



Danskernes Historie Online

Danske Slægtsforskeres Bibliotek

Dette værk er downloadet fra Danskernes Historie Online

Danskernes Historie Online er Danmarks største digitaliseringsprojekt af litteratur inden for emner som personalhistorie, lokalhistorie og slægtsforskning. Biblioteket hører under den almennyttige forening Danske Slægtsforskere. Vi bevarer vores fælles kulturarv, digitaliserer den og stiller den til rådighed for alle interesserede.

Støt Danskernes Historie Online - Bliv sponsor

Som sponsor i biblioteket opnår du en række fordele. Læs mere om fordele og sponsorat her: <https://slaeptsbibliotek.dk/sponsorat>

Ophavsret

Biblioteket indeholder værker både med og uden ophavsret. For værker, som er omfattet af ophavsret, må PDF-filen kun benyttes til personligt brug.

Links

Slægtsforskernes Bibliotek: <https://slaeptsbibliotek.dk>

Danske Slægtsforskere: <https://slaegt.dk>

Pr o g r a m m a

quo

Methodus

numeros per datos quotunque divisores divisos
data residua relicturos investigandi
exponitur
et simul

ANNUVERSARII SCHOLÆ
VIBURGENSIS EXAM.
NATI

indicitur

ad diem 12 mensis Septembris MDCCCVIII

per

Carolum Ferdinandum Degen,
A. A. L. L. M., Soc. Reg. Sc. Havn. M. O.
Scholæque Viburgensis Rectorem.

Particula I.

Viburgi. Typis P. S. Fonsis.

Ignoto fiduciorum Socio
quisquis demum fecit
hunc fasciculum
opulentorum suorum

amicie offert

2^o d. 11 Oct.
1870.

argue ignotuō

Florin.

Sequens

Problema

Numerum invenire, qui per datos
divisores divisus, data residua relin-
quat?

duplici methodo solvere docebimus; duo
scil. dantur casus ab invicem nonnihil diversi;
illa enim residua, quæ data esse sumamus, aut
in numeris determinatis (& quod probe
observandum, integris) ut 1, 2, 3, 4 &c., aut
in quantitatibus post solutionem pro-
lubitu determinandis exhiberi & assign-
ari posse, nullo negotio perspicitur. Pro ho-
rum casuum diversitate duæ exoriuntur metho-
di; toto ut ita dicam coelo ab invicem distan-
tes. Habet autem problema nostrum usum prac-
ticum. Hinc brevem hanc dissertacionem in
tres partes dispescemus, quarum prima speci-

alem, secunda generalem solvendi methodum, tertia denique usum practicum monstrabit.

Ante vero, quam ad ipsas solutiones progrediamur, nonnulla ad verum propositi problematis sensum perspiciendum haud parum facientia præmonere necesse est. Et primo quidem observandum est, problema nostrum sic propositum indeterminatum esse, quippe cui non unica, sed plures simul solutiones satisfaciant; id quod, quo clarius intelligatur, sumamus casum quæstionis simplicissimum, quo quæritur numerus, qui per datum divisorem divisus datum residuum relinquat, ubi manifestum est quodlibet productam ex divisiore dato & numero quocunque integro conflatum datoq. residuo auctum problemati satisfacere. Ita si quæritur numerus, qui per 17 divisus 6 unitates relinquat, solutionem præbebit additio 6 illarum unitatum ad factum cuiusvis numeri v. c. 3 in divisorem datum (17), adeoq. 57. Numerorum autem problemati satisfacientium unus est minimus, velut in casu exempli hic allati ipsum residuum; reliqui, quilibet proxime præcedente major, seriem arithmeticam constituant, v. c.

*

(A) 6, 23, 40, 57, 74, 91, 108, &c. &c.

Nec aliter res se habebit, si duo pluresve divisores cum suis residuis praescribuntur. Quæratur enim v. c. numerus qui per 7 divisus 2 relinquat, id quod quasi palpando fiet, si formetur arithmeticæ progressio, a residuo dato (2) incipiens & per datum divisorum, ceu differentiam, crescens, adeoque hæc:

*

(B) 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44 &c.

Unde, collata utraq. serie, conflat numerum 23 hac proprietate gaudere, ut per 17 divisus 6, per 7 vero divisus 2 relinquat. Eadem vero proprietate gaudent numeri numero infiniti, serie arithmeticæ per 119, id est, per divisorum productum 7. 17, crescente ipsi progradientes, sc.

(C) 23, 142, 261, 380, 499, 618, &c.

Quare neque pro pluribus divisoribus problema nostrum pro determinato habendum, nisi quæratur, non quilibet numerus, sed numerus omnium minimus, qui per datos divisores divisus data residua relinquat. Hoc enim invento reliqui nullo plane negotio invenientur, continua sc. producti ex omnibus divisoribus conflati additione.

Deinde probe tenendum est, si dati divisi-
tores illi divisorēm habeant commu-
nem, fieri posse, ut nulla omnino so-
lutio exhiberi queat. Exemplo luculen-
tissimo cautionalem hanc problemati nostro
jungendam propositionem corroboremus!

Proponatur ex. gr: investigandus numerus,
qui per 21 divisus 13, per 14 divisus 8 relin-
quat. Erit igitur hic numerus, quem littera
 N indicabimus, duplicis formæ; cum enim
(per præcc.) qualibet numerus in 21 ductus &
residuo 13 additus problemati in genere satis-
faciat, erit $N = 21p + 13$, sumto pro [p] nume-
ro quovis integro. Eadem ex causa erit
 $N = 14q + 8$; unde patet ad solutionem pro-
blematis requiri ut sit

$$21p + 13 = 14q + 8$$

ubi q itidem numerum integrum denotat.

Transpositis autem secundum notissimas cal-
culi regulas terminis 8 & 21 p , sequitur æ-
quatio:

$$5 = 14q - 21p$$

Ob divisorēm communem 7 (quem quidem
solutioni officere diximus) sequitur

$$\frac{5}{7} = 2q - 3p$$

Cum autem sint 2 q & 3 p numeri integri
(per hypoth.) erit eorundem differentia itidem
numero integro æqualis. Foret igitur fractio

per numero integro æqualis. Quod cum sit absurdissimum, concludimus, nullam hoc casu obtinere solutionem, id est, nulos omnino valores integros (positivos aut negativos) qui problemati satisfaciant, litteris p & q assignari posse. Eademque difficultate semper laborabit generalis illa quæstio, nisi ubi residuorum datorum differentia communi divisorum divisi fori aut æqualis fuerit, aut eundem ceu illius multiplum contineat.

Denique, quomodo solvenda sit æquatio hujus formæ v. c.

$$13q - 21p = 1$$

(cujus membrum secundum unitati semper æquale ponimus ostendendum. Fiat nempe sequens divisio:

$$13) \quad 21 \quad (1$$

$$\overline{13}$$

$$\overline{8) \quad 13} \quad (1$$

$$\overline{\quad 8}$$

$$\overline{5) \quad 8} \quad (1$$

$$\overline{\quad 5}$$

$$\overline{3) \quad 5} \quad (1$$

$$\overline{\quad 3}$$

$$\overline{-2) \quad 3} \quad (1$$

$$\overline{\quad 2}$$

$$\overline{1) \quad 2} \quad (2$$

& ex quotis inventis, sequentis diagrammatiis ope, eruantur valores p & q:

	A	B
Quoti	I	0
(a)	I	1
	I	I
	I	2
	I	3
	I	5
	2	8
	I3	21

singulos sc. columnarum A & B terminos per quotos iisdem correspondentes multiplicando terminoq. proxime praecedenti addendo, donec ad divisores datos 13 & 21 perveniantur. Ita, si a quoto I (ad a) initium sit, erit

Pro serie A	Pro serie B
I. 2 + I = 3	I. 3 + 2 = 5
I. 3 + 2 = 5	I. 5 + 3 = 8
2. 5 + 3 = 13	2. 8 + 5 = 21

Jam, transversim multiplicando, erit

$$13 \cdot 8 = 104 \quad \& \quad 21 \cdot 5 = 105$$

Hinc si fiat $p = 5$ & $q = 8$. habebimus

$$13 \cdot q - 21 \cdot p = 104 - 105 = -1$$

Quarebatur autem æquatio ejus conditionis, ut esset $13 \cdot q - 21 \cdot p = \pm 1$.

cui quidem satisfiet ponendo $p = -5$ & $q = -8$; tum enim erit $13q - 2p = -104 + 105$, ob $-5 \times -21 = +105$: verumtamen cum in genere possuetur, ut valores, v. c. p & q sint positivi, huic incommodo sequenti modo medelam afferre licet:

$$\begin{aligned} 13q - 21p &= 13q + 13. 21 - 21p - 13. 21 \\ &= 13. [q + 21] - 21. [p + 13] \\ &= 13. q' - 21. p' \end{aligned}$$

id est, præter valores negativos p & q , alii p' & q' s. $p + 13$ & $q + 21$ æquationi æque satisfaciunt. (In genere toties repetenda est numerorum 13 & 21 additio, donec valores positivi p' & q' , p'' & q'' , p''' & q''' &c. prodeant.) Hic igitur nanciscimur $p' = -5 + 13 = +8$ & $q' = -8 + 21 = +13$, quibus adhibitis erit, ut quærebatur, $13q' - 21p' = 13. 13 - 21. 8 = 169 - 168 = +1$

Quo hæc vero methodus animo lectoris altius infixa hæreat, alio quodam exemplo eandem uberius exponere benigne nobis concesserint quicunque rei mathematicæ bene cupiant.

Data nimirum æquatione

$$28x - 65y = 1$$

proponitur, numeros x & y , integros & pos-

sitivos, huic æquationi congruentes indagare.

Facta ut ante divisione

$$\begin{array}{r}
 28) \quad 65 \quad (2 \\
 \underline{-} \quad 56 \\
 \quad \quad 9) \quad 28 \quad (3 \\
 \underline{-} \quad 27 \\
 \quad \quad \quad 1) \quad 9 \quad (9
 \end{array}$$

& descripro diagrammate

	A	B
Quoti	1	0
2	-	0
3	-	1
9	-	2
	28	65

eruantur hunc in modum columnarum A & B termini:

Pro serie A

$$\begin{array}{r}
 2. \circ + 1 = 1 \\
 3. 1 + 0 = 3 \\
 9. 3 + 1 = 27
 \end{array}$$

Pro serie B

$$\begin{array}{r}
 2. 1 + 0 = 2 \\
 3. 2 + 1 = 7 \\
 9. 7 + 2 = 65
 \end{array}$$

At, si transversim multiplicando producta 28.
 7 = 196 & 65. 3 = 195 comparemus, unitate, hic ut ante, ab invicem differre reperiemus; adeoq. valores $x = 7$ & $y = 3$ æquationis solutionem præbent. Neque tamen soli. Est enim

$28x - 65y = 28x + n. 28 \cdot 65 - 65y - n. 28 \cdot 65$.
 pro quovis ipsius n valore. Hinc
 $28x - 65y = 28 \cdot [x + n. 65] - 65 \cdot [y + n. 28]$
 $= 28 \cdot X - 65 \cdot Y$
 si quidem ponitur $X = x + n. 65$
 $Y = y + n. 28$.

Adeoq. pro valoribus inventis $x = 7$ &
 $y = 3$, salva æquationis indele, commode sub-
 stitui poterint termini serierum

*

$$X = 72, 137, 202, 267, 332, 397, \dots \dots$$

$$Y = 31, 59, 87, 115, 143, 171, \dots \dots$$

Ita si capiantur termini correspondentes $x = 202$ & $y = 87$ fiet

$$28 \cdot 202 - 65 \cdot 87 = 5656 - 5655 = 1.$$

Per facilis antem & memorie mullo negotio
 mandanda hinc derivatur regula sequens:

a) Ope diagrammatis ante descripti [cujus
 quatuor supremi termini semper erunt 1, o pro
 serie A; o, 1 pro serie B] eruantur termini
 divisores datos proxime præcedentes.

b) His terminis in æquationem datam
 illatis, si pro + 1 exsurgat valor unitatis ne-
 gativus, pro valoribus terminorum inventorum
 positivis sumantur negativi & æquales, ut pro
 $7 & 11, -7 & -11$.

c) Cuilibet termino (negativo) addatur al-

terius termini (negativi) factor numericus (divisor datus) donec producat in serie arithmetica terminus positivus, eademque iu utraq. serie continuetur operatio donec habeantur bini termini positivi correspondentes, id est, a primo æque distantes. Hi æquationi satisfacent.

Ponamus jam pro æquatione

$$(P) \quad 28x - 65y = 1$$

propositam fuisse hanc

$$(Q) \quad 28x - 65y = 17$$

tum statim patet, vel mediocri acuminè prædicto, cum æquationi P satisfaciant valores $x=7$ & $y=3$, æquationi Q congruere valores $x=7$. $17 = 119$ & $y=3$. $17 = 51$; neque tamen, prouti illi sunt minimi, sequitur hos quoque fore minimos omnium valorum æquationi Q satisfacentium. Immo si formentur series arithmeticæ

*

pro $x \dots R$) $119, 54, -9, \&c.$

(subducendo 65 unitates)

pro $y \dots S$) $51, 23, -5, \&c.$

(subducendo 28 unitates)

patet, ex ante traditis, valores $x=54$ & $y=23$ æquationi æque satisfacturos esse, ac 119 & 51 . Revera erit, calculo instituto: $28 \cdot 54 - 65 \cdot 23 = 1512 - 1495 = 17$.

His præmissis ad solutionem problematis specialioris nos accingimus. Lectori antem optime consultum iri credimus, si generalia methodi nostræ præcepta exemplo particulari & late satis patenti, adeoq. brevisime, illustremus.

Quæratur igitur numerus ejus conditionis, ut idem divisus per 5, 2; per 7, 3; per 9, 8 & per 11, 6 relinquat; quem adeo, vi ante traditorum, quatuor easque diversas formas induere constat, scilicet erit numerus quæsitus

(A)	(B)	(C)	(D)
-----	-----	-----	-----

$$N = 5v + 2 = 7x + 3 = 9y + 8 = 11z + 6$$

Sunt autem, prouti res postulat, divisores 5, 7, 9, 11 inter se primi.

Jam ex æquatione $5v + 2 = 7x + 3$ sequitur per transpositionem terminorum

$$5v - 7x = 1$$

Facta vero divisione, quam præcepimus, reperientur quoti 1, 2, 2; qui, secundum methodum in præcc. traditam, & ad normam diagrammatis illius dispositi, præbebunt valores $v = 3$ & $x = 2$; unde perspicitur numerum minimum formis (A) & (B) respondentem fore $17 = 5 \cdot 3 + 2 = 7 \cdot 2 + 3$. In genere vero habebitur numerus hisce formis respondens $= 17 + 5 \cdot 7 \cdot m = 35m + 17$

Eadem prorsus ratione, sumta æquatione
 $9y + 8 = 11z + 6$
 erit, membris hujus æquationis transpositis,
 $11z - 9y = 2$
 quæ, æquatio secundum præcepta nostra si trac-
 tetur, (immo primo quidem obtutu) præbet
 valores
 $y = z = 1$
 unde sequitur, numerum minimum formis (C)
 & (D) inclusum, esse $17 = 9 \cdot 1 + 8 = 11 \cdot 1$
 $+ 6$, in genere vero hac forma:
 $17 + 9 \cdot 11 \cdot n = 17 + 99 \cdot n$.
 suntis, pro m & n, numeris quibusvis integris
 & positivis.

Cum antem numerus quæsitus quatuor illas
 formas simul induat, necesse est, sit
 $17 + 35 \cdot m = 17 + 99 \cdot n$
 $\therefore 35 \cdot m = 99 \cdot n$

Hinc perspicitur sumi debere $m = 99$ &
 $n = 35$ quo ultimæ huic æquationi satisfiat;
 tum vero ob $35 \cdot 99 = 3465$, erit $N = 3465$
 $+ 17 = 3482$. Quod vero numerus inven-
 tus iis proprietatibus gaudeat, quas problema-
 tis natura postulat, divisione actu instituta e-
 videns fiet; erit enim
 $3482 = 5 \cdot 696 + 2 = 7 \cdot 497 + 3 = 9 \cdot 386$
 $+ 8 = 11 \cdot 316 + 6$.

Casu quodam singulari evenit, ut in exemplo
præc. probl. numerus 17 bis occurrat. Hanc
identitatem ut tollamus, loco formæ (D) aliam
v. c. II z + I substituamus. Erit igitur,
huc assumto,

$$\begin{aligned} 9y + 8 &= IIz + I \\ \text{sive } IIz - 9y &= 7 \end{aligned}$$

cui æquationi respondere invenies valores $y = 9$
 $\& z = 8$ & quidem sequenti calculo, quem
majoris perspicuitatis causa hic subjungere li-
bet. Divisio hæc:

$$9) II (I$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 2) 9 (4 \\ \hline 8 \\ \hline I) 2 (2 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{r} I \\ 4 \\ 2 \end{array} \right| \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ 4 \end{array} \right| \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 9 \end{array} \right| \begin{array}{r} I \\ I \\ 5 \\ II \end{array}$$

præbet quotos 1, 4, 2.

Ex diagrammate addito videmus, æquationi

$$IIz - 9y = I$$

respondere valores $z = -4$ & $y = -5$,
unde patet æquationi $IIz - 9y = 7$
responsuros esse valores $z = -28$ & $y = -35$
Formatis vero seriebus

*

(A) $-28, -19, -10, -1, +8, +17,$
 $+ \&c.$ (pro z)

(B) $-35, -24, -13, -2, +9, +20,$
 $+ \&c.$ (pro y)

habentur valores minimi positivi $z=8$ & $y=9$, ob

$$11 \cdot 8 - 9 \cdot 9 = 88 - 81 = 7$$

pro veris & genuinis habendi. Hisce erit numeris utriusque formæ (C) & (D) respondens in genere

$$= 9 \cdot 9 + 8 + 9 \cdot 11 \cdot n$$

$$= 11 \cdot 8 + 1 + 9 \cdot 11 \cdot n$$

$$= 89 + 99 n$$

Ita ergo comparatus erit numerus quæsus N , ut binis hisce formis simul exhiberi queat:

$$17 + 35 m = 89 + 99 n$$

Exinde vero sequitur

$$35 m - 99 n = 72$$

Quærantur quoti ex divisione numerorum 35 & 99 emergentes, quibus repertis (sunt antem 2, 1, 4, 1, 5) invenietur diagrammatis ope

$$35 \cdot 17 - 99 \cdot 6 = 595 - 594 = 1$$

Unde patet adhiberi posse numeros

$$m = 17, 72 = 1224 \text{ & } n = 6, 72 = 432$$

At ope serierum arithmeticarum (per 99 & 35) decrescentium perveniemus ad sequentes terminos:

(A) 1224, 1125, 1026, 927, 828, 729, 630, 531,
432, 333, 234, 135, 36 (pro m)

(B) 432, 397, 362, 327, 292, 257, 222, 187,
152, 117, 82, 47, 12 (pro n)

Minimi itaque valores ipsorum m & n erunt
 $m = 36$ & $n = 12$

quibus adhibitis patet æquationi satisfieri, ob

$$35 \cdot 36 - 12 \cdot 99 = 1260 - 1188 = 72$$

Hinc tandem obtinebitur generalis illa numeri
 in secundo hoc exemplo eruti forma

$$N = (17 + 35 \cdot 36 = 89 + 99 \cdot 12) + 5.$$

7. 9. II. p

$$\text{f. } N = 1277 + 3465 p,$$

cujus formulæ minimus valor, posito $p = 0$,
 erit $N = 1277$.

Est autem $1277 = 5 \cdot 255 + 2 = 7 \cdot 182 +$
 $3 = 9 \cdot 141 + 8 = 11 \cdot 116 + 1$, unde so-
 lutionis nostre veritas abunde confirmatur.

Ceteroquin quivis facile intelligit, subductio-
 ni, qua series illæ arithmeticæ formandæ sint,
 divisionem substitui posse, minimosq. illos ipso-
 rum m & n valores immediate inveniri. Ita

99)	1224 (12	35)	432 (12
<u>99</u>	234	<u>35</u>	82
<u>234</u>	198	<u>70</u>	12
<u>198</u>	36		

per exempla calculi hic subjecti apparet, facta
 duces subductione, in utraq. serie terminum
 tertium fore 12 & 36.

Cave autem, in erroneos valores inci-

das, id quod tibi accidet, ubi, facta ejusmodi divisione, quæ inveneris residua, nullo quotorum respectu habito, adhibueris; ista enim residua, quotis inæqualibus, falsos necessario præbebunt æquationis radicum valores. Fac enim ex. gr. alicujus problematis solutione ad radices 317 & 644 æquationi sue satisfacientes per ventum esse, pro istis autem minores quaeri, & quidem divisione per numeros 29 & 71 instituenda id effici: tum, ob

$317 = 10 \cdot 29 + 27$ & $644 = 9 \cdot 71 + 5$
 id est, ob quotos inæquales 10 & 9, residua 27 & 5 pro veris illis 317 & 644 minime usurpari posse liquet. Hoc vero non officit, quo minus veræ radiccs minimæ eruantur. Est enim

$$\begin{array}{rcl} 10 \cdot 29 = 9 \cdot 29 + 29; \text{ adeoque} \\ 317 - 9 \cdot 29 + 29 + 27 = 9 \cdot 29 + 56 \\ \text{quemadmodum} \qquad \qquad \qquad 644 = 9 \cdot 71 + 5 \end{array}$$

Illud igitur residuum (hic 5) quod minori quoto respondet, servandum est, addito alteri residuo quotorum inæqualium differentiæ (hic $10 - 9 = 1$) & divisoris maj. qcc. correspondentis (hic 29) producto (hic 1. 29).

Nititur autem hæc casis particularis solutio continuaarum idarum fractionum indole,

quarum usum breviter descripsimus in Programmate, quo Ao. 1805 anniversaria festi natalis, Regis clementissimi, CHRISTIANI SEPTIMI solennia pie sancteque colenda, pro officio, nostro cum munere conjuncto, prescripsimus. Generaliorem vero quin adeo latisime patente hujus problematis solutionem, arctissimis praesentis opusculi finibus inclusi, anno proximo, si vitam viresq. nobis largiri summo placuerit Numinis, cui secundam nostrae dissertationis particulam, cum civibus amplissimis & doctissimis communicare statuimus, particulæ postremæ usus practici expositionem reservantes. Ad selectiora certe Arithmetices capita referendum esse universum hoc argumentum, cum in vulgaribus libris hac de arte præcipientibus idem frustra quæsiveris, Lector benevole, persuasum Tibi quin habiturus sis, nullus dubito.
