen av o-cirklar och deras ortogonalcirklar ... 39
§ 20. Den hyperboliska geometriens absoluta polarsystem ... 41
§ 21. Den hyperboliska geometriens paralleller och gränsklot ... 44
§ 22. De sfäriska och elliptiska geometrierna ... 46
§ 23. Cirklar, som tangera tre givna cirklar ... 50

Kap. III. Polygoner med lika stora ytor och polyedrar med lika stora volymer.

§ 24. Euklides behandling av ytlika polygoner och volymslika polyedrar ... 52
§ 25. Ekvivalenta polygoner ... 53
§ 26. Likytliga polygoner ... 54
§ 27. Polyedrar med lika volymer ... 55
Pedagogiska tillämpningar ... 57

BIHANG.

I § 9 behandlades kongruenta avbildningar. Rörelser definierades såsom sådana kongruenta avbildningar, som kunna sammansättas av en translation och en rotation. Det bevisades, att rotationer kring axlar genom en och samma punkt P kunna sammansättas till en enda rotation kring en axel genom P. Däremot anfördes ej något bevis för att två rörelser i allmänhet kunna ersättas med en enda rörelse. Detta påstående kan ytterst lätt bevisas, om man antingen får förutsätta vissa av den projektiva geometriens satser eller parallellaxiomet. Sedan detta arbete till större delen tryckts, har jag lyckats finna ett bevis för satsen, som är oberoende av ovan nämnda förutsättningar men ändock relativt enkelt. Det är detta bevis, som jag här tänker framställa.

Först och främst är det kanske skäl i att något förtydliga framställningen i § 9 av rotationer. Antag, att OX är rotationsaxeln, att OA och OB äro normaler till OX, OM bisektris till vinkeln AOB, och att rotationen i fråga $\mathfrak{R}$ överför vinkelbenet OA i vinkelbenet OB. $\mathfrak{R}$ definierades som resultanten till symmetrierna kring planen XOM och XOB, utförda i nu nämnd ordning. Utom $\mathfrak{R}$ finns det en enda kongruent avbildning $\mathfrak{S}$, som för vinkelbenet OX i sig självt och vinkelbenet OA i vinkelbenet OB. $\mathfrak{S}$ är tydligen symmetrien kring planet XOM. $\mathfrak{S}$ överför vinkelbenet OM i sig självt; $\mathfrak{R}$ överför intet enda vinkelben i planet AOB i sig självt. $\mathfrak{R}$ kan därför också sammansättas av symmetrierna kring planen XOA och XOM eller av symmetrierna kring planen XOM_1 och XOB_1 eller av symmetrierna kring planen XOA_1 och XOM_1, om vi med OA_1 beteckna ett vinkelben i planet AOB, som av $\mathfrak{R}$ föres i vinkelbenet OB_1, och med OM_1 beteckna bisektrisen till vinkeln A_1OB_1. $\mathfrak{R}$ kan således ersättas av symmetrier kring två plan genom OX. Den första eller den sista symmetriens symmetriplan kan väljas efter behag genom OX. Det andra symmetriplanet är sedan fullt bestämt.

Den translation $\mathfrak{T}$, som har AB till translationsaxel och överför punkten A i punkten B, definierades såsom resultanten till två symmetrier $\mathfrak{S}$ och $\mathfrak{S}_1$. $\mathfrak{S}$ har till symmetriplan normalplanet till AB i den punkt M, som är mittpunkten till sträckan AB; $\mathfrak{S}_1$ har till symmetriplan AB:s normalplan i B. $\mathfrak{T}$ och $\mathfrak{S}$ äro de enda kongruenta avbildningar, som föra A i B och varje halvplan ABX i sig självt. $\mathfrak{T}$ har inga fixpunkter, $\mathfrak{S}$ har varje punkt i sitt symmetriplan till fixpunkt. $\mathfrak{T}$ kan således ersättas av symmetrien $\mathfrak{S}_2$ med AB:s normalplan i A till symmetriplan och symmetrien $\mathfrak{S}$. Vidare är det tydligt, att punkterna A och B kunna ersättas av två punkter A_1 och B_1 på AB, sådana att $\mathfrak{T}$ överför A_1 i B_1. En av dessa kan väljas efter behag. $\mathfrak{T}$ kan således ersättas av två symmetrier kring normalplan till AB, så att antingen den första eller den sista symmetriens symmetriplan kan väljas efter behag, blott det är normalplan till AB. Den återstående symmetriens symmetriplan är då fullt bestämt.

Låt AOC vara en rät vinkel, A_1OC en av denna vinkels sidovinklar samt OB ett i planet AOC beläget vinkelben, som ligger på samma sida om räta linjen OA som vinkelbenet OC! Det är lätt att inse, att vinkelbenen OB och OC ligga på samma sida om den räta linje OM, som delar vinkeln AOB mitt itu. Vinkelbenen OA och OC däremot ligga på var sin sida om OM. Det är klart, att symmetrien kring planet XOM, där OX är normal till planet AOC, överför OC i ett vinkelben OD_1, som ligger på samma sida om OM som vinkelbenet OA, och att symmetrien kring planet XOB överför OD_1 i ett vinkelben OD, som ligger på motsatt sida om linjen OB som OA. Således:

Sats 1. *Varje rotation kring en axel OX, som för det mot OX vinkelräta vinkelbenet OA i vinkelbenet OB, för det i planet AOB belägna vinkelben OC, som med OA bildar rät vinkel och ligger på samma sida om räta linjen OA som vinkelbenet OB, i ett vinkelben OD, som ligger på samma sida om räta linjen OB som det vinkelben OA_1, som ligger i rät linje med vinkelbenet OA, men ej sammanfaller med detta.*

Vi skola tills vidare endast sysselsätta oss med sådana kongruenta avbildningar, som avbilda

punkterna i ett plan i punkterna i samma plan och en punkt P utom detta plan i en punkt, som ligger på samma sida om planet som P. Vi ha då endast att göra med rotationer kring axlar, som äro normaler till planet, och med symmetrier, som till symmetriplan ha planets normalplan. Eftersom vi endast behöva syssla med planets punkter, kunna vi tala om rotationer kring en punkt och mena då rotationer kring normalen i denna punkt. I stället för symmetrier kring normalplanen tala vi om symmetrier kring räta linjer.

Sats 2. *Translationen $\mathfrak{T}$ med AA_1 till translationsaxel, som för punkten A i punkten A_1, efterföljd av en rotation $\mathfrak{A}_1$ kring A_1, kan ersättas av en rotation $\mathfrak{A}$ kring A, efterföljd av translationen $\mathfrak{T}$.*

Normalerna AX och A_1X_1 till AA_1 äro givna; punkterna X och X_1 ligga på samma sida om AA_1 och i ett och samma plan. I detta plan ligga vidare vinkelbenen AB och A_1B_1 på samma sida om AA_1 som punkterna X och X_1. A_1 ligger mitt emellan punkterna A och A_2 på räta linjen AA_1. Vinklarna BAA_1 och $B_1A_1A_2$ antagas vara lika stora, likaledes vinklarna BAX och $B_1A_1X_1$. Sedan A_1B_1 valts, kan ju AB bestämmas så, att den uppfyller dessa villkor. Den rotation $\mathfrak{A}_1$, som för vinkelbenet A_1A_2 i A_1B_1, för vinkelbenet A_1X_1 i ett fullt bestämt vinkelben A_1Y_1. Den rotation $\mathfrak{A}$, som för AA_1 i AB, för AX i ett bestämt vinkelben AY. Det är lätt att inse, att vinkelbenen AY och A_1Y_1 ligga på samma sida om linjen AA_1. Translationen $\mathfrak{T}$ för AA_1 i A_1A_2, AX i A_1X_1, AB i A_1B_1 och AY i A_1Y_1. Transformationen $\mathfrak{T}\mathfrak{A}_1$, sammansatt av $\mathfrak{T}$, efterföljd av $\mathfrak{A}_1$, för AA_1 i A_1B_1 och AX i A_1Y_1. Men så är också förhållandet med transformationen $\mathfrak{A}\mathfrak{T}$. Eftersom det finns en enda kongruent avbildning av ovan angiven beskaffenhet, som uppfyller dessa villkor, sammanfalla transformationerna $\mathfrak{T}\mathfrak{A}_1$ och $\mathfrak{A}\mathfrak{T}$, och satsen är bevisad. Beviset föres med lätthet, om A_1B_1 och A_1X_1 eller A_1B_1 och A_1A sammanfalla.

Sats 3. *Translationen $\mathfrak{T}_1$, som för A i B och har AB till axel, efterföljd av translationen $\mathfrak{T}_2$, som för B i C och har BC till axel, kan ersättas av translationen $\mathfrak{T}$, som för A i C och har AB till axel, efterföljd av en rotation kring C.*

Två translationer kring samma axel kunna givetvis ersättas av en enda translation längs samma axel. Med hjälp av sats 2 visas således lätt, att satsen gäller, om A, B och C ligga i rät linje.

Ligga ej A, B, C i rät linje, äro de hörnpunkter i en triangel; med I beteckna vi en av dennas inre punkter. Vinkeln XAB antages vara rät, och punkterna X och C antagas ligga på samma sida om linjen AB. $\mathfrak{T}$ för B i A_1 och X i Y, så att X, Y, C och I ligga på samma sida om AB. Den rotation $\mathfrak{B}$, som för vinkelbenet BA_1 i vinkelbenet BC, för vinkelbenet BY i vinkelbenet BZ, som enligt sats 1 ligger på samma sida om linjen BC som punkten A, således också som punkten I. Av samma skäl för $\mathfrak{T}_2$, efterföljd av den rotation $\mathfrak{C}$, som för vinkelbenet CB_1, där punkten C ligger mellan punkterna B_1 och B, i vinkelbenet CA, vinkelbenet BZ i vinkelbenet CU, så att I och U ligga på samma sida om AC. $\mathfrak{T}_1\mathfrak{B}\mathfrak{T}_2\mathfrak{C}$ för således vinkelbenen AB och AX i vinkelbenen CA och CU respektive. Ligger punkten C_1 på AC och A mellan C_1 och C, för den rotation $\mathfrak{A}$, som för vinkelbenet AB i vinkelbenet AC_1, enligt sats 1 vinkelbenet AX i ett vinkelben AV, som ligger på samma sida om linjen AC_1 eller AC som B, d. v. s. som I, ty AX och AC_1 ligga på var sin sida om linjen AB. Translationen $\mathfrak{T}$ överför vinkelbenet AC_1 i vinkelbenet CA och AV i CU. Således gäller $\mathfrak{T}_1\mathfrak{B}\mathfrak{T}_2\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{T}$. Enligt sats 2 gäller nu $\mathfrak{B}\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{A}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}\mathfrak{C}_2$, således också $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{C}_3 = \mathfrak{T}\mathfrak{C}_2$, d. v. s. $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}\mathfrak{C}_4$. Med $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$ beteckna vi då rotatationer kring punkten C. Gäller parallellaxiomet, reduceras $\mathfrak{C}_4$ till identiteten, således $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$ till $\mathfrak{T}$.

Sats 4. Transformationen $\mathfrak{T}\mathfrak{B}$, där $\mathfrak{T}$ är den translationen längs axeln AB, som för A i B, och $\mathfrak{B}$ är en rotation kring B, kan ersättas av transformationen $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$, där $\mathfrak{S}$ är symmetrien kring sträckan AB:s mittpunktsnormal s och $\mathfrak{S}_1$ symmetrien kring en rät linje s_1 genom B. Omvänt kan $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ ersättas av $\mathfrak{T}\mathfrak{B}$, som däremot aldrig kan ersättas av en enda symmetri.

$\mathfrak{T}$ kan ersättas av symmetrierna $\mathfrak{S}$ och $\mathfrak{S}_2$, om $\mathfrak{S}_2$ till symmetrilinje har normalen s_2 i B till linjen AB. $\mathfrak{B}$ kan ersättas av $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1$, där $\mathfrak{S}_1$ är en symmetri, som till symmetrilinje har en fullt bestämd linje s_1 genom B. Således är $\mathfrak{T}\mathfrak{B} = \mathfrak{S}\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$, ty $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_2$ är den identiska transformationen. Första delen af satsen är sålunda bevisad. Omvändningen bevisas genom inskjutning av två symmetrier $\mathfrak{S}_2$. Kunde slutligen $\mathfrak{T}\mathfrak{B}$ ersättas av en enda symmetri, måste denna vara

$\mathfrak{S}$, ty endast denna symmetri överför punkten A i punkten B. Men $\mathfrak{T}\mathfrak{B} = \mathfrak{S}\mathfrak{S}_2$ kan tydligen ej ersättas av $\mathfrak{S}$.

Vi införa nu följande definition: *Två i samma plan belägna räta vinklar AOB och CO_1D äro likriktade, om den ena kan öfverföras i den andra genom en translation längs axeln OO_1 och en rotation i endera av punkterna O eller O_1. I annat fall sägas de vara olikriktade.*

Vinklarna AOB och BOA äro enligt definitionen olikriktade. Vinkelbenens ordningsföljd i en vinkel måste därför noga framhållas.

Kan AOB föras i CO_1D genom en translation $\mathfrak{T}$ längs OO_1 och en rotation $\mathfrak{O}_1$ i O_1, kan enligt sats 2 $\mathfrak{T}\mathfrak{O}_1$ ersättas av $\mathfrak{O}\mathfrak{T}$. Således kan CO_1D överföras i AOB genom $\mathfrak{T}_1\mathfrak{O}_2$, där $\mathfrak{T}_1$ är den translation, som upphäver $\mathfrak{T}$, och $\mathfrak{O}_2$ den rotation i O, som upphäver $\mathfrak{O}$. Definitionen innebär därför ingen motsägelse. Äro A_1OB_1 och AOB likriktade och likaledes $C_1O_1D_1$ och CO_1D likriktade, äro enligt sats 2 även A_1OB_1 och $C_1O_1D_1$ likriktade. Äro räta vinklarna AOB och CO_1D likriktade med räta vinkeln EO_2D, äro de enligt sats 3 sinsemellan likriktade. Men detta gäller, även om AOB och CO_1D äro olikriktade med EO_2D. Ty i så fall äro vinklarna A_1OB och C_1O_1D, där AOB och A_1OB äro sidovinklar samt C_1O_1D och CO_1D likaledes sidovinklar, likriktade med EO_2D, således sinsemellan likriktade. AOB kan då överföras i CO_1D genom samma translation och rotation, som för A_1OB i C_1O_1D. Således:

Sats 5. Räta vinklar, som äro likriktade eller olikriktade med en och samma räta vinkel, äro likriktade.

En symmetri överför enligt sats 4 en rät vinkel i en olikriktad rät vinkel. Två symmetrier kring räta linjer i samma plan överföra således enligt sats 5 en rät vinkel i en likriktad rät vinkel. I allmänhet gäller därför följande sats.

Sats 6. En kongruent avbildning, som avbildar ett plan i sig självt och en punkt P utom detta plan i en punkt på samma sida om planet som P, kan antingen sammansättas av ett jämnt antal symmetrier eller av ett udda antal symmetrier kring planets normalplan.

Ligga således räta linjerna a och b i samma plan som punkten P och är S den punkt, som av symmetrierna $\mathfrak{A}$ och $\mathfrak{B}$ med a och b som symmetrilinjer överföres i punkten P, kan $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ersättas av $\mathfrak{M}\mathfrak{P}$, där $\mathfrak{M}$ är symmetrien kring sträckan SP:s mittpunktsnormal och $\mathfrak{P}$ symmetrien kring en rät linje genom punkten P. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ kan ju nämligen ersättas av $\mathfrak{M}$ och en viss kongruent transformation med P till fixpunkt. Denna transformation måste kunna ersättas av ett udda antal symmetrier kring räta linjer genom P, ty eljest skulle $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ kunna ersättas av ett udda antal symmetrier, vilket enligt sats 6 är uteslutet. Tre symmetrier och således ett udda antal symmetrier kring räta linjer genom samma punkt kunna ju ersättas med en enda sådan. Således:

Sats 7. Två symmetrier kring normalplan till ett och samma plan kunna ersättas av två dylika symmetrier, så att den sista symmetriens symmetriplan går genom en efter behag vald punkt.

Antag, att de tre rotationsaxlarna a, b, c äro så valda, att ej a och b ligga i ett och samma plan, att B är en efter behag vald punkt på b och C likaledes en efter behag vald punkt på c. Med d beteckna vi räta linjen BC. Rotationen kring b kan ersättas av symmetrien kring ett visst plan lb, som skär planet Ba i en rät linje l genom B, och symmetrien kring planet bd. Mellan dessa båda symmetrier kan man inskjuta symmetrien kring planet ld, utförd två gånger. Resultatet av dessa är ju identiteten. Rotationen kring b kan således ersättas av rotationer kring l och d i nu nämnd ordning. Rotationerna kring d och c kunna ersättas av en enda rotation kring en axel r genom C. De tre rotationerna kring a, b, c, utförda i nu nämnd ordning, kunna således ersättas av rotationerna kring a, l och r i nu nämnd ordning, så att a och l ligga i samma plan och r går genom en godtyckligt vald punkt på c.

Rotationerna kring a och l kunna ersättas av symmetrierna kring två plan $\mathfrak{a}$ och $\mathfrak{l}$ genom a och l respektive. Som andra symmetriplan i rotationen kring a och första symmetriplan i rotationen kring l välja vi nämligen planet al. Dessa båda symmetrier ge till resultat identiteten.

Från C lägga vi ett gemensamt normalplan $\mathfrak{d}$ till $\mathfrak{a}$ och $\mathfrak{l}$. Vi ha i sats 7 bevisat, att symmetrierna kring $\mathfrak{a}$ och $\mathfrak{l}$ kunna ersättas av symmetrierna kring två normalplan $\mathfrak{g}$ och $\mathfrak{c}$ till $\mathfrak{d}$, så att det sista går genom C. Mellan symmetrierna kring $\mathfrak{g}$ och $\mathfrak{c}$ inskjuta vi två symmetrier kring

δ. Dessa fyra symmetrier kunna ersättas av två rotationer kring snittlinjerna av planet δ med planen $\mathfrak{g}$ och $\mathfrak{c}$. Den sista rotationen kan med rotationen kring r, som går genom C, sammansättas till en enda rotation. Vi ha således bevisat:

Sats 8. Tre rotationer och således hur många rotationer som helst kunna ersättas av två rotationer.

Är $\mathfrak{T}$ den translation längs axeln AB, som för A i B, kan $\mathfrak{T}$ tydligen ersättas av två rotationer i $\mathfrak{M}$ och $\mathfrak{B}$ längs axlar, som äro i samma plan belägna normaler till AB. $\mathfrak{M}$:s axel går genom mittpunkten till sträckan AB; $\mathfrak{B}$:s axel går genom B. Är nu $\mathfrak{V}$ en rotation kring en axel genom B, kan således $\mathfrak{T}\mathfrak{V}$ ersättas av två rotationer. En rörelse kan således alltid ersättas av två rotationer, ty en rörelse, som för A i B definerades i § 9 som $\mathfrak{T}\mathfrak{V}$.

Låt $\mathfrak{T}$ vara den translation längs axeln AB, som för punkten A i punkten B, och $\mathfrak{T}_1$ den translation längs axeln BC, som för punkten B i punkten C. Med $\mathfrak{V}$ beteckna vi en rotation kring en axel genom B, med $\mathfrak{V}_1$ en rotation kring en axel genom C. Med $\mathfrak{T}_2$ beteckna vi den translation längs axeln AC, som för punkten A i punkten C, med $\mathfrak{V}_2$ en rotation kring en axel genom C. Vi skola bevisa likheten $\mathfrak{T}\mathfrak{V}\mathfrak{T}_1\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{T}_2\mathfrak{V}_2$.

Vi ha bevisat, att $\mathfrak{T}\mathfrak{V}\mathfrak{T}_1\mathfrak{V}_1$ kan ersättas med $\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2$ och $\mathfrak{T}_2\mathfrak{V}_2$ med $\mathfrak{R}_3\mathfrak{R}_4$, om vi med $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{R}_4$ beteckna rotationer. Av utredningen i § 9 framgår, att $\mathfrak{T}\mathfrak{V}\mathfrak{T}_1\mathfrak{V}_1$ antingen kan ersättas med $\mathfrak{T}_2\mathfrak{V}_2$ eller med $\mathfrak{T}_2\mathfrak{V}_2\mathfrak{S}$, där $\mathfrak{S}$ betyder en symmetri kring ett plan genom punkten C. Antaga vi nu, att $\mathfrak{T}\mathfrak{V}\mathfrak{T}_1\mathfrak{V}_1$ kan ersättas av $\mathfrak{T}_2\mathfrak{V}_2\mathfrak{S}$, gäller $\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_3\mathfrak{R}_4\mathfrak{S}$. Denna likhet innebär tydligen, att $\mathfrak{S}$ kan ersättas med två rotationer, $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_5\mathfrak{R}_6$. Låt P vara en punkt på $\mathfrak{R}_5$:s rotationsaxel a, och antag, att den av $\mathfrak{R}_6$ föres i punkten S. Som symmetriplan måste $\mathfrak{S}$ ha det plan, som i mittpunkten av sträckan PS är normalplan till räta linjen PS. Detta plan går genom $\mathfrak{R}_6$:s rotationsaxel b. Vi veta, att $\mathfrak{R}_6$ kan ersättas av $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}$, om vi med $\mathfrak{S}_1$ beteckna symmetrien kring ett fullt bestämt plan genom b. Således gäller $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_5\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}$, d. v. s. $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{R}_5$. Men den senare likheten är uppenbarligen orimlig. Vi ha sålunda bevisat likheten $\mathfrak{T}\mathfrak{V}\mathfrak{T}_1\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{T}_2\mathfrak{V}_2$. Därmed ha vi också bevisat:

Två efter varandra utförda rörelser kunna ersättas med enda rörelse.

Med $OABC$ beteckna vi en trekant, i vilken de tre vinkelbenen OA, OB, OC med varandra bilda räta vinklar. Trekanten $OABC$ skiljer sig från $OBAC$ endast genom kanternas ordningsföljd. Vi införa följande definition:

De rätvinkliga trekanterna $OABC$ och $O_1A_1B_1C_1$ äro likriktade, om den ena kan föras i den andra genom en rörelse, exempelvis genom en translation längs OO_1, åtföljd av en vridning. I annat fall äro de olikriktade.

Emedan två efter varandra utförda rörelser kunna ersättas av en enda rörelse, gäller: *Två rätvinkliga trekanter, som antingen båda äro likriktade eller båda olikriktade med en tredje rätvinklig trekant, äro likriktade.* Härav följer: *En rörelse kan alltid ersättas med ett jämnt antal symmetrier, varje annan kongruent avbildning med ett udda antal symmetrier.* Påståendet i § 9, att en rörelse kan ersättas av två symmetrier, är ej riktigt, och har inkommit genom ett förbiseende.

Det är nu lätt att uppställa en definition på likriktade, ej räta vinklar i samma plan och på likriktade, ej rätvinkliga trekanter. I Enriques, Fragen der Elementargeometri äro likriktade vinklar definierade oberoende av kongruensläran, således endast med hjälp av axiomen i grupperna I och II. Den erforderliga utredningen är emellertid relativt lång. Av utrymmesskäl äro i ifrågavarande arbete likriktade trekanter ej behandlade.

Det är ingalunda osannolikt, att min framställning här ovan kan förenklas. Jag har emellertid ej lyckats finna någon enklare metod.

Ur metodisk synpunkt är det naturligtvis bättre att med hjälp av axiomen i grupperna I och II definiera likriktade trekanter, därefter definiera rörelser som kongruenta avbildningar, i vilka trekanter motsvaras av likriktade trekanter och slutligen bevisa, att två rörelser kunna sammansättas till en enda rörelse. Min metod för fortare till målet och saknar sålunda ej existensberättigande. Huruvida någon likartad framställning förut publicerats, är mig obekant.

REDOGÖRELSE

FÖR

HÖGRE ALLMÄNNA LÄROVERKET

I ÖSTERSUND

LÄSÅRET 1915—1916

JÄMTE

INBJUDNING TILL ÅRSEXAMEN OCH AVSLUTNING

DEN 6 JUNI 1916

ÖSTERSUND 1916
A.-B. JÄMTLANDS-POSTENS TRYCKERI

REDOGÖRELSE

FÖR

ÖSTERSUNDS HÖGRE ALLMÄNNA LÄROVERK

LÄSÅRET 1915—1916.

A. UNDERVISNINGEN.

1. *Höstterminen* börjaoe den 21 Augusti med prövningar och slutade den 21 december. *Vårterminen,* som tog sin början den 12 januari, kommer att avslutas den 6 juni.

Den egentliga undervisningen tog sin början höstterminen den 26 augusti kl. 12 och upphörde den 17 december kl. 2.35 e. m.; den började vårterminen den 13 januari kl. 12 för att fortgå till och med den 2 juni.

Lov för hela låroverket har under höstterminen givits den 2 oktober, den 1 november och den 2 december; under vårterminen den 4 februari, den 8 mars och den 13 maj.

2. Gemensam morgonbön med sång och bibelläsning har förrättats varje läsdag kl. $7^3/_4$—8 f. m. Den offentliga högmässogudstjänsten i stadens kyrka har bevistats av så stor del av skolungdomen, som utrymmet på de för densamma anvisade platserna medgivit, varför lärjungarna haft obligatorisk kyrkogång ungefär var tredje söndag.

Undervisning i läsämnena ha varit förlagd till 8—10.35 f. m. och 12—2.35 e. m. alla dagar.

Dessutom har undervisning i läsämnena ägt rum för 4 a och 5 b onsdag 5—6.30 e. m. (laborationer), för 4 b torsdag 5—6.30 e. m., för 5 a tisdag 5—6.30 e. m. (laborationer), för kl. 6 måndag 5—6.30 e. m. (laborationer), för II ring onsdag 2.45—3.30 e. m., tisdag 5—6.30 e. m. (laborationer), samt fredag 2.45—3.30 e. m., för III ring fredag 5—6.30 e. m. (laborationer), måndag, tisdag, onsdag och torsdag 2.45—3.30 e. m., för IV ring tisdag, onsdag och torsdag 2.45—3.30 e. m.

Övningarna i sång och instrumentalspel hava ägt rum måndag 4—7 e. m., tisdag 4.30—6.30 e. m., torsdag och fredag 4.30—7 e. m. och onsdag 4—6 e. m. samt lördag 4—7 e. m.

Övningar i välskrivning och de obligatoriska teckningsövningarna hava varit förlagda till samma tider som undervisningen i läsämnena.

Gymnastikövningarna hava försiggått måndag, onsdag, fredag och lördag 9.50—10.35, f. m. och 11.20—11.50 f. m. varje läsdag; tisdag, torsdag, fredag och lördag 12—12.45 e. m. och måndag, onsdag, torsdag och lörpag 2.45—3.30 e. m.; *vapenövningarna* måndag och onsdag 12—12.45 och tisdag och fredag 2.45—3.30 e. m.

3. Uppgift för höstterminen 1915 å antalet lärotimmar för läsämnena.

1	2	3	4	5	6	7
Avdelningar och linjer	Närvarande lärjungar under höstterminen	Timmar				Anmärkningar
		Skilda	Gemensamma för		Summa	
			lärjungar från avdelningar å samma linje	lärjungar från avdelningar å olika linjer		
1 a	31	24	—	—	24	1) Därav 1 t. friv. laborationer i fysik: 4 a o. 4 b (med 47 deltagande) uppdelade i 2 laborationsavd. vardera; varje avdeln. har laborerat 2 t. var annan vecka; ökar lärarnes timtal med 2.
1 b	31	24	—	—	24	
2 a	28	26	—	—	26	2) Därav 1 t. friv. lab. i kemi: 5 a o. 5 b (med 41 deltagande) uppdelade i 2 lab. avd. vardera: ökar lärarnes timtal med 2.
2 b	27	26	—	—	26	
3 a	34	27	—	—	27	3) Med 5 a gemensamt i friv. franska (7 deltagande).
3 b	33	27	—	—	27	4) Därav 2 t. friv. franska (4 deltagande) och 1 t. friv. lab. i fysik (13 deltagande).
4 a	25	29[1])	—	—	29	5) Gemensamt med I R i krist. 2 t., mod. 3 t., tyska 2 t., hist. 3 t.; geogr. 2 t. och biologi 1 t.
4 b	26	29[1])	—	—	29	6) Därav 1 t. friv. lab. i fysik (16 deltagande). Den ena ord. timmen i kemi använd till laborationer.
5 a	22	29[2])	2	—	31	7) Gemensamt med II R i krist. 2 t., mod. 2 t., tyska 2 t., franska 4 t., hist. 3 t. o. geogr. 1 t.
5 b	22	29[2])	(2)[3])	—	29	8) Däraf 1 t. friv. lab. i fysik (8 deltagande). Den ena ord. timmen i kemi använd till laborationer.
6	13	31[4])	—	—	31	9) Med III R gemensamt i krist. 2 t., mod. 3 t., tyska 2 t., franska 4 t., hist. 3 t., filosofi 1 t. o. biologi 2 t.
I R	18	15	—	13	28	10) Med III L. B. gemensamt i latin 6 t., eng. 1 t. och fysik 2 t.
I L	11	15	—	(13)[5])	15	11) Med IV R gemensamt i krist. 2 t., mod. 3 t., tyska 2 t., franska 4 t., hist. 3 t., filosofi 1 t. och biol. 1 t.
II R	10	16[6])	—	14	30	12) Med IV L. B. gemensamt i latin 6 t., engelska 2 t. och fysik 2 t.
II L	15	15	—	(14)[7])	15	
III R	8	15[8])	—	17	32	
III L. B.	4	5	9	(17)[9])	14	
III L. A.	4	7	(9)[10])	(17)[9])	7	
IV R.	9	15	—	16	31	
IV L. B.	4	5	10	(16)[11])	15	
IV L. A.	4	7	(10)[12])	(16)[11])	7	
Summa	379	416	21	60	497	

4. Begagnade läroböcker och genomgångna lärokurser i läsämnen.

a) **Läroböcker m. m.**

Kristendom Bibeln (I—IV), svenska psalmboken (1—5).
NORLÉN och LUNDGREN, biblisk historia (1—3).
CORNÉLIUS, kyrkohistoria (I—IV).
LUTHERS lilla katekes med kort utveckling (I—IV).
NORBECK, teologi (II—IV).
LUNDIN, livsbilder ur kyrkans historia.

Modersmålet: REBRE, svensk språklära (1—3).
STURZEN-BEGKER, svensk rättskrivningslära (I—2).
SUNDÉN, språklära i sammandrag (4—5).
LINDVALL, svensk läsebok för realskolan (1—3, 6).
LINDVALL, övningar i satsanalys (2—5).
RUNEBERG, Fänrik Ståls sägner (3), Älgskyttarne (4).
TEGNÉR, Fritiofs saga (5).
SNOILSKY, svenska bilder (4).
SCHÜCK-LUNDAHL, svensk läsebok för folkskolans högre klasser I (4—5).
STEFFEN, svensk litteraturhistoria (I—IV).
HAMMERICH, danska och norska läseboken (II).
STEFFEN, isl. och fornsv. litteratur i urval (I).
STPFFEN, översikt av sv. litt. (II—IV).
Arbeten av BELLMAN, KELLGREN, LENNGREN, ATTERBOM, STAGNELIUS, GEIJER, TEGNÉR, RUNEBERG, PALMÆR, ALMQVIST, v. BRAUN, RYDBERG, IBSEN m. fl., övers. av Shakspeare, Byron m. fl.

Tyska: HJORT, Språklära (1—6, I—IV).
HJORT LINDHAGEN, Praktisk lärobok i tyska språket (1—3).
RAAB, Reproduktionsövningar (1—6).
HJORTH, Bihang till Praktisk Lärobok (2—3).
HJORTH och HEUMANN, tyska skrivövniegar och brev (5).
RODHE, tyska översättningsövningar (I—IV).
SUDERMANN, Frau Sorge (II).
ÖHQUIST, Deutsche Prosa und Dichtung (4, 5, 6, I, II).
FRENSSEN, Peter Moors Fahrt (III).
C. O. KOCH, tyska anekdoter och småberättelser (3—4).
E. GRIP, Gustav Adolfs Page (IV).
FREYTAG, Aus den Kreuzzügen (III).

Engelska: AFZELIUS, engelsk språklära (IV).
ELFSTRAND, engelsk elementarbok (4).
JESPERSEN och RODHE, engelsk läsebok för realskolan (5, 6, I, II).
ELFSTRAND, kortfattad engelsk språklära (4—6, I L, II L).
ELFSTRAND, engelsk språklära (I R—III R).
CONAN DOYLE, Sherlock Holmes (III L).
COLLINS, After dark (II R).
ESCOTT, England, its people, polity and pursuits (IV).
GARDINER, Historical Biographies (IV L).

BARRY PAIN, Eliza (III).
KROLLICK, Modern Travels and Explorations (IV R).
JACK LONDON, White Fang (III R).
THACKERAY, Sam. Titmarsh (IV R).
RODHE, översättningsövningar (I—II).
CALWAGEN, engelska översättningsövningar (I).

Franska: BÖDTKER & HÖST, lärobok i franska (5—6, II—III).
EDSTRÖM, kortfattad fransk språklära (II—IV).
EDSTRÖM, Fransk läsebok (IV).
SANDEAU, La roche aux mouettes (III).
DAUDET, Le petit chose (IV).

Latin: TÖRNEBLAH-LINDROTH, (mindre) grammatik (I—IV).
PONTÉN, latinska författare (I—IV).

Grekiska: PETTERSSON, Grekisk läsebok (III).
SILLÉN-LÖFSTEDT, grammatik (IV).
XENOPHON, Anabasis, utg. av Dalsjö (III—IV).
PLATONS Apologi und Kriton herausgegeben von Albert von Bamberg (IV).
HOMERUS (V—VIII) utg. av Knös (IV).

Historia: ODHNER-WESTMAN, Fäderneslandets historia för realskolan (1—6).
EKMARK, Historisk läsebok (2, 3, 4, 5).
RYDFORS, Historisk läsebok (1).
ODHNER-HILDEBRAND, Sveriges, Norges och Danmarks historia för skolans högre klasser (II—IV).
ODHNER-HILDEBRAND, Forntidens och medeltidens svenska historia för gymnasiet (I).
BOËTHIUS, Kulturh. översikt av forntidens och medeltidens allmänna historia (I).
HÖIJER, Sveriges nyaste historia jämte grundlinjer till Sveriges statskunskap (6).
ESTLANDER, Historisk läsebok (2, 3, 4, 5, 6).
PALLIN-BOËTHIUS, Allmän historia (II—IV).
PALLIN-BOËTHIUS, Allmän historia för realskolan (3—6).
HÖIJER, Svenskt samhällsskick (IV).

Geografi: CARLSSON och CARLSSON-FAGERLUND, skolgeografi (1—6, I och II).
FEHR, geografiska skildringar (4, 5).
ANNA SANDSTRÖM, Natur och arbetsliv i svenska bygder I. (1—I).

Matematik: BERGS räknelära (1—5).
JOSEPHSON, Lärobok i geometri (I—II).
LINDMAN, Lärobok i geometri (4—6, I).
HEDSTRÖM-RENDAHL, Trigonometri (II—IV).
JOSEPHSON, Rymdgeometri (III—IV).
COLLIN, Analytisk geometri (III—IV).
COLLIN, Exempelsaml. till algebra (4—6, I—IV).

Naturvetenskap: FORSELL, inledning till botaniken (3—6).
FORSELL-SKÅRMAN, lärobok i botanik (I, III och IV).
ALMQVIST, zoologi (II—IV).
KROK & ALMQVIST, svensk flora (3—6).
MOLL, lärobok i fysik (I—IV); på latinlinien den förkortade upplagan.
HELLSTEN, Experimentell fysik och astronomi (4—6, 1).
ABENIUS. lärobok i oorganisk kemi (I—IV).
ABENIUS, kort lärokok i kemi (5, 6).
BOAS, lärobok i zoologi (4, 5).
JOHANSSON & MAGNUSSON, Femte klassens kurs i geologi (5).
L. G. ANDERSSON, läran om djuren (1—3, 6).

Filosofisk propedevtik: SJÖBERG & KLINGBERG, logik (III—IV).
„ „ antropologi (IV).

b) LÄROKURSER.

REALSKOLAN.

Första klassen.

Kristendom 3 t. Första trosartikeln och tio Guds bud på grundval av valda berättelser, företrädevis ur gamla testamentet. Valda psalmverser och psalmer utantill. (Sundström).

Modersmålet 5 t. Innanläsning. Övningar att återgiva det lästa. Berättande av sagor. Satslära: den enkla satsen. Formlära: de viktigaste ordklasserna. Rättskrivningsövningar på lärorummet. (Danell i 1 a och Gyzander i 1 b).

Tyska 6 t. Hjorth och Lindhagen: Praktisk lärobok: 22 stycken. Grammatik: Substantivens och adjektivens vanliga böjningssätt, räkneord, de viktigaste pronomina, indikativ av de temporala hjälpverben samt av de svaga verben i aktiv. Talövningar och andra tillämpningsövningar. (Danell i 1 a och Gyzander i 1 b).

Matematik 4 t. De fyra räknesätten i hela tal. Inledning till decimalbråk. Metersystemets längdenheter, rymd-, vikt- och tidsenheter. (Dahlberg i 1 a och Wikström i 1 b).

Naturlära 2 t. Om människan. Undersökning av levande växter med tydliga blomdelar. (Fahlander).

Historia 2 t. Odhner-Westmans lärobok intill 1319. Läsning av Nordens guda- och hjältesagor. (Rignell i 1 a och Gyzander i 1 b).

Geografi 2 t. Översikt av världsdelarne och världshaven. Upplysningar om jordens form och rörelser. Sveriges, Norges och Danmarks fysiska och politiska geografi. (Rignell i 1 a och Gyzander i 1 b).

Andra klassen.

Kristendom 3 t. Bibliska berättelser, hufvudsakl. N. T., jämte lärdomar ur den kristna tros- och sedeläran med anslutning till andra trosartikeln och Herrens bön. Bibelläsning; psalmer (Sundström).

Modersmålet 5 t. Innanläsning. Grammatik (kurs enl. Rebbe) och satsanalys. Enkla reproduktionsövningar, i allmänhet muntliga, någon gång skriftliga. Framsägning av valda poetiska stycken. Återgivande av sagor och berättelser. Rättskrivningsövningar. (Lindvall i 2 a och Pahlberg i 2 b).

Tyska 6 t. Hjorth och Lindhagen, st. 23—48, delvis utantill. Substantivens och adjektivens deklinationer och adjektivens komparation, räkneord, pronomina, det viktigaste av verbalböjningar. Talövningar och andra tillämpningsövningar. (Lindvall i 2 a och Pahlberg i 2 b).

Historia 3 t. Fäderneslandets historia från och med 1319 till storhetstiden. Berättelser ur Greklands och Roms saga och historia. (Ljungstedt).

Geografi 2 t. Europas fysiska och politiska geografi fortsatt till Frankrike. (Ljungstedt).

Matematik 5 t. De fyra räknesätten i bråk med tillämpning på sorter. Huvudräkning. (Wikström i 2 a och Henriksson i 2 b).

Naturlära 2 t. Kortfattad översikt av däggdjuren; fåglar påbörjade. Det allmännaste av läran om de högre växternas yttre organ, inhämtat förnämligast genom undersökning av levande växter; växters insamling och preparering. Exkursioner. (Fahlander).

Tredje klassen.

Kristendom 3 t. Bibliska berättelser ur evangelierna repeterade samt apostlagärningarna jämte lärdomar ur den kristna tros- och sedeläran i anslutning till tredje trosartikeln samt instiftelseorden till dopet och nattvarden, psalmer. (Sundström).

Modersmålet 6 t. Innanläsning med förklaring och redogörelse för det lästa. Fänrik Ståls sägner. Formläran och det viktigaste av sats- och interpunktionsläran, satsanalys och satsbildningsövningar. Rättstavningsläran, rättskrivning efter diktamen varje vecka, interpunktionsövningar. Framsägning av valda poetiska stycken. Uppsatsövningar på lärorummet under lärarens ledning. (Gyzander i 3 a och Pahlberg i 3 b).

Tyska 6 t. Hjorth och Lindhagen, Praktisk lärobok avslutad, delvis utantill. Koch, Tyska anekdoter, omkring 15 sidor. Formläran utförligare genomgången och repeterad. Behövliga delar av syntaxen muntligt meddelade. Talövningar. (Gyzander i 3 a och Pahlberg i 3 b).

Historia 3 t. Skandinaviens historia 1611—1718. Allmänna historien: forntiden. (Eklund).

Geografi 2 t. Europas fysiska och politiska geografi avslutad och repeterad. (Eklund).

Matematik 5 t. Aritmetik: bråk, sorter, regula de tri och procent- och ränteräkning; huvudräkning; geometriska räkningar och åskådningsövningar. (Dahlberg i 3 a och Henriksson i 3 b).

Naturlära 2 t. Zoologi: fåglar, kräldjur, groddjur och fiskar. Botanik: fröväxternas yttre organ, sexualsystemet, undersökning av levande växter. Exkursioner (Fahlander).

Fjärde klassen.

Kristendom 2 t. Israels historia, meddelad under läsning av valda delar av gamla testamentets skrifter. Belysande underrättelser ur den allm. religionshistorien. Översiktlig framställning av innehållet i det första hufvudstycket och de två första trosartiklarne. Psalmer. (Sundström i 4 a och Hägglund i 4 b).

Modersmålet 4 t. Schück och Lundahls läsebok. Älgskyttarna, Svenska bilder. Förklaring och redogörelse av det lästa jämte nödiga upplysningar ur verslära. Framsägning av inlärda stycken i bunden form. Satsanalys, interpunktions- och rättskrivningsprov. Var tredje vecka en reproduktion eller en uppsats över lättare ämnen efter lärarnes anvisning med avseende på behandlingen, utförd än i hemmet, än på lärorummet. (Danell i 4 a och Dahlberg i 4 b).

Tyska 4 t. Översättning av ungefär 50 sidor i Öhquists läsebok. Talövningar. Repetition av formläran. Syntax i anslutning till textläsningen. Var tredje vecka en reproduktionsövning eller skriftlig översättning till tyska, utförd än i hemmet, än på lärorummet. (Danell i 4 a och Dahlberg i 4 b).

Engelska 5 t. Det allmännaste av formläran. Elfstrands elementarbok. Skrivning på lärorummet. Enklare talövningar. (Allander i 4 a och Borgman i 4 b).

Historia 3 t. Fäderneslandets historia 1718—1809. Allmänna historien: medeltiden och tiden 1500—1648. (Danell i 4 a och Eklund i 4 b).

Geografi 2 t. Asiens och Afrikas fysiska och politiska geografi. (Sundström i 4 a, Eklund i 4 b).

Matematik 5 t. Geometri: Propp. 1—34 i Enklides första bok jämte några enkla problem; tredje boken påbörjad. Aritmetik: Föregående klassers aritmetiska kurser repeterade och utvidgade; sifferekvationer av första graden jämte lättare problem. (Persson i 4 a, Dahlberg i 4 b).

Naturlära 3 t. Botanik: undersökning av levande växter. Några växtfamiljer. Exkursioner. Zoologi: ryggradslösa djur. (Fahlander). Fysisk: kropparnes egenskaper i olika aggregationstillstånd. Det allmännaste av värmeläran. Frivilliga laborationsövningar. (Henriksson i 4 a, Wikström i 4 b).

Femte klassen.

Kristendom 2 t. Det viktigaste av den kristna tros- och sedeläran enligt bibeln och Luthers katekes: tredje artikeln, tredje, fjärde och femte huvudstyckena. Jesu liv och verksamhet huvudsakligen enligt Lucas evangelium. En överblick av nya testamentets skrifter. Valda psalmer med anslutning till kyrkoåret. (Sundström i 5 a, Hägglund i 5 b).

Modersmålet 3 t. Formläran och den allmänna satsläran repeterade. Rättstavnings och interpunktionsprov samt satsanalys. Läsning av Tegnér, Fritiofs saga, Schück-Lundahl Svensk läsebok II. Upplysningar ur versläran. Dispositionsövningar. Framsägning av inlärda stycken i bunden form. Var tredje vecka en uppsats. (Allander i 5 a, Eklund i 5 b).

Tyska 4 t. Öhquists läsebok omkring 60 sidor. Delar av syntaxen genomgångna. Formläran repeterad. Muntliga och skriftliga övningar. Var tredje vecka en översättning eller en reproduktionsövning. (Allander i 5 a, Lindvall i 5 b.)

Engelska 5 t. Jespersen-Rodhe, 96 sid. Formläran och behövliga delar av syntaxen i anslutning till texten. Muntliga och skriftliga övningar. Talövningar. (Allander i 5 a, Lindvall i 5 b).

Franska (frivilligt) 2 t. Bödtker och Höst, Lärobok i Franska, sid. 1—12, 19—22. (Borgman).

Historia 3 t. Fäderneslandets historia från 1809 till närvarande tid. Repetition av formtidens och medeltidens historia. Allmänna historien: nyare tiden från 1648. (Eklund i 5 b, Ljungstedt i 5 a).

Geografi 2 t. De främmande världsdelarnas fysiska och politiska geografi avslutad och repeterad. (Eklund i 5 b, Ljungstedt i 5 a).

Matematik 4 t. Geometri: cirklar och månghörningar, planimetriska räkneuppgifter i samband med ytsatserna. Aritmetik och algebra: bråk, ekvationer av första graden med en obekant jämte problem. (Wikström i 5 a, Henriksson i 5 b).

Naturlära 5 t. Zoologi: repetition. Botanik: levande växter examinerade på lärorummet. Exkursioner. Viktigare växtfamiljer. De viktigaste kulturväxterna. Typer för kryptogamerna. (Fahlander). Kemi, geologi: de viktigaste företeelserna. Frivilliga laborationsövningar. Geologisk exkursion. (Romanus). Fysik: magnetism och elektricitet. (Wikström i 5 a, Henriksson i 5 b).

Sjätte klassen.

Kristendom 2 t. Bilder ur kyrkans historia, det viktigaste rörande kyrkans utbredning, författning, kult och lära. Bibelläsning: valda stycken. (Hägglund).

Modersmålet 3 t. Läsning i Lindvalls läsebok för realskolans 6:te kl. och valda skrifter av Geijer, Tegnér, Rydberg, Selma Lagerlöf. Referat. Deklamation. Föredrag. Dispositionsövningar. Övningar i att uppsätta enklare skrivelser av praktisk art. Var tredje vecka en uppsats omväxlande i hemmet och på lärorummet. (Sundström).

Tyska 3 t. Öhquists läsebok. Grammatik. Övning i läsning av tysk stil ur Kolbs Lesebuch. Talövningar och andra tillämpningsövningar. Var tredje vecka en skriftlig reproduktionsövning eller översättning. (Borgman).

Engelska 4 t. Jespersen-Rodhes läsebok avslutad. Översikt av syntaxen. Talövningar och andra tillämpningsövningar. Varannan vecka en skriftlig reproduktionsövning eller översättning. (Pahlberg).

Franska (frivilligt) 2 t. Bödtker & Höst sid. 32—68. (Dahlberg)

Historia 4 t. Huvuddragen av Sveriges statsförfattning samt av dess centrala och kommunala förvalting. Fäderneslandets historia: repetition av nyare tiden. Allmän historia: repetition av nyare tiden med särskild vikt lagd på tiden efter 1815. (Ljungstedt).

Geografi 2 t. Översikt av den allmänna geografien. De viktigaste kulturländernas och företrädesvis Sveriges geografi. (Danell).

Matematik 5 t. Aritmetik och algebra: ekvationer av första graden med en och flera obekanta jämte talrika problem, mest hämtade från affärslivet. Begreppen irrationellt tal och kvadratrot. Övning i enkel bokföring. Geometri: repetition av föregående klassers kurser. Likformig avbildning. Övningssatser. Planimetriska och stereometriska beräkningsuppgifter. Uppritning av enkla diagram. (Fahlander).

Biologi 2 t. Läran om människokroppen och i sammanhag därmed det viktigaste av hälsoläran; de rusgivande ämnenas och tobakens natur och verkningar; bakteriernas betydelse och verkningar. Huvuddragen av läran om växternas levnadsförhållanden, livsföreteelser och inre byggnad. (Fahlander).

Fysik 2 t. Statik. Meteorologi. Optik och akustik samt en kort kurs i astronomi. Laborationer. Observationer. (Nordström).

Kemi 1 t. Några viktiga kapitel ur org. och tillämpad kemi. Torrdestillation och förbränning. (Wikström).

GYMNASIUM.

1:a ringen.

Latinlinjen.

Kristendom 2 t. Gamla tidens och medeltidens kyrkohistoria. Bibelläsning: Apostlagärningarna. (Hägglund).

Modersmålet 3 t. Läsning i Steffen, Isl. och fornsv. litteratur med anslutning till Steffens litteraturhistoria: forntiden och medeltiden. Läsning av valda skrifter av Rydberg, Heidenstam m. fl. Deklamation och föredrag. Dispositionsövningar. Var tredje vecka en uppsats, omväxlande i hemmet och lärorummet. (Ljungstedt).

Tyska 2 t. Grammatik §§ 50—81. Öhquists läsebok avslutad. Översättningsövningar till tyska. Ett tema eller en reproduktionsövning var tredje vecka. (Lindvall).

Engelska 2 t. Grammatik. Av syntaxen verbet, adjektivet och ordföljden. Jepersen-Rodhe 60 sidor. Tillämpningsövningar. (Allander).

Latin 6 t. Sid. 3—31 i Ponténs läsebok, Sid. 86—90 i Pontén II (prosa). Formläran samt behövliga delar av syntaxen. (Rignell).

Historia 3 t. Kulturhistorisk översikt av forntidens och medeltidens svenska historia samt kulturhistorisk översikt av forntidens och medeltidens allmänna historia. (Pira).

Geografi 2 t. Översikt av den allmänna geografien; Rysslands! Tyska rikets, Storbrittaniens, Frankrikes och Österrike—Ungerns geografi. (Eklund).

Matematik 5 t. Algebra: repetition och utvidgning av det förut genomgångna. Utdragning av kvadratrötter ur siffertal och polynomer. Ekvationer av första graden med en och flera obekanta jämte problem. Geometri: lösning av planimetriska och rent geometriska uppgifter. Lindmans lärobok repeterad. Var tredje vecka en uppsats, varav tre på lärorummet. (Henriksson).

Biologi 1 t. Fanerogamernas viktigaste organ, med hänsyn till bl. a. viktigare växtfamiljer; de viktigaste svenska växtsamhällena; exkursioner. (Romanus).

Fysik 2 t. Mekanikens viktigaste fenomen. Det allmännaste om solsystemet och himlakropparna i övrigt, observationer. (Henriksson).

Reallinjen.

Kristendom 2 t. Lika med I ring L. (Hägglund).

Modersmålet 3 t. Lika med I ring L. (Ljungstedt).

Tyska 2 t. Lika med I ring L. (Lindvall).

Engelska 3 t. Av syntaxen adjektivet, verbet och ordföljden. Jespersen-Rodhe avslutad (omkr. 65 sid). Översättningsövningar. Ett tema eller en reproduktionsövning var tredje vecka. (Allander).

Historia 3 t. Lika med I ring L. (Pira).

Geografi 2 t. Lika med I ring L. (Eklund).

Matematik 7 t. Lika med I ring L. Dessutom utförligare teori för räkning med kvadratrötter. Sambandet mellan rötter och koeff. i en 2 grads ekv. samt lösning av enkla ekvationssystem av 2 graden med flera obekanta. De två första kapitlen av Josephsons plan geometri. (Nordström).

Biologi 1 t. Lika med I ring L. (Romanus).

Fysik 3 t. Mekanikens viktigaste fenomen. Det allmännaste om solsystemet och himlakropparna i övrigt. (Lisell).

Kemi 2 t. Metalloiderna till kol. (Wikström).

2:a ringen.

Latinlinjen.

Kristendom 2 t. Reformationstidevarvets kyrkohistoria. Norbecks teologi: kap. 1—5. Bibelläsning: Romarebrevet och Galaterbrevet. (Hägglund).

Modersmålet 2 t. Läsning av Steffen, Översikt av Sv. Litt. I, med anslutning till Steffens litteraturhistoria från 1526—1763. Dansk och norsk litteratur. Deklamation. Dispositionsövningar. Var tredje vecka en uppsats omväxlande på lärorummet och i hemmet. (Pira).

Tyska 2 t. Öhquists läsebok avslutad. Frau Sorge, 68 sid. Var tredje vecka en översättning eller en reproduktionsövning, däraf fyra på lärorummet. Grammatiken avslutad. Översättningsövningar till tyska. Talövningar. (Borgman).

Engelska 2 t. Syntaxen avslutad. Tillämpningsövningar. Jespersen-Rodhe avslutad. The Alhambra påbörjad. (Münchmeyer).

Franska 4 t. Bödtger & Höst del I 80 sidor. (Münchmeyer).

Latin 6 t. Pontén, lat. förf. II (prosa) s. 3—4, 22—31, 55—69, 90—93. Pontén, lat. förf. I (prosa) s. 92—102, 104—107, (omkring 400 v). Grammatik: syntax: till koncessiva satser. Repetition av formläran. Ett tema var fjärde vecka, därav 4 på lärorummet. (Lindblom).

Historia 3 t. Nyare tidens historia från 1500—1715. Nordens historia från 1520 till 1818. (Pira).

Geografi 1 t. Sveriges, Italiens, Förenta Staternas, Kinas och Japans geometri. (Henriksson).

Matematik 4 t. Läran om kvadratrötter avslutad. Ekvationer av andra och högre grad med en och flera obekanta jämte problem. Likformighetsläran. Övningssatser. Valda delar av planimetrin med problem. En uppsats var tredje vecka omväxlande i hemmet och på lärorummet. (Wikström).

Biologi 2 t. Några för biologien viktiga kapitel ur org. kemin. Nänniskans anatomi och fysiologi. Hälsolära. Något om mikroorganismerna. Jämförande framställning av djurens organsystem och embryologi påbörjad. (Romanus).

Fysik 1 t. Värmelära. (Wikström).

Reallinjen.

Kristendom 3 t. Lika med II ring L. (Hägglund).

Modersmålet 2 t. Lika med II ring L. (Pira)

Tyska 2 t. Lika med II ring L. (Borgman).

Franska 4 t. Lika med II ring L. (Münchmeyer).

Engelska 3 t. Syntaxen avslutad. Jespersen-Rodhe avslutad. The Alhambra 35 s. Muntliga och skriftliga övningar. Var tredje vecka ett tema, därav 4 på lärorummet. (Münchmeyer).

Historia 3 t. Lika med II ring L. (Pira).

Geografi 1 t. Lika med II ring L. (Henriksson).

Matematik 6 t. Ekvationer av andra och högre grad med en och flera obekanta jämte tillämpningar på planimetrien. Användning av rätvinkliga koordinater för studium av enkla funktioner. Likformighetsläran avslutad; sammanfattande kurs i planimetri. Trigonometriska beräkningar rörande plana figurer. Rötter, potenser och logaritmer. En uppsats var tredje vecka, hvarav fem på lärorummet. (Persson).

Biologi 2 t. Människans anatomi och fysiologi. Hälsolära. Något om mikroorganismerna. Jämförande framställning av djurrikets organografi och embryologi påbörjad. (Romanus).

Fysik 2 t. Värmelära med meteorologi. Friv. laborationsövn. (Lisell).

Kemi 2 t. Metalloiderna och de lätta metallerna. Laborationsövningar. (Romanus).

3:e ringen.

Latinlinjen.

Kristendom 2 t. Nyare tidens kyrkohistoria. Norbecks teologi: kap. 7—11. Profetismen, översikt av Jesu liv och verksamhet. Bibelläsning: valda stycken. (Hägglund).

Modersmålet 3 t. Läsning i Steffen: översikt av Sv. Litter. II o. III med anslutning till Steffens litteraturhistoria från 1763—1820. Dansk och norsk litteratur. Övning i muntlig framställning: referat, föredrag, deklamation. Dispositionsövningar. Var fjärde vecka en uppsats. (Pira).

Tyska 2 t. Peter Moors Fahrt. Aus den Kreuzzügen. Kursiv läsning. Grammatik: syntaxen, repeterad. Skriftliga övningar. Talövningar. En uppsats eller översättningsövning var fjärde vecka. (Borgman).

Engelska 2 t. Sherlock Holmes avslutad (50 sid.). Eliza 40 sid. Kursiv läsning. Skriftliga övningar. Talövningar. (Allander).

Franska 4 t. Formläran fullständigt genomgången. Bödtger & Höst avslutad. Sandeau, La roche aux mouettes. (omkr. 60 sid). Översättningsövningar. (Münchmeyer).

Latin 6 t. Cæsar 10 sid. (forts. av förra årets läsning): Pontén, lat. förf. II (prosa) sid. 3—30, I (poesi) omkring 500 verser. Kursiv läsning. Syntaxen repeterad. Ett tema varannan vecka, därav 6 på lärorummet. (Rignell).

Grekiska 7 t. Grekisk läsebok av A. Petersson st. 1—40, med skrivning av de svenska styckena. Xenophons Anabasis I boken. Grammatik: Löfstedt-Sillén, formläran, ett och annat av syntaxen i anslutning till texten. (Lindblom).

Historia 3 t. Nyare tidens historia från 1715 till 1848. Nordens historia från 1718 till 1844. (Pira).

Matematik 4 t. Ekvationssystem av högre gradtal. Potenser och logaritmer. Planimetri. Trigonometri. Kurvkonstruktioner. Var tredje vecka en uppsats, varav fem på lärorummet. (Lisell).

Fysik 2 t. Elektricitetsläran. (Persson).

Filosofisk propedevtik 1 t. Logik. (Pira).

Biologi 2 t. Jämförande framställning av djurens organografi och embryologi. De kryptogama växterna. (Romanus).

Reallinjen.

Kristendom 2 t. Lika med III ring L. (Hägglund).

Modersmålet 3 t. Lika med III ring L. (Pira).

Tyska 2 t. Lika med III ring L. (Borgman).

Franska 4 t. Lika med III ring L. (Münchmeyer).

Engelska 2 t. Pain: Eliza; Jack London: White Fang. Var fjärde vecka ett tema, därav tre på lärorummet. Muntliga och skriftliga övningar. (Lindvall.)

Historia 3 t. Lika med III ring L. (Pira).

Matematik 6 t. Trigonometri. Stereometri. Aritmetiska och geometriska serier. Sammansatt ränta. Några enkla funktioner och konstruktion av deras kurvor. Analytisk geometri om räta linjer och cirkeln. Var tredje vecka en uppsats, varav 4 på lärorummet. (Nordström).

Fysik 4 t. Magnetismen: elektricitetslära; akustik; optiken påbörjad. En gång varje månad fysikalisk uppsats, därav 3 på lärorummet. Friv. laborationsövningar. (Lisell).

Kemi 2 t. De tunga metallerna. Laborationsövningar. (Romanus).

Filosofisk propedevtik 1 t. Lika med III ring L. (Pira).

Biologi 2 t. Lika med III rind L. (Romanus).

4:e ringen.

Latinlinjen.

Kristendom 2 t. Allmän repetition av det förut genomgångna. (Hägglund).

Modersmålet 3 t. Läsning i Steffen: Översikt av Sv. Litt. III, IV, V med anslutning till Steffens litteraturhistoria samt valda stycken av Atterbom, Geijer, Tegnér, Almqvist, v. Braun, Rydberg, Strindberg m. fl. Övning i muntlig framställning: referat. deklamation, föredrag. Dispositionsövningar. Var fjärde vecka en utförligare uppsats, därav tre på lärorummet. (Ljungstedt).

Tyska 2 t. Gustav Adolvs Page. Kursiv läsning. En uppsats eller ett tema var fjärde vecka. Grammatiken delvis repeterad. (Münchmeyer).

Engelska 2 t. Historical Biographies Escott, England. Kursivläsning. Muntliga och skriftliga övningar. (Borgman).

Franska 4 t. Explikation: La roche aux mouettes avslutad, delvis kursivt. Edström, fransk läsebok I. Le petit chose. Grammatiken repeterad. Kursiv läsning. (Münchmeyer).

Latin 6 t. Pontén (prosa): sid. 35—76, valda sånger av Horatius, efter Pontén, jämte repetition. Kursiv läsning av Livius och Justinus. Ett tema varannan vecka; därav 5 på lärorummet. (Rignell).

Grekiska 7 t. Xenophons. Anabasis (Dalsjö) II boken: Platons dialog Kriton; Homers Odyssé, VI boken. Grammatik: Formläran repeterad; det viktigaste av syntaxen. (Lindblom).

Historia 3 t. Nyare tidens allmänna historia från 1815, Nordens historia från 1844. Allmän repetition. Det viktigaste av Sveriges m. fl. länders statskunskap. (Pira).

Matematik 5 t. Serier och ränteräkning. Stereometri. Maxima och minima. Problemlösning och repetition. Var tredje vecka en matematisk uppsats, därav fyra på lärorummet. (Nordström).

Fysik 2 t. Akustik och optik. Allmän repetiton. (Persson).

Filosofisk propedevtik 1 t. Psykologi och logik. (Pira).

Biologi B-linjen 1 t. Växtfysiologi och växtanatomi. Sammanfattande repetition. (Romanus).

Reallinjen.

Kristendom 2 t. Lika med IV ring L. (Hägglund).

Modersmålet 3 t, Lika med IV ring L. (Ljungstedt).

Tyska 2 t. Lika med IV ring L. (Münchmeyer).

Engelska 4 t. Sam. Titmarch avslutad, Travels and Explorations Escott, England. Grammatik, tillämpningsövningar. Var fjärde vecka ett tema, därav tre på lärorummet. Muntliga övningar. (Borgman).

Franska 4 t. Lika med IV ring L. (Münchmeyer).

Historia 3 t. Lika med IV ring L. (Pira).

Matematik 6 t. Anal. geometri: om rät linje, cirkel, ellips, hyperbel och parabel. Sammansatt ränta. Funktionslära och kurvkonstruktioner. Repetition och problemlösning. Ett tema var tredje vecka, därav fyra på lärorummet. (Persson).

Biologi 1 t. Lika med IV ring L. (Romanus).

Fysik 3 t. Optik. Dynamik. Sammanfattande repetition. En uppsats var fjärde vecka, därav två på lärorummet. (Lisell).

Kemi 2 t. Repetition av hela kursen i kemi. Mineralogi och bergartslära. (Romanus).

Filosofisk propedevtik 1 t. Lika med IV ring L. (Pira).

5. Välskrivning.

Undervisningstid i klassen 1 a 2 timmar och i 1 b 2 timmar, i 2 a 2 timmar och i 2 b 2 timmar, 3 a 1 timme i veckan.

Vid undervisningen har i klasserna 1 och 2 använts Filip Holmqvists skrivkurser. I klass 3 har skrivits i enkellinierade skrivböcker, därjämte ha de mera försigkomna lärjungarne i denna klass skrivit rundskrift.

6. Teckning.

Uppgift å övningstider och antalet övningstimmar för särskilda avdelningar.

Linje, klass och avdelningar	Dag och timme						Summa timmar
	Måndag	Tisdag	Onsdag	Torsdag	Fredag	Lördag	
Realskolan.							
1 a	—	8—8.45	—	—	—	—	1
1 b	—	—	12—12.45	—	—	—	1
2 a	12.55-1.40	—	—	—	—	—	1
2 b	—	—	—	8—8.45	—	—	1
3 a	—	—	8—8.45	—	12—12.45	—	2
3 b	—	12—12.45	—	—	—	8.55-9.40	2
4 a	—	—	—	12.55-1.40	—	12—12.45	2
4 b	—	—	8.55-9.40	—	8—8.45	—	2
5 a	1.50 2.35	—	—	—	—	1.50-2.35	2
5 b	—	1.50-2.35	—	—	8.55-9.40	—	2
6	—	—	1.50-2.35	—	—	8—8.45	2
Gymnasium.							
I ring real, I „ latin	8.55-9.40	—	—	—	—	12.55-1.40	2
II „ latin, II „ real	—	—	2.45-3.30	1.50-2.35	—	—	2
III „ latin, III „ real	2.45-3.30	8.55-9.40	—	—	—	—	2
IV „ latin, IV „ real	8—8.45	—	—	—	—	9.50-10.35	2

Genomkomna kurser och använda undervisningsmedel inom de olika avdelningarna.

Frihandsteckning:

Klassen 1. Övning av räta och buktiga linjers tecknande på fritt papper dels efter enkla föremål, dels efter förteckning å krittavlan, hemuppgifter såsom tillämpningar. Minnesteckning.
„ 2. Teckning och färgläggning av växtblad och enkla föremål. Penselteckning. Hemuppgifter. Minnesteckninv.
„ 3. Konturteckning och färgläggning av enkla föremål och växtblad. Teckning efter uppstoppade fåglar, fjärilar. Hemuppgifter. Minnesteckning. Komposition av enkla mönster.
„ 4. Konturteckning efter naturföremål och levande växter i enkel färgläggning. Teckning av fåglar. Minnesteckning. Komposition av enkla mönster.
„ 5. Fortsättning av föregående jämte perspektivisk teckning och skuggning av klots och föremål. Teckning efter uppstoppade fåglar. Minnesteckning.
„ 6. och I ring. Klots och andra föremål i fritt perspektiv, skuggning. Något akvarellmålning. Pennteckning i tusch (jämte lavering i klass 6).
„ II ring. Teckning i perspektiv och skuggning av vaser och andra föremål samt gipsornament i olika stilarter. Lavering. Minnesteckningar. Akvarellmålning.
„ III och IV. Teckning och skuggning med krita efter föremål, svårare gipser och figurdelar, övningar i färg med krita samt akvarell.

Dessutom hava av mera försigkomna utförts övningar i pastell och akvarell efter levande växter, frukter, fåglar o. d.

Linjarritning efter P. Henriques lärobok.

Klassen 4. geometriska konstruktionsövningar.
„ 5. Geometriska konstruktionsövningar, första grunderna av projektionsläran t. o. m. plana kroppars utbredning. Kroki-ritning.
I ring Projektioner av solida kroppar, deras skärningar och utbredningar till och med pl. XII.
„ 6. Projektionslärans grunder. Linjers verkliga storlek. Ytutbredning av plansidiga föremål. Kroki-ritning. Materialbeteckning.
II „ Fortsättning av föregående jämte uppmätning och ritning av verktyg, maskindelar o. dyl.
III „ Skuggkonstruktioner.
IV „ Avslutat indirekta perspektiven. Flera lärjungar hava ritat direkt perspektiv.

7. Sång och instrumentalmusik.

a) Sång och musikens teori (5 timmar i veckan).

Sångavdelningarna hava varit tre. De hava haft övningar följande dagar, nämligen sångklassen I onsdagar 5—6 e. m., II torsdagar 4.30—5.30 e. m., III tisdagar 4.30—5.30 och fredagar 4.30—5.30 e. m. Oberoende av indelningen i sångklasser hava lärjungarne i de fem lägsta klasserna gemensamt övats i koralsång måndagar 5—6 e. m.

Inom de särskilda sångavdelningarna hava *kurser* och *övningar* varit följande, nämligen: inom I och II skalor, tonträffning, unison- och koralsång samt musikens teori;

III musikens teori, tonträffning, en- och tvåstämmiga sånger samt kvartettsång, varvid huvudsakligen Nya normalsångboken och Svenska Skolkvartetten begagnats.

b) **Instrumentalmusik** (10 timmar i veckan).

Övningstider måndagar 4—5 och 6—7 e. m., tisdagar 5.30—6.30 e. m., onsdagar 4—5 e. m., torsdagar 5.30—7 e. m., fredagar 5.30—7 e. m. och lördagar 4—7 e. m.

Undervisningsmateriel: L. HENNES pianoskola, Violinkvartetter och trio- samt solo för violin, HENNINGS violinskola samt MICAHAELIS Contrabasskola, KAYYERS etuder m. m. samt för orgel Lunds preludier och orgelskola av Lindström.

9. Gymnastiska och militära övningar.

a) **Gymnastik och vapenövningar 1915.**

1:o. I gymnastik- och fältövningarna hava deltagit.

I gymnastikövningarna

under *vårterminen* 271 lärjungar i realskolan och 102 i ringarne samt under *höstterminen* 285 lärjungar i realskolan och 82 i ringarne.

I fältövningarna

under *vårterminen* 71 och under *höstterminen* 71 lärjungar i I—III ringarne.

Lärjungarna hava under året varit indelade i fyra gymnastikavdelningar och två fältavdelningar. Fördelningen på gymnastikavdelningarna har varit beroende av indelningen i läsklasser. Klasserna 1—6 hava fördelats på de tre lägsta och ringarne på den högsta avdelningen. Grunden för lärjungarnes indelning på de enligt ovan nämnda fördelning sammansatta gymnastikavdelningarna har varit ålder, kroppsutveckling, hälsotillstånd, anlag och färdighet.

De olika gymnastikavdelningarna hava varit indelade i rotar efter sist nämnda indelningsgrund. Avdelningarna hava under båda terminerna bestått av 4 á 6 rotar. Lärjungarne i I ringen hava bildat I fältavdelningen och II—III ringen II fältavdelningen.

Lärjungeantalet i gymnastikavdelningarna har varit:

Den 1 Febr. 1915.

i I avd.	62
i II „	102
i III „	105
i IV „	104
Hela antalet	373

Den 15 sept. 1915.

i I avd.	81
i II „	100
i III „	104
i IV „	82
Hela antalet	367

Nedanstående tabell visar antalet lärjungar, som icke deltagit i gymnastik och fäkt ning, ävensom antalet av dem, vilka på grund av svagare kroppsutveckling och hälso tillstånd erhållit särskilda för dem avpassade övningar jämte orsakerna till befrielsen eller hänvisningen till särskild avdelning.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Termin och klasser	Sjukdomar												Andra orsaker	Summa	Hela antalet närvarande lärjungar
	I syn- och hörselorganen	I nervsystemet	I cirkulationsorganen	I andedräktsorganen	I matsmältningsorganen	I urin- och könsorganen	I rörelseorganen och bensystemet	Medfödd missbildning	Tarmbråck	Allmän svaghet	Andra sjukdomar	Summa			
Vårterminen 1915															
Icke deltagande:															
klass 1—6	—	—	2	—	—	—	1	—	1	—	—	4	—	4	273
ringarne	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	104
Summa	—	—	2	—	—	—	1	—	1	—	—	4	—	4	377
Hänvisade till svagavdelning eller svagrote:															
klass 1—6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ringarne	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Summa	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Höstterminen 1915															
Icke deltagande:															
klass 1—6	—	—	3	—	—	—	2	1	1	—	—	7	—	7	292
ringarne	—	—	2	2	—	—	—	1	—	—	—	5	—	5	87
Summa	—	—	5	2	—	—	2	2	1	—	—	12	—	12	379
Hänvisade till svagavdelning eller svagrote:															
klass 1—6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ringarne	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Summa	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

För de kroppsligt svaga lärjungarna hava övningarna varit så anordnade, att dessa lärjungar erhållit lindrigare rörelser än de övriga inom gymnastikavdelningen, rörelser lämpade efter vars och ens åkomma och hälsotillstånd. I regel har en dagövning för dessa svaga innehållit rörelser af alla slag utom vid sjukdom i cirkulationsorganen, då rörelsevarv, uppjagande hjärteverksamheten, uteslutits.

2:o. Med undantag av tiden från den 1 Maj till vårterminens slut för IV ringen har åt pedagogisk gymnastik under året egnats i medeltal 2 $^1/_2$ timme i veckan för varje lärjunge.

Lekar hava försiggått dels i gymnastiksalen, dels huvudsakligen i det fria med i medeltal, för lärjunge räknat, $^1/_2$ timme i veckan.

Åt fäktning har ägnats 2 timmar i veckan för varje ring.

Tiderna för gymnastik och fäktövningarna hava under båda timmarna varit sålunda fördelade.

Gymnastik:

under båda terminerna.

I	avd.	dagligen				kl.	11.20—11.50 f. m.
II	„	fyra	dagar	i	veckan	„	9.50—10.35 „
III	„	„	„	i	„	„	2.45—3.30 e. m.
IV	„	„	„	i	„	„	12—12.45 „

Fäktning:

under båda terminerna.

I	avd.	tisdagar och fredagar	kl.	2.45—3.30 e. m.
II	„	måndagar och onsdagar	„	12—12.45 „

Under båda terminerna har uteslutande övats florettfäktning.

3:o. Biträdande gymnastiklärare har icke varit anställd vid läroverket.

B. **Lärarne.**

10. Lärarnes tjänsteåligganden under höstterminen 1915.

Rektor C. A. HÄGGLUND, krist. 8 t. (I—IV), 2 t. (6), 2 t. (5 b), 2 t. (4 b) ..... Sa 14 t. i veckan.
Förrättat morgonbön alla dagar.

Lektor E. MÜNCHMEYER, tyska 2 t. (IV), franska 4 t. (II), 4 t. (III), 4 t. (IV), eng. 5 t. (II) ..... „ 19 „
De tyska skripta i IV, de engelska i II R; klassförest. i IV L.

Lektor L. LISELL, mat. 4 t. (III L), fys. 12 t. (I R—IV R), laborationer 1 t. (III R), 1 t. (II R) ..... „ 18 „
De matematiska skripta III L, de fysikaliska i III R och IV R. Klassförest. i I R.

Lektor A. ROMANUS, biol. 8 t. (I—IV), kemi 6 t. (II—IV), 4 t. (5), laborationer 1 t. (III R), 1 t. (II R), 4 t. (5) ..... „ 22 „
Granskat lärjungarnas herbarier å gymnasiet. Klassförest. i II R.

Lektor K. PIRA, mod. 2 t. (II), 3 t. (III), hist. 12 t. (I—IV, filosofi 2 t. (III—IV) ..... „ 19 „
De svenska skripta i II och III. Klassförest. i III L.

Lektor P. G. PERSSON, mat. 6 t. (IV R), 6 t. (II R), 5 t. (4 a), fysik 2 t. (IV L), 2 t. (III L) ..... „ 21 „
De matematiska skripta i IV R och II R; klassförest. i IV R.

Lektor A. T. LINDBLOM, latin 6 t. (II), grek. 14 t. (III—IV) ..... „ 20 „
De latinska skripta i II; klassförest. i II L.

Adjunkt A. NORDSTRÖM, mat. 6 t. (III R), 5 t. (IV L), 7 t. (I R), fysik 2 t. (6), laborationer 1 t. (6) ..... „ 21 „
De matematiska skripta i IV L., III R och I R; klassförest. i III R.

Adjunkt H. FAHLANDER, mat. 3 t. (6), biol. 20 t. (1—6) ..... „ 25 „
Granskat lärjungarnes herbarier i realskolan; klassförest. i 6.

Adjunkt J. A. EKLUND, mod. 3 t. (5 b), hist. och geogr. 20 t. (3, 4 b och 5 b), geogr. 2 t. (I) ..... „ 25 „
Klassförest. i 5 b.

Adjunkt A. BORGMAN, tyska 2 t. (II), 2 t. (III), 3 t. (6), franska 2 t. (5), eng. 6 t. (IV), 5 t. (4 b) ..... „ 20 „
De tyska skripta i III och II och 6, de engelska i IV R; Klassförest. i 4 b.

Adjunkt K. LJUNGSTEDT, mod. 3 t. (IV), 3 t. (I), hist. och geogr. 5 t. (5 a), 10 t. (2), hist. 4 t. (6) ..... „ 25 „
De svenska skripta i I och IV; klassförest. i 2 b.

Adjunkt F. RIGNELL, latin 18 t. (I, III, IV), hist. och geogr. 4 t. (1 a). S:a 22 t. i veckan.
De latinska skripta i III och IV.

Adjunkt J. A. SUNDSTRÖM, krist. 18 t. (1—3), 2 t. (4 a), 2 t. (5 a), geogr. 2 t. (4 a), mod. 3 t. (6). ..... „ 27 „

Adjunkt E. ALLANDER, mod. och tyska 7 t. (5 a), eng. 5 t. (5 a), 5 t. (4 a), 5 t. (I), 2 t. (III L). ..... „ 24 „
De svenska skripta i 5 a, de tyska i 5 a, de eng. i I R.
Klassförest. i 5 a.

Adjunkt J. DANELL, mod. och tyska 8 t. (4 a), 11 t. (1 a), hist. 3 t. (4 a), geogr. 2 t. (6). ..... „ 24 „
De svenska och tyska skripta i 4 a, klassförest. i 4 a.

v. adjunkt S. PAHLBERG, mod. och tyska 23 t. (2 b o. 3 b), eng. 4 t. (6). ..... „ 27 „
De engelska skripta i 6, klassförest. i 3 b.

v. adjunkt S. J. Gyzander mod. och tyska 23 t. (1 b och 3 a), hist och geogr 4 t. (1 b). ..... „ 27 „
Klassförest. i 3 a.

Extralärare F. DAHLBERG, mod. och tyska 8 t. (4 b), franska 2 t. (6), mat. 5 t. (4 b), 5 t. (3 a), 4 t. (1 a). ..... „ 24 „
De svenska och tyska skripta i 4 b, klassförest. i 1 a.

Extralärare C. A. WIKSTRÖM, mat. 17 t. (5 a, 2 a, 1 b och II L), fysik 1 t. (II L), 2 t. (4 b), 1 t. (5 a), laborationer 2 t. (4 b), kemi 2 t. (I), 1 t. (6). ..... „ 26 „
De matem. skripta i II L; klassförest. i 1 b.

Extralärare O. A. HENRIKSSON, mat. 5 t. (I L), 14 t. (5 b. 3 b o. 2 b), fysik 1 t. (5 b), 2 t. (4 a), laborationer 2 t. (4 a), 2 t. (I L), geogr. 1 t. (II). ..... „ 27 „
De matematiska skripta i I L; klassförest. i I L.

Extralärare O. LINDVALL, mod. och tyska 11 t. (2 a), tyska och eng. 9 t. (5 b), eng. 2 t. (III R), tyska 2 t. (I). ..... „ 24 „
De svenska skripta i 2 a, de tyska i I och 5 b, de engelska i III R; klassförest. i 2 a.

Musiklärare C. A. HYLTÉN, musikens teori och sång 5 t., instrumentalmusik 10 t. ..... „ 15 „

Gymnastikläraren H. CRONSTEDT, gymnastik 16 t. (6 halvtimmar och 12 trekvartstimmar), vapenövningar 4 t. „ 20 „

Teckningsläraren D. CEDERBERG, teckning 26 t. välskrivn. 6 t.... „ 32 „

Biträdande teckningslärarinnan H. OLSSON, välskrivning..... ... „ 4 „

11. Tjänstledighet har under läsåret åtnjutits av gymnastikläraren H. Cronstedt 26 augusti—6 oktober på grund av militärisk tjänstgöring;

af adjunkten C. A. Ekström 12 januari—6 juni för att fortsätta sin tjänstgöring vid Upsala högre allm. läroverk;

af adjunkten E. G. Neuman 12 januari—6 juni för att fortsätta sin tjänstgöring vid läroverk i Stockholm.

12. Löjtnant D. I. Hallberg har vikarierat för tjänstledige gymnastikläraren H. Cronstedt 26 augusti—15 september och löjtnant S. von Schoting har vikarierat för tjänstledige gymnastikläraren H. Cronstedt 16 september—6 oktober;

filosofie magister S. J. Gyzander, som hela höstterminen uppehållit en ledig adjunktsbefattning, har under vårterminen 12 januari—6 juni vikarierat för tjänstledige adjunkt E. G. Neuman;

filosofie magister S. J. H. Pahlberg, som hela höstterminen uppehållit en ledig adjunktsbefattning, har under vårterminen 12 januari—6 juni vikarierat för tjänstledige adjunkt C. A. Ekström;

den till adjunkt vid läroverk i Malmö utnämnde adjunkt E. Allander har under tiden 1 mars—6 juni uppehållit en ledig adjunktsbefattning.

13. Inom den ordinarie lärarepersonalen hava följande förändringar inträdt under tiden 1 maj 1915—30 april 1916:

adjunkten D. A. Nyström, som från och med den 1 maj 1898 varit adjunkt vid läroverket, avgick med pension den 1 juli 1915;

adjunkten B. A. Finell, som 1 maj 1893 blev adjunkt vid läroverket, avgick med pension den 1 augusti 1915;

adjunkten E. Allander, som från 1 maj 1911 varit adjunkt vid läroverket, har från och med 1 mars 1916 blivit transporterad till adjunkt vid vestra reallläroverket i Göteborg.

Till dessa tre avgångne lärare hembäres härmed ett varmt tack för det arbete, som de var och en på sin plats presterat under sin tjänstgöringstid.

Till adjunkt i matematik, fysik och kemi har från och med 1 januari 1916 av kungl. maj:t utnämts filosofie magister C. A. Ekström.

Carl Adolf Ekström föddes i Mariestad den 28 juli 1886. Föräldrar: Murarmästaren Hilmer Ekström och hans hustru, Beda Larsson. Avlade mogenhetsexamen vid Skara h. allm. läroverk den 29 maj 1905. Inskrevs som student vid Upsala universitet den 26 januari 1906. Avlade därstädes filosofisk ämbetsexamen den 30 maj 1911. Genomgick provårskurs vid Upsala h. allm. läroverk läsåret 1914—1915. Tjänstgjorde vid Avesta kommunala mellanskola som extralärare läsåret 1911—1912, vid Västerås h. allm. läroverk som extralärare läsåren 1912—1913 och 1913—1914 samt vid Upsala h. allm. läroverk dels som partiellt vik. adjunkt under tiden 19 april—vårterminens slut 1915 och dels som vik. adjunkt läsåret 1915—1916. Utnämndes till adjunkt i matematik, fysik och kemi vid h. allm. läroverket i Östersund den 31 dec. 1915.

Till adjunkt i modersmålet och tyska från 1 januari 1916 har av kungl. maj:t blivit utnämnd filosofie licentiat E. G. Neuman.

Erik Gustav Neuman, född i Skara den 12 jan. 1883. Föräldrar: Rektor Carl Julius Neuman och Märta Sofia Vilhelmina Zengerlein.

Avlade mogenhetsexamen vid Göteborgs h. allm. latinläroverk 1901. Avlade vid Uppsala universitet fil. kandidatexamen jan. 1905 och fil. licentiatexamen mars 1910. Förste kurator i Västgöta nation våren 1912. Genomgick provårskurs vid Uppsala h. allm. läroverk höstt. 1912—vårt. 1913 i ämnena modersmålet, tyska och engelska. Tjänstgjort vid Uppsala enskilda läroverk och privatgymnasium läsåren 1910—1911, 1911—1912, 1912—1913 samt såsom extralärare vid Högre reallläroverket på Norrmalm i Stockholm läsåren 1913—1914, 1914—1915, 1915—1916. Utnämnd till adjunkt vid Östersunds högre allm. läroverk den 31 december 1915.

Utgiven skrift: Till frågan om vokalbalansen a: å i fornsvenskan.

14. Den 1 maj 1916 var en adjunktsbefattning ledig.

C. LÄRJUNGARNE.

15. De närvarande lärjungarne i de särskilda klasserna.

a) **Höstterminen 1915.**

Klasser	Realskolan	Gymnasium			Summa
		Reallinjen	Latinlinjen		
			utan grekiska	med grekiska	
Realskolan.					
1	62	—	—	—	62
2	55	—	—	—	55
3	67[1])	—	—	—	67
4	51	—	—	—	51
5	44	—	—	—	44
6	13	—	—	—	13
Gymnasium.					
I ring	—	18	11	—	29
II ring	—	10[2])	15[3])	—	25
III ring	—	8	4	4	16
IV ring	—	9	4	4	17
Summa	292	45	34	8	379

[1]) Dessutom 1 frånvarande.
[2]) » 1 »
[3]) » 1 »

b) **Vårterminen 1916.**

Klasser	Realskolan	Gymnasium			Summa
		Reallinjen	Latinlinjen		
			utan grekiska	med grekiska	
Realskolan.					
1	60	—	—	—	60
2	59	—	—	—	59
3	68	—	—	—	68
4	48	—	—	—	48
5	46	—	—	—	46
6	13	—	—	—	13
Gymnasium.					
I ring	—	17	11	—	28
II ring	—	11	17	—	28
III ring	—	9	4	4	17
IV ring	—	10	4	4	18
Summa	294	47	36	8	385

19. Antal i teckning, i musik samt i gymnastik och militärövningar undervisade lärjungar höstterminen 1915.

Avdelningar och linjer	Närvarande lärjungar	Teckning: Lärjungar, som deltagit i: obligatorisk teckning	Teckning: Lärjungar, som deltagit i: frivillig teckning och därjämte obligatorisk teckning	Teckning: Lärjungar, som deltagit i: endast frivillig teckning	Musik: Lärjungar, som undervisats i: Musikens teori och sång	Musik: Lärjungar, som undervisats i: Instrumentalmusik	Gymnastik- och militärövningar: Lärjungar, som deltagit i: gymnastik och vapenövningar	Gymnastik- och militärövningar: Lärjungar, som deltagit i: utsträckta militärövningar
1	62	62	—	—	61	15	61	—
2	55	55	—	—	34	14	54	—
3	67	67	—	—	29	11	65	—
4	51	51	—	—	3	10	49	—
5	44	44	—	—	0	6	43	—
6	13	13	—	—	0	0	13	13
I ring	R 18	18	—	—	0	2	14	29
	L 11	11	—	—	1	—	11	
II ring	R 10	10	—	—	0	1	9	25
	L 15	15	—	—	1	—	15	
III ring	R 8	8	—	—	1	—	7	15
	L 8	2	—	—	1	—	8	
IV ring	R 9	5	—	—	1	—	9	16
	L 8	—	—	—	1	—	8	
Realskolan	292	292	—	—	127	56	285	—
Gymnastik	87 R 45	41	—	—	3	3	40	—
	87 L 42	28	—	—	2	—	42	—
Summa	379	361	—	—	132	59	367	98

20. Det antal ämnen, vari hemläxor blivit för varje dag lärjungarna föresatta och det antal timmar i veckan, som hemarbetena i allmänhet upptagit för lärjungar av medelmåttiga anlag.

Klass	Antal ämnen dagligen	Antal timmar för hemläxors överläsning i hemmet	Antal timmar för skriftliga hemarbeten i veckan	Hela antalet timmar, som av hemarbetet i varje vecka upptagits
1	0—3	4	—	4
2	0—4	6	—	6
3	2—4	8	—	8
4	1—5	9	1	11
5	2—4	12	2	14
6	4—5	16	3	19
I ring R	3—5	15	3	18
I „ L	3—5	15	3	18
II „ R	4—5	15	4	19
II „ L	4—5	15	5	20
III „ R	4—4	16	5	24
III „ L	4—5	19	5	24
IV „ R	3—5	24	5	29
IV „ L	3—5	24	5	20

Anm. Genom månadsloven har hemarbetet ej obetydligt förminskats för kl. 4—6 och ringarne I—IV.

21. Tabellarisk uppgift

från Östersunds högre allmänna läroverk över lärjungarnas kroppsutveckling och allmänna hälsotillstånd samt över antalet närsynta och döva.

a) Vårterminen 1915.

1	2	3	6	7	8	9	10	11	12	13
Klass	Antal lärjungar	Medel-ålder	Lidande av bleksot	Ofta besvärade av huvudvärk	Ofta besvärade av näsblod	Närsynthetsgrad: Under 3 D.	Närsynthetsgrad: 3—6 D.	Närsynthetsgrad: Öfver 6 D.	Summa närsynte	Lidande av dövhet
1	54	—	—	1	2	—	—	—	—	—
2	57	—	—	2	1	—	—	—	—	—
3	60	—	1	2	3	—	—	—	—	—
4	49	—	1	1	—	—	—	—	—	—
5	46	—	—	7	—	—	—	—	—	—
6	17	—	—	1	—	—	—	—	—	—
1:sta ringen	32	—	1	2	1	—	—	—	—	—
2:dra »	21	—	—	1	1	—	—	—	—	—
3:dje »	19	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4:de »	33	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Summa	388	—	3	17	8	—	—	—	—	—

a) Höstterminen 1915.

1	2	6	7	8	9	10	11	12	13
Klass	Antal lärjungar	Lidande av bleksot	Ofta besvärade av huvudvärk	Ofta besvärade av näsblod	Närsynthetsgrad: Under 3 D.	Närsynthetsgrad: 3—6 D.	Närsynthetsgrad: Öfver 6 D.	Summa närsynte	Lidande av dövhet
1	62	—	6	—	2	—	—	2	—
2	55	—	—	—	—	—	—	—	—
3	67	—	2	1	4	—	—	4	—
4	51	—	3	1	4	1	—	5	—
5	44	—	1	—	3	1	—	4	1*)
6	13	—	—	—	—	—	—	—	—
1:sta ringen	29	—	—	—	6	1	—	7	—
2:dra »	25	—	1	—	3	—	—	3	—
3:dje »	16	—	—	—	4	—	—	4	—
4:de »	17	—	—	—	2	—	—	2	—
Summa	379	—	13	2	28	3	—	31	1

*) Ensidig dövhet.

B. Uppgift å antal sjuka och sjukdomar bland lärjungarne.

a) **Vårterminen 1915.**

1	2	3	4	5	6
Sjukdomar	Närvarande lärjungar	Sjuke personer	Sjukdomsfall	Sjukdagar	Döde
Difteri	—	1	1	23	—
Mässling	—	1	1	13	—
"Röda hund"	—	57	57	242	—
Påssjuka	—	1	1	3	—
Influensa	—	39	41	242	—
Epidem. hjärnfeber	—	1	1	4	1
Luftrörskatarr	—	12	14	66	—
"Lungspetskatarr"	—	1	1	57	—
Lungsäcksinflammation	—	2	2	160	—
Halsfluss	—	34	40	143	—
Magkattarr	—	1	1	23	—
Diarré	—	4	4	13	—
Gulsot	—	1	1	74	—
"Magplågor"	—	8	9	24	—
"Äggvitesjukdom"	—	2	2	21	—
"Knölros"	—	1	1	3	—
Eczem	—	1	1	6	—
"Hudsjukdom"	—	1	1	2	—
"Örvärk"	—	2	2	11	—
"Ögonsjukdom"	—	2	2	6	—
Ledvrickning	—	4	4	19	—
"Benskada"	—	1	1	3	—
"Knäskada"	—	1	1	2	—
Tandvärk	—	2	2	7	—
Tandböld	—	1	1	3	—
"Ondt i rygg"	—	2	2	5	—
"Ondt i fot"	—	1	1	6	—
"Försträckning"	—	1	1	2	—
"Huvudvärk"	—	9	11	31	—
"Feber"	—	20	23	79	—
"Förkylning"	—	54	60	188	—
Ej angiven sjukdom	387	5	6	37	—
Summa	388	273	296	1518	1

b) **Höstterminen 1915.**

1	2	3	4	5	6
Sjukdomar	Närvarande lärjungar	Sjuke personer	Sjukdomsfall	Sjukdagar	Döde
Vattenkoppor	—	1	1	13	—
Påssjuka	—	38	38	229	—
Influensa	—	13	13	56	—
Difteri	—	4	4	67	—
Skrofler	—	1	1	19	—
"Gomförlamning"	—	1	1	6	—
Nervsvaghet	—	1	1	33	—
"Örvärk"	—	1	1	2	—
"Ögonsjukdom"	—	2	2	5	—
Luftrörskatarr	—	3	3	17	—
Halsfluss	—	21	21	79	—
Blindtarmsinflam.	—	1	1	30	—
"Magplågor"	—	12	12	32	—
"Kräkning"	—	1	1	2	—
Njurinflammation	—	2	2	78	—
Blåskatarr	—	1	1	16	—
Eczem	—	1	1	3	—
Knölros	—	1	1	11	—
Benbrott	—	1	1	31	—
Sensträckning	—	1	1	2	—
Tandvärk	—	9	10	29	—
"Yttre skada"	—	2	2	13	—
"Förkylning"	—	31	33	127	—
"Huvudvärk"	—	11	12	30	—
"Feber"	379	3	4	20	—
Summa	379	161	168	950	—

Östersund den 21 Dec. 1915.

Axel Häggqvist.
Läroverkets läkare.

22 a. Antal inom läroverket flyttade lärjungar kalenderåret 1915.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Avdelningar och linjer	Närvarande lärjungar vid vårterminens slut före flyttningen	Vårterminen 1915							Höstterminen 1915						
		Lärjungar, som vid vårterminens slut flyttats till avdelningen							Lärjungar, som vid höstterminens början flyttats till avdelningen						
		efter att hava tillhört närmast lägre avdelning av samma linje följande antal terminer						från annan linje	efter att hava tillhört närmast lägre avdelning av samma linje följande antal terminer						från annan linje
		0	1	2	3	4	5 eller flere		0	1	2	3	4	5 eller flere	
1	53	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	57	—	3	33	—	2	—	—	—	1	7	—	2	—	—
3	59	—	1	32	—	6	—	—	—	—	7	—	1	—	—
4	49	—	—	35	—	2	—	—	1[1]	1	3	—	—	—	—
5	46	—	—	30	—	4	—	—	—	1	5	1	1	—	—
6	17	—	—	8	—	1	—	—	—	1	2	—	—	—	—
I R	9	—	—	15	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	1[4]
I L	21	—	—	4	—	2	—	—	—	—	3	—	—	—	1[5]
II R	10[2]	—	—	4	—	1	—	—	—	—	3	—	—	—	—
II L	9[3]	—	—	9	—	2	—	—	—	—	2	—	—	—	—
III R	11	—	—	6	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—
III LB	4	—	—	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
III LA	4	—	—	2	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—
IV R	17	—	—	7	—	2	—	—	—	—	1	—	—	—	—
IV LB	8	—	—	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
IV LA	8	—	—	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Realskolan	281	—	4	138	—	15	—	—	1	4	24	1	4	—	—
Realgymn.	47	—	—	32	—	3	—	—	—	—	8	—	1	—	1
Latingymn.	54	—	—	27	—	4	—	—	—	—	7	—	1	—	1
Summa	382	—	4	197	—	22	—	—	1	4	39	1	6	—	2

[1]) Tillhörde vårt. klass 2 och flyttades vid dess slut till kl. 3.
[2]) Dessutom 1 frånv. (sjukdom) erhöll inga betyg.
[3]) " 1 " (") " " "
[4]) Tillhörde kl. 6 vårt. 1915 och avlade realskoleexamen.
[5]) " " " "

22 b. Översikt för vardera terminen under sist förflutna kalenderår över lärjungarnes omsättning.

Lärjungarnes omsättning vårterminen 1915.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Avdelningar och linjer	Närvarande lärjungar den 1 Februari					Lärjungar avgångne från läroverket			
	Kvar i avdelningen fr. föregående termin	Flyttade till avdelningen på grund av beslut		Inskrivne under terminen	Summa	Från terminens början t. o. m. 31 Januari	Från o. med 1 Februari till terminens slut	Under nästföljande mellantermin	Summa
		vid föregående termins slut	vid vårterminens början						
1	51	—	—	3	54	—	1	7	8
2	54	—	2	1	57	—	—	4	4
3	57	—	1	2	60	—	1	5	6
4	46	—	1	2	40[1])	—	—	4	4
5	44	—	1	1	46	—	—	7	7
6	17	—	—	—	17	—	—	15	15
I R	10	—	—	—	10	—	1	—	1
I L	22	—	—	—	22	—	1	3	4
II R	11	—	—	—	11	—	1	2	2
II L	10	—	—	—	10	—	—	1	1
III R	11	—	—	—	11	—	—	2	2
III LB	4	—	—	—	4	—	—	—	—
III LA	4	—	—	—	4	—	—	—	—
IV R	17	—	—	—	17	—	—	17	17
IV LB	8	—	—	—	8	—	—	8	8
IV LA	8	—	—	—	8	—	—	8	8
Realskolan	269	—	5	9	283	—	2	42	44
Realgymn.	49	—	—	—	49	—	1	21	22
Latingymn.	56	—	—	—	56	—	1	20	21
Summa	374	—	5	9	388	—	4	83	87

[1]) Katalogen för vårt. upptager *felaktigt* för klass 4, 48 lärjungar. Slutsumman i mom. 15 för denna termin skall således vara *388*.

Höstterminen 1915.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Avdelningar och linjer	Närvarande lärjungar den 15 September					Lärjungar avgångne från läroverket			
	Kvar i avdelningen från föregående termin	Flyttade till avdelningen på grund av beslut		Inskrivne under terminen	Summa	Från termineus början t. o. m. 14 September	Från o. med 15 September till terminens slut	Under nästföljande mellantermin	Summa
		vid föregående termins slut	vid höstterminens början						
1	3	–	—	59	62	—	—	—	—
2	5	33	10	7	55	—	—	—	—
3	12	38	8	9	67	—	—	—	—
4	4	38[1])	5	4	51	—	2	—	2
6	3	33	8	—	44	—	—	—	—
6	—	9	4	—	13	—	—	—	—
I R	—	15	3	—	18	—	—	1	1
I L	3	4	4	—	11	—	—	—	—
II R	0[2])	5	4	1	10	—	—	1	1
II L	0[2])	11	3	1	15	—	—	—	—
III R	—	6	2	—	8	—	—	—	—
III LB	—	4	—	—	4	—	—	—	—
III LA	—	2	2	—	4	—	—	—	—
IV R	—	8	1	—	9	—		—	—
IV LB	—	4	—	—	4	—	—	—	—
IV LA	—	4	—	—	4	—	—	—	—
Realskolan	27	151	35	79	292	—	2	—	2
Realgymn.	—	34	10	1	45	—	—	2	2
Latingymn.	3	29	9	1	42	—	—	—	—
Summa	30	214	54	81	379	—	2	2	4

[1]) Dessutom 1 frånv.
[2]) „ 1 „
[3]) „ 1 „

24. Förteckning över de lärjunger, som efter att hava genomgått läroverkets fjärde ring avlagt godkänd studentexamen och efter att hafva genomgått läroverkets sjätte klass avlagt godkänd realskoleexamen.

Studentexamen.

Vårterminen 1915.

LATINARE:

Grek:

Ericsson, A. O.	till	universitet
Hägglund, G. F.	„	militäryrket
Johnsson, P. E.	„	bank
Jonsson, B. O.	„	kontor
Karlsson, P.	„	universitet
Köhlquist, R. T.	„	„
Näslund, O. A.	„	„
Thomson, A. E.	„	„

icke-greker:

Kjellberg, T. O.	till	järnvägen
Kihlgren, K. A.	„	universitet
Kjelsson, K. F.	„	„
Löfgren, K. V.	„	militäryrket
Löfvenmark, C. E.	„	tekniska högskolan
Rhodén, S. E.	„	järnvägen
Wrangel, F. E.	„	militäryrket
Öhrstedt, G. H.	„	obestämd verksamhet

Realister:

Andersson, A.	till	publicistyrket
Andersson, H.	„	tekniska högskolan
Burholm, A. L.	„	skogsskola
Byström, J.	„	tekniska högskolan
Hellbom, O. G.	„	„ „
Jönsson, N. L.	„	„ „
Kjellin, A. T.	„	„ „
Larsson, K. L.	„	„ „
Levén, K. E.	„	militäryrket
Lindqvist, K. V. A.	„	tekniska högskolan
Nilsson, A. E.	„	„ „
Nordin, K. O. E.	„	„ „
Owe, A. V.	„	obestämd verksamhet
Pettersson, E. A.	„	tekniska högskolan
Sundin, G.	„	handelsinstitut.
Thunell, A. E.	„	tandläkareinstitut.

Realskolexamen.

Almkvist, K. R.	till	tekniskt läroverk
Andersson, E.	„	handelsskola
Aronsson, A.	„	skogsskola
Axelsson, E. A.	„	obestämd verksamhet
Berlin, J. R.	„	„ „
Eriksson, K. E.	„	„ „
Fredman, U. G. A.	„	„ „
Hemlin, A. W.	„	jordbruk
Johansson, K. A. E.	„	kontor
Persson, P. A.	„	jordbruk
Persson, S. O.	„	gymnasium
Svensson, A.	„	„
Zetterström, I. N.	„	kontor

35. Förteckning över de lärjungar, som utan att hafva avlagt studentexamen eller realskolexamen avgått från läroverket under det sist förflutna kalenderåret.

a) **vårterminen 1915.**

Från kl.	1	Boström, J. A. N.	utan anmäld avsikt
„ „	1	Bergvall, G.	till Falu allm. läroverk
„ „	1	Backlund, L. H.	utan anmäld avsikt
„ „	1	Johannisson, T. G.	till Sundsvalls allm. läroverk
„ „	1	Djärf, B. J. E.	„ folkskola
„ „	1	Eriksson, T. E.	„ Sundsvalls allm. läroverk
„ „	1	Grandien, K. O.	„ folkskola
„ „	1	von Paijkull, G. H.	„ privat undervisning
„ „	2	Karlsson, K. O. R.	utan anmäld avsikt
„ „	2	Bågenholm, K. E.	„ „ „
„ „	2	Solborg, K. O.	„ „ „
„ „	2	Jakobsson, J. R.	„ „ „
„ „	3	Bergvall, A.	till Falu allm. läroverk
„ „	3	Ström, L. H. M.	„ annat läroverk
„ „	3	Eriksson, G. A. Å.	utan anmäld avsikt
„ „	3	Englund, B. O.	„ „ „
„ „	3	Lilliehöök, G.	till läroverk i Stockholm
„ „	3	Wickenberg, J. E. F.	utan anmäld avsikt
„ „	4	Svenson, P. O.	„ „ „
„ „	4	Backman, P. A. T.	„ „ „
„ „	4	Pettersson, A. R.	till handel
„ „	4	Moberg, E.	„ handtverk
„ „	5	Hammer, K. M.	„ annat läroverk
„ „	5	Widmark, O. F.	utan anmäld avsikt
„ „	5	Bergqvist, H.	„ „ „
„ „	5	Linder, C. E. L.	„ „ „
„ „	5	Hagberg, J. V. A.	till kontor
„ „	5	Svensson, E. M.	„ handel
„ „	5	Östlund, J. O.	„ handelsskola
„ „	6	Andersson, E. S.	„ jordbruk

Från kl. 6		Holmer, R. G.	till sjömansyrket
„ „ 6		Pettersson, K.	utan anmäld avsikt
„ „ I	R.	Bergvall, A.	till Falu allm. läroverk
„ „ I	R.	Hammer, E. J.	död
„ „ I	R.	Eriksson, E. H.	till privat undervisning
„ „ I	R.	Olsén, R. A.	„ teknisk skola
„ „ I	R.	Wennerholm, R. D.	utan anmäld avsikt
„ „ II	R.	Mårtén, H. U.	till Sundsvalls allm. läroverk
„ „ II	R.	Forsberg, J. R. V.	„ teknisk skola
„ „ II	R.	Ström, E. V.	„ „ „
„ „ III	R.	Kihlstedt, S. V.	„ läroverk i Stockholm
„ „ III	R.	Samuelsson, K. T.	„ Hernösands allm. läroverk
„ „ IV	R.	Flodén, S. D.	„ militäryrket

b) **höstterminen 1915.**

Från kl. II	R.	Jonsson, J. H.	utan anmäld avsikt
„ „ I	R.	Persson, S. O.	till jordbruk
„ „ 4		Håkansson, S. O. G.	„ Hudiksvalls allm. läroverk
„ „ 4		Widmark, S. O.	utan anmäld avsikt

26. Under sist förflutna kalenderår hava till lärjungarna utdelats såsom stipendier ..... 1,065: —
premier ..... 348: —

27. Uppgifter för vardera terminen av läsåret angående antalet befriade från t minsavgifter.

	Höst-terminen	Vår-terminen
Befriad från avgift till		
endast biblioteks- och materialkassan	—	—
„ byggnadsfonden	51	55
båda ovannämda kassor	—	—
Ej befriad från någondera avgiften	328	330
Summa närvarande lärjungar	379	385

Avgiften till ljus- och vedkassan har utgjort 10 kronor under höstterminen och 12 kronor under vårterminen.

Från hela avgiften till statsverket hava under höstterminen 123 lärjungar befriats.
„ „ „ „ „ „ „ vårterminen 132 „ „
„ halva „ „ „ „ „ höstterminen 32 „ „
„ „ „ „ „ „ „ vårterminen 28 „ „

D. Boksamlingar och undervisningsmateriel.

28. Läroverkets boksamling har under läsåret ökats

a) *genom gåvor:*

Av *offentliga myndigheter och andra:* Ny tidning för idrott; Nordiskt idrottsliv; Bidrag till Sveriges off. statistik; Meddelanden från riksarkivet; Vetenskapsakademiens publikationer; Meteorologiska iakttagelser; Upsala universitets katalog vårt. och höstt. 1915 samt diverse andra kataloger samt årsredogörelser och program; Medelelser fra det norske Rigsarkiv; Norske Videnskaper Selskabs skrifter; Riksdagens protokoll 1915 m. m.

b) *genom inköp:*

Pedagogisk tidskrift för 1915.
Svensk Kyrkotidning för 1915.
Svensk läraretidning för 1915.
Geologiska föreningens förhandlingar för 1915.
Verdandi för 1915.
Nordisk tidskrift för 1915.
Psyke för 1915.
Historisk tidskrift för 1915.
Det nya Sverige för 1915.
Die neueren Sprachen för 1915.
Geografischer Anzeiger för 1915.
Die Naturwissenschaften 1915.
Ordbok över svenska språket.
Språk och stil för 1915.
Forum för 1915.
Kyrkligtidskrift för 1915.
Nordisk familjebok b. 1—23.
Värdshistoria av Hildebrand m. fl.
Svensk litteraturhistoria av Schück och Warburg.
Vårt språk av A. Noreen.
Diverse läroböcker.

Myntsamlingen har ökats genom gåvor: minnespenning över Petrus Gutensis och J. G. Agardh.

Den biologiska samlingen har under året ökats med åtskilliga insekter m. m.

Den kemiska undervisningsmaterielen har ökats genom inköp av åtskilliga utensilier.

E. Läroverksbyggnader och inredningsmateriel.

29. Läroverket har till det yttre undergått en genomgående reparation, och vad det inre angår hava flera rum blivit ommålade och uppsnyggade. De utbrända värmeungnarne hava undergått en genomgående reparation. Inredningsmaterielen såsom bord och bänkar har blivit reparerad och ommålad.

F. Ekonomiska förhållanden.

31. Uppgifter om nedannämnda till läroverket hörande kassors ställning kalenderåret 1915.

Kassans rubrik	Debet				Kredit			
	Behållning vid årets början		Summa inkomster under året		Summa utgifter under året		Behållning vid årets slut	
	Kr.	öre	Kr.	öre	Kr.	öre	Kr.	öre
Byggnadsfonden.....	4,386	75	4,641	55	6,526	34	2,501	96
Ljus- och vedkassan ...	37	76	8,025	50	8,924	48	—	—
Bibl.- o. materielkassan	1,167	39	3,698	—	3,177	90	1,687	49
Premie- och fattigk:n...	403	99	352	50	340	65	415	84

32. Summariska uppgifter för kalenderåret 1915 över de belopp, som utgått för underhåll och tillökning av

a) boksamlingarna .....
b) den övriga undervisningsmaterielen..... } Kr. 3,177: 90
c) inredningsmaterielen .....

Summa Kr. 3,177: 90

G. Examina och Årsavslutning.

33. Avgångsexamina.

Muntlig studentexamen med de 32 lärjungar i ring IV, som på grund av avlagda skrivningar berättigats till densamma, förrättades den 26 och 27 maj under ledning av professor C. V. L. Charlier, professor P. Persson och professor A. Stille samt i närvaro av de utsedda examensvittnena. Alla godkändes utom en.

Muntlig realskolexamen förrättades den 3 juni med 13 av läroverkets lärjungar och 3 privatister och alla godkändes i examen.

Innevarande vårtermin hava 18 av läroverkets lärjungar och en privatist avlagt skriftlig studentexamen den 10, 12, 14, 15 och 17 april. Alla hava förklarats berättigade till muntlig examen, vilken kommer att försiggå den 22 maj; likaledes hava 14 av läroverkets lärjungar avlagt skriftlig prövning för realskolexamen den 2, 4, 6 och 8 maj. Alla utom tre hava förklarats berättigade till muntlig realskolexamen, som kommer att försiggå den 2 juni.

34. Årsexamen.

Den 10 maj var uppvisning i gymnastik.

Den offentliga årsexamen blir tisdagen den 6 juni med början kl. 12 midd.

Efter examens slut blir uppvisning i sång och musik. Därefter utdelas stipendier och premier, kungöres flyttningen inom läroverket och avslutas läsåret.

35. Till att övervara den förestående examen den 6 juni anhåller jag vördsammast att få inbjuda lärjungarnas föräldrar och målsmän samt alla, som med välvilja och intresse omfatta läroverket.

35. *Nästa läsår* tager sin början *tisdagen* den 22 augusti, då inträdes- och flyttningssökande skola infinna sig å läroverkets samlingssal kl. 12 midd.

Allmänt upprop med läroverkets samtliga lärjungar kommer att hållas *fredagen* den 25 augusti kl. 12 midd.

Under detta läsår har den viktiga förändringen inträtt, att läroverket har förlorat sin högt aktade och djupt vördade inspektor kontraktsprosten O. Löfvenmark, vilken i 22 år med stor kärlek och varmt intresse varit läroverkets stöd, men på grund av hög ålder och nedsatta krafter måst avsäga sig detta förtroendeuppdrag, som var honom mycket kärt, hälst som han själf varit lärjunge vid läroverket. Läroverket bringar honom på detta enkla sätt ett innerligt och vördsamt tack för allt vad han varit och verkat för läroverket.

Läroverket har emellertid haft den förmånen att få erhålla till inspektor översten vid Kungl. Jämtlands fältjägareregemente friherre m. m. C. V. Rappe, vilken beredvilligt till allas stora glädje och tillfredsställelse emottagit detta förtroendeuppdrag.

Anvisning för frivilliga studier.

under sommarferierna för terminens lärjungar i

Fjärde klassen:

Modersmålet: Heidenstam, Karolinerna; Lagerlöf, legender.
Tyska: Kleine Schülerbibliotek: Band IV.
Geografi: Anna Sandström, Natur och arbetsliv i svenska bygder.
Matematik: Ekvationer av 1:a graden med en obekant jämte problem.
Biologi. Samla insekter.

Femte klassen:

Modersmålet: Heidenstam, Svenskarne och deras hövdingar.
Tyska: Auf rauhen Pfaden.
Geografi: Anna Sandström, Natur och arbetsliv i svenska bygder.
Historia: Nyare tiden, läsebok av Ekmark-Rydfors.
Biologi: Reuter, Bilder ur djurvärlden.
Kemi: Philip, den moderna kemins roman.
Geologi: Lägg upp en samling mineral och bergarter.

Första ringen.

Modersmålet: Ferieläsning i svensk litteratur, utgiven av Hernlund och Steffen.
Tyska: Auf rauhen Pfaden.
Latin: Ponfén, II forts. s. 90.
Engelska: Little Lord Fauntleroy.
Geografi: C. Wiman, Bergens uppkomst (Verdandis småskrifter N:o 70).
Historia: Hjärne, Gustaf II Adolf.
Fysik: P. Heegaard, Populär astronomi.
Biologi: Heimdals folkskrifter D:o 75; Verdandis småskrifter N:o 64; skriv en redogörelse för ett eller flera växtsamhällen i hemtrakten (veget. i en skog, mosse, vatten, på äng, sandfält, hed eller ogräs i trädgårdar och åkrar).

Andra ringen.

Modersmålet: Karolinerna av V. v. Heidenstam.
Latin: Fortsättning i L'Homond.
Franska: E. Berthet, Le chasseur de marmottes.
Historia: Hjärne, Napoleon och revolutionen. Frihetstiden av Stavenow.
Biologi: Klerker, Människokroppen.
Fysik: Timberg, Populär Meteorologi.

Tredje ringen.

Latin: Pontén, Lat. förf.: II (prosa) forts. s. 36.
Grekiska: Xen Anab II.
Historia: Repetition av gamla tidens historia.
Engelska: Treasure Island av Stevenson. Short Chapters on English life (Ringenson).
Matematik: Problemlösning.
Franska: Colomba av Merimée.
Fysik: Tyndall, Värmet, betraktat såsom rörelse. Laurin, Om Radium.
Kemi: Ramberg, Grunddragen av den kem. analysens teori.
Biologi: Anställ och redogör för några växtfysiologiska försök enl. Malmberg: Växtfysiologiska försök.

För inträde i läroverkets första klass fordras:

a) förmåga att tydligt och säkert läsa innantill och att med egna ord redogöra för innehållet av en uppläst enkel berättelse;

b) någon färdighet i välskrivning;

c) någon färdighet i rättskrivning;

d) kännedom om viktigare berättelser ur gamla och nya testamentets bibliska historia, några psalmverser;

e) färdighet i användande av de fyra räknesätten med hela tal, högst fyrsiffriga, doek att icke må fordras användning av mer än tvåsiffriga multiplikatorer och divisorer; någon kännedom i sorter och någon övning i huvudräkning;

f) kännedom om Skandinaviska halvöns gränser, om det allmännaste av dess höjdförhållanden och om Sveriges huvuddelar; närmare kännedom antingen om Götaland eller om Svealand och Norrland; förmåga att på kartan utvisa det genomgångna.

Östersund i Maj 1916.

C. A. HÄGGLUND.