Programma

quo

Methodus

numeros per datos quotcunque divisores divisos
data residua relicturos investigandi
exponitur
et simul

ANNIVERSARIA SCHOLÆ VIBURGENSIS EXAMINATIO

indicitur

ad diem 12 mensis Septembris MDCCCVIII

per

Carolum Ferdinandum Degen,
A. A. L. L. M., Soc. Reg. Sc. Havn. M. O.
Scholæque Viburgensis Rectorem.

Particula I.

Viburgi. Typis P. S. Fönsii.

Ignoto studiorum Socio
quisquis demum fuerit
hunc fasciculum
opusculorum suorum

amice offert

Lib. d. 11 Oct.
1810.

aeque ignotus

Auctor.

Sequens

Problema

Numerum invenire, qui per datos divisores divisus, data residua relinquat?

duplici methodo solvere docebimus; duo scil. dantur casus ab invicem nonnihil diversi; illa enim residua, quae data esse sumamus, aut in numeris determinatis (& quod probe observandum, integris) ut 1, 2, 3, 4 &c., aut in quantitatibus post solutionem pro lubitu determinandis exhiberi & assignari posse, nullo negotio perspicitur. Pro horum casuum diversitate duae exoriuntur methodi; toto ut ita dicam coelo ab invicem distantes. Habet autem problema nostrum usum practicum. Hinc brevem hanc dissertationem in tres partes dispescemus, quarum prima specialem, secunda generalem solvendi methodum, tertia denique usum practicum monstrabit.

Ante vero, quam ad ipsas solutiones progrediamur, nonnulla ad verum propositi problematis sensum perspiciendum haud parum facientia præmonere necesse est. Et primo quidem observandum est, problema nostrum sic propositum indeterminatum esse, quippe cui non unica, sed plures simul solutiones satisfaciant; id quod, quo clarius intelligatur, sumamus casum qvæstionis simplicissimum, quo quæritur numerus, qui per datum divisorem divisus datum residuum relinquat, ubi manifestum est quodlibet productum ex divisore dato & numero quocunque integro conflatum datoq. residuo auctum problemati satisfacere. Ita si quæritur numerus, qui per 17 divisus 6 unitates relinquat, solutionem præbebit additio 6 illarum unitatum ad factum cujusvis numeri v. c. 3 in divisorem datum (17), adeoq. 57. Numerorum autem problemati satisfacientium unus est minimus, velut in casu exempli hic allati ipsum residuum; reliqui, quilibet proxime præcedente major, seriem arithmeticam constituunt, v. c.

*

(A) 6, 23, 40, 57, 74, 91, 108, &c. &c.

Nec aliter res ſe habebit, ſi duo pluresve diviſores cum ſuis reſiduis præſcribuntur. Quæratur enim v. c. numerus qui per 7 diviſus 2 relinquat, id quod quaſi palpando fiet, ſi formetur arithmetica progreſſio, a reſiduo dato (2) incipiens & per datum diviſorem, ceu differentiam, creſcens, adeoque hæc:

*

(B) 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44 &c.

Unde, collata utraq. ſerie, conſtat numerum 23 hac proprietate gaudere, ut per 17 diviſus 6, per 7 vero diviſus 2 relinquat. Eadem vero proprietate gaudent numeri numero infiniti, ſerie arithmetica per 119, id eſt, per diviſorum productum 7. 17, creſcente ipſi progredientes, ſc.

(C) 23, 142, 261, 380, 499, 618, &c.

Quare neque pro pluribus diviſoribus problema noſtrum pro determinato habendum, niſi quæratur, non quilibet numerus, ſed numerus omnium minimus, qui per datos diviſores diviſus data reſidua relinquat. Hoc enim invento reliqui nullo plane negotio invenientur, continua ſc. producti ex omnibus diviſoribus conſlati additione.

Deinde probe tenendum est, si dati divisores illi divisorem habeant communem, fieri posse, ut nulla omnino solutio exhiberi queat. Exemplo luculentissimo cautionalem hanc problemati nostro jungendam propositionem corroboremus!

Proponatur ex. gr. investigandus numerus, qui per 21 divisus 13, per 14 divisus 8 relinquat. Erit igitur hic numerus, quem littera N indicabimus, duplicis formæ; cum enim (per præcc.) quilibet numerus in 21 ductus & residuo 13 additus problemati in genere satisfaciat, erit $N = 21p + 13$, sumto pro [p] numero quovis integro. Eadem ex causa erit $N = 14q + 8$; unde patet ad solutionem problematis requiri ut sit

$$21p + 13 = 14q + 8$$

ubi q itidem numerum integrum denotat.

Transpositis autem secundum notissimas calculi regulas terminis 8 & 21 p, sequitur æquatio:

$$5 = 14q - 21p$$

Ob divisorem communem 7 (quem quidem solutioni officere diximus) sequitur

$$\tfrac{5}{7} = 2q - 3p$$

Cum autem sint 2 q & 3 p numeri integri (per hypoth.) erit eorundem differentia itidem numero integro æqualis. Foret igitur fractio

$\frac{5}{7}$ numero integro æqualis. Quod cum ſit abſurdiſſimum, concludimus, nullam hoc caſu obtinere ſolutionem, id eſt, nullos omnino valores integros (poſitivos aut negativos) qui problemati ſatisfaciant, litteris p & q aſſignari poſſe. Eademque difficultate ſemper laborabit generalis illa quæſtio, niſi ubi reſiduorum datorum differentia communi diviſorum diviſori aut æqualis fuerit, aut eundem ceu illius multiplum contineat.

Denique, quomodo ſolvenda ſit æquatio hujus formæ v. c.

$$13\,q - 21\,p = 1$$

(cujus membrum ſecundum unitati ſemper æquale ponimus oſtendendum. Fiat nempe ſequens diviſio:

```
13) 21 (1
    13
    --
     8) 13 (1
         8
        --
         5) 8 (1
            5
            -
            3) 5 (1
               3
               -
               2) 3 (1
                  2
                  -
                  1) 2 (2
```

& ex quotis inventis, sequentis diagrammatis ope, eruantur valores p & q:

Quoti		A	B
		1	0
	1	0	1
	1	1	1
	1	1	2
(a)	1	2	3
	1	3	5
	2	5	8
		13	21

singulos sc. columnarum A & B terminos per quotos iisdem correspondentes multiplicando terminoq. proxime præcedenti addendo, donec ad divisores datos 13 & 21 perveniatur. Ita, si a quoto 1 (ad a) initium fit, erit

Pro serie A	Pro serie B
$1.\ 2 + 1 = 3$	$1.\ 3 + 2 = 5$
$1.\ 3 + 2 = 5$	$1.\ 5 + 3 = 8$
$2.\ 5 + 3 = 13$	$2.\ 8 + 5 = 21$

Jam, transversim multiplicando, erit

$13.\ 8 = 104$ & $21.\ 5 = 105$

Hinc si fiat $p = 5$ & $q = 8$. habebimus

$$13\,q - 21\,p = 104 - 105 = -1$$

Quærebatur autem æquatio ejus conditionis, ut esset $13\,q - 21\,p = +1.$

cui quidem ſatisfiet ponendo $p = -5$ & $q = -8$; tum enim erit $13\,q - 2\,p = -104 + 105$, ob $-5 \times -21 = +105$: verumtamen cum in genere poſtuletur, ut valores, v. c. p & q ſint poſitivi, huic incommodo ſequenti modo medelam afferre licet:

$$
\begin{aligned}
13\,q - 21\,p &= 13\,q + 13.\,21 - 21\,p - 13.\,21 \\
&= 13.\,[q + 21] - 21.\,[p. + 13] \\
&= 13.\,q' - 21.\,p'
\end{aligned}
$$

id eſt, præter valores negativos p & q, alii p' & q' ſ. $p + 13$ & $q + 21$ æquationi æque ſatisfaciunt. (In genere toties repetenda eſt numerorum 13 & 21 additio, donec valores poſitivi p' & q', p'' & q'', p''' & q''' &c. prodeant.) Hic igitur nanciſcimur $p' = -5 + 13 = +8$ & $q' = -8 + 21 = +13$, quibus adhibitis erit, ut quærebatur, $13\,q' - 21\,p' = 13.\,13 - 21.\,8 = 169 - 168 = +1$

Quo hæc vero methodus animo lectoris altius infixa hæreat, alio quodam exemplo eandem uberius exponere benigne nobis conceſſerint quicunque rei mathematicæ bene cupiant.

Data nimirum æquatione

$$28\,x - 65\,y = 1$$

proponitur, numeros x & y, integros & poſitivos, huic æquationi congruentes indagare.

Facta ut ante diviſione

$$
\begin{array}{llllll}
28) & 65 & (2 & & & \\
 & 56 & & & & \\
 & 9) & 28 & (3 & & \\
 & & 27 & & & \\
 & & 1) & 9 & (9 &
\end{array}
$$

& deſcripto diagrammate

	A	B
Quoti	1	0
2 - - - -	0	1
3 - - - -	1	2
9 - - - -	3	7
	28	65

eruantur hunc in modum columnarum A & B termini:

Pro ſerie A	Pro ſerie B
2. 0 + 1 = 1	2. 1 + 0 = 2
3. 1 + 0 = 3	3. 2 + 1 = 7
9. 3 + 1 = 27	9. 7 + 2 = 65

At, ſi transverſim multiplicando producta 28. 7 = 196 & 65. 3 = 195 comparemus, unitate, hic ut ante, ab invicem differre reperiemus; adeoq. valores x = 7 & y = 3 æquationis ſolutionem præbent. Neque tamen ſoli. Eſt enim

$28x - 65y = 28x + n.28.65 - 65y - n.28.65.$
pro quovis ipsius n valore. Hinc

$$28x - 65y = 28.[x + n.65] - 65.[y + n.28]$$
$$= 28.X - 65Y$$

si quidem ponitur $X = x + n.65$
$Y = y + n.28$

Adeoq. pro valoribus inventis $x = 7$ & $y = 3$, salva æquationis indole, commode substitui poterint termini serierum

*

$X = 72, 137, 202, 267, 332, 397, \ldots\ldots$
$Y = 31, 59, 87, 115, 143, 171, \ldots\ldots$

Ita si capiantur termini correspondentes $x = 202$ & $y = 87$ fiet

$$28.202 - 65.87 = 5656 - 5655 = 1.$$

Perfacilis autem & memoriæ nullo negotio mandanda hinc derivatur regula sequens:

a) Ope diagrammatis ante descripti [cujus quatuor supremi termini semper erunt 1, 0 pro serie A; 0, 1 pro serie B] eruantur termini divisores datos proxime præcedentes.

b) His terminis in æquationem datam illatis, si pro + 1 exsurgat valor unitatis negativus, pro valoribus terminorum inventorum positivis sumantur negativi & æquales, ut pro 7 & 11, − 7 & − 11.

c) Cuilibet termino (negativo) addatur alterius termini (negativi) factor numericus (divisor datus) donec prodeat in serie arithmetica terminus positivus, eademque in utraq. serie continuetur operatio donec habeantur bini termini positivi correspondentes, id est, a primo aeque distantes. Hi aequationi satisfacient.

Ponamus jam pro aequatione

(P) $28\,x - 65\,y = 1$

propositam fuisse hanc

(Q) $28\,x - 65\,y = 17$

tum statim patet, vel mediocri acumine praedito, cum aequationi P satisfaciant valores $x = 7$ & $y = 3$, aequationi Q congruere valores $x = 7.\ 17 = 119$ & $y = 3.\ 17 = 51$; neque tamen, prouti illi sunt minimi, sequitur hos quoque fore minimos omnium valorum aequationi Q satisfacientium. Immo si formentur series arithmeticae

*

pro x...R) 119, 54, — 9, &c.

(subducendo 65 unitates)

pro y...S) 51, 23, — 5, &c.

(subducendo 28 unitates)

patet, ex ante traditis, valores $x = 54$ & $y = 23$ aequationi aeque satisfacturos esse, ac 119 & 51. Revera erit, calculo instituto: $28.\ 54 - 65.\ 23 = 1512 - 1495 = 17.$

His præmisſis ad ſolutionem problematis ſpecialioris nos accingimus. Lectori autem optime conſultum iri credimus, ſi generalia methodi noſtræ præcepta exemplo particulari & late ſatis patenti, adeoq. brevisſime, illuſtremus.

Quæratur igitur numerus ejus conditionis, ut idem diviſus per 5, 2; per 7, 3; per 9, 8 & per 11, 6 relinquat; quem adeo, vi ante traditorum, quatuor easque diverſas formas induere conſtat, ſ. erit numerus quæſitus

$$\begin{array}{ccccc} & (A) & (B) & (C) & (D) \\ N = & 5v + 2 = & 7x + 3 = & 9y + 8 = & 11z + 6 \end{array}$$

Sunt autem, prouti res poſtulat, diviſores 5, 7, 9, 11 inter ſe primi.

Jam ex æquatione $5v + 2 = 7x + 3$ ſequitur per transpoſitionem terminorum

$$5v - 7x = 1$$

Facta vero diviſione, quam præcepimus, reperientur quoti 1, 2, 2; qui, ſecundum methodum in præcc. traditam, & ad normam diagrammatis illius diſpoſiti, præbebunt valores $v = 3$ & $x = 2$; unde perſpicitur numerum minimum formis (A) & (B) reſpondentem fore $17 = 5.3 + 2 = 7.2 + 3$. In genere vero habebitur numerus hisce formis reſpondens $= 17 + 5.7.m = 35m + 17$

Eadem prorſus ratione, ſumta æquatione

$$9y + 8 = 11z + 6$$

erit, membris hujus æquationis transpoſitis,

$$11z - 9y = 2$$

quæ, æquatio ſecundum præcepta noſtra ſi tractetur, (immo primo quidem obtutu) præbet valores

$$y = z = 1$$

unde ſequitur, numerum minimum formis (C) & (D) incluſum, eſſe $17 = 9.1 + 8 = 11.1 + 6$, in genere vero hac forma:

$$17 + 9.11.n = 17 + 99n.$$

ſumtis, pro m & n, numeris quibusvis integris & poſitivis.

Cum autem numerus quæſitus quatuor illas formas ſimul induat, neceſſe eſt, ſit

$$17 + 35m = 17 + 99n$$

$$\text{ſ. } 35m = 99n$$

Hinc perſpicitur ſumi debere $m = 99$ & $n = 35$ quo ultimæ huic æquationi ſatisfiat; tum vero ob $35.99 = 3465$, erit $N = 3465 + 17 = 3482$. Quod vero numerus inventus iis proprietatibus gaudeat, quas problematis natura poſtulat, diviſione actu inſtituta evidens fiet; erit enim

$$3482 = 5.696 + 2 = 7.497 + 3 = 9.386 + 8 = 11.316 + 6.$$

Caſu quodam ſingulari evenit, ut in exemplo præc. probl. numerus 17 bis occurrat. Hanc identitatem ut tollamus, loco formæ (D) aliam v. c. $11\ z + 1$ ſubſtituamus. Erit igitur, hoc aſſumto,

$$9\ y + 8 = 11\ z + 1$$

ſive $$11\ z - 9\ y = 7$$

cui æquationi reſpondere invenies valores $y = 9$ & $z = 8$ & quidem ſequenti calculo, quem majoris perſpicuitatis cauſa hic ſubjungere liber. Diviſio hæc:

```
9) 11 (1
   9
   --
   2) 9 (4
      8
      --
      1) 2 (2
```

		1	0
1	——	0	1
4	——	1	1
2	——	4	5
		9	11

præbet quotos 1, 4, 2.

Ex diagrammate addito videmus, æquationi

$$11\ z - 9\ y = 1$$

reſpondere valores $z = -4$ & $y = -5$, unde patet æquationi $11\ z - 9\ y = 7$ reſponſuros eſſe valores $z = -28$ & $y = -35$ Formatis vero ſeriebus

*

(A) $-28, -19, -10, -1, +8, +17,$ $+$ &c. (pro z)

(B) $-35, -24, -13, -2, +9, +20,$ $+$ &c. (pro y) habentur valores minimi positivi $z=8$ & $y=9$, ob

$$11 . 8 - 9 . 9 = 88 - 81 = 7$$

pro veris & genuinis habendi. Hinc erit numeris utrique formæ (C) & (D) respondens in genere

$$= 9 . 9 + 8 + 9 . 11 . n$$
$$= 11 . 8 + 1 + 9 . 11 . n$$
$$= 89 + 99 n$$

Ita ergo conparatus erit numerus quæsitus N, ut binis hisce formis simul exhiberi queat:

$$17 + 35 m = 89 + 99 n$$

Exinde vero sequitur

$$35 m - 99 n = 72$$

Qværantur quoti ex divisione numerorum 35 & 99 emergentes, quibus repertis (sunt autem 2, 1, 4, 1, 5) invenietur diagrammatis ope

$$35 . 17 - 99 . 6 = 595 - 594 = 1$$

Unde patet adhiberi posse numeros

$$m = 17 . 72 = 1224 \ \& \ n = 6 . 72 = 432$$

At ope serierum arithmeticarum (per 99 & 35) decrescentium perveniemus ad sequentes terminos:

(A) 1224, 1125, 1026, 927, 828, 729, 630, 531, 432, 333, 234, 135, 36 (pro m)

(B) 432, 397, 362, 327, 292, 257, 222, 187, 152, 117, 82, 47, 12 (pro n)

Minimi itaque valores ipsorum m & n erunt
$$m = 36 \ \& \ n = 12$$
quibus adhibitis patet æquationi satisfieri, ob
$$35.\,36 - 12.\,99 = 1260 - 1188 = 72$$
Hinc tandem obtinebitur generalis illa numeri in secundo hoc exemplo eruti forma
$$N = (17 + 35.\,36 = 89 + 99.\,12) + 5.\,7.\,9.\,11.\,p$$
s. $N = 1277 + 3465\,p$,
cujus formulæ minimus valor, posito $p = 0$, erit $N = 1277$.
Est autem $1277 = 5.\,255 + 2 = 7.\,182 + 3 = 9.\,141 + 8 = 11.\,116 + 1$, unde solutionis nostræ veritas abunde confirmatur.

Ceteroquin quivis facile intelligit, subductioni, qua series illæ arithmeticæ formandæ sint, divisionem substitui posse, minimosq. illos ipsorum m & n valores immediate inveniri. Ita

99) 1224 (12	35) 432 (12
99	35
234	82
198	70
36	12

per exempla calculi hic subjecti apparet, facta 12es subductione, in utraq. serie terminum 13tium fore 12 & 36.

Cave autem, in erroneos valores incidas, id quod tibi accidet, ubi, facta ejusmodi divisione, quæ inveneris residua, nullo quotorum respectu habito, adhibueris; ista enim residua, quotis inæqualibus, falsos necessario præbebunt æquationis radicum valores. Fac enim ex. gr. alicujus problematis solutione ad radices 317 & 644 æquationi suæ satisfacientes perventum esse, pro istis autem minores quæri, & quidem divisione per numeros 29 & 71 instituenda id effici: tum, ob

$$317 = 10.\,29 + 27 \;\&\; 644 = 9.\,71 + 5$$

id est, ob quotos inæquales 10 & 9, residua 27 & 5 pro veris illis 317 & 644 minime usurpari posse liquet. Hoc vero non officit, quo minus veræ radices minimæ eruantur. Est enim

$$10.\,29 = 9.\,29 + 29; \text{ adeoque}$$

$$317 = 9.\,29 + 29 + 27 = 9.\,29 + 56$$

quemadmodum $644 = 9.\,71 + 5$

Illud igitur residuum (hic 5) quod minori quoto respondet, servandum est, addito alteri residuo quotorum inæqualium differentiæ (hic $10 - 9 = 1$) & divisoris maj. qcc. correspondentis (hic 29) producto (hic 1. 29).

Nititur autem hæc casus particularis solutio continuarum illarum fractionum indole, quarum ufum breviter defcripfimus in Programmate, quo Ao. 1805 anniverfaria fefti natalis, Regis clementiffimi, CHRISTIANI SEPTIMI folennia pie fancteque colenda, pro officio, noftro cum munere conjuncto, profcripfimus. Generaliorem vero quin adeo latisfime patentem hujus problematis folutionem, arctiffimis præfentis opufculi finibus inclufi, anno proximo, fi vitam viresq. nobis largiri Summo placuerit Numini, ceu fecundam noftræ differtationis particulam, cum civibus ampliffimis & doctiffimis communicare ftatuimus, particulæ poftremæ u f u s p r a c t i c i expofitionem refervantes. Ad felectiora certe Arithmetices capita referendum effe univerfum hoc argumentum, cum in vulgaribus libris hac de arte præcipientibus idem fruftra quæfiveris, Lector benevole, perfuafum Tibi quin habiturus fis, nullus dubito.