Indbydelsesskrift

til

den offentlige Examen

i

Kongsbergs Middel- og Realskole

i Juli 1856.

---

1. Afsnit af en mekanisk Fysik til Skolebrug ved V. Saxild.
2. Efterretninger om Kongsbergs Middel- og Realskole ved Skolens Rektor.

Kongsberg 1856.
Trykt af N. Erlandsen.

I.

Mekanisk Fysik til Skolebrug.

(Indledning. Første Afsnit.)

Forord.

Undervisningen i Fysik ved vore Middel- og Realskoler er først nylig traadt i Kraft og har saaledes at kjæmpe med Begyndelsens Vanskeligheder. Blandt disse stiller sig hos os den af Kyndigere allerede paaviste Mangel paa passende Lærebøger. Formedelst denne Mangel ser vedkommende Lærer sig nødt til paa egen Haand at excerpere Videnskaben for sine Elever, — et Arbejde, som baade højligen medtager hans Tid og paalægger ham betydeligt Ansvar. Dette Ansvar føles desto stærkere, jo mere man er overladt til sit eget Judicium, baade om hvad og hvorledes man skal foredrage, og jeg efterkommer derfor villigen Rektors Opfordring til i dette Program at offentliggjøre en Prøve paa, hvorledes vi her har søgt at løse den fysiske Undervisnings Problem, idet jeg tør haabe gjennem Skoleverdenens derpaa muligens henledede Opmærksomhed at erholde gavnlige Antydninger og Raad.

For Tiden helder jeg til den Mening, at det toaarige Kursus, som er bestemt for Fysiken ved vore Middel- og Realskoler, bør anvendes til at bibringe Eleverne et nogenlunde grundigt Kjendskab til Mekaniken (i det første Aar) og til Varme- samt Elektricitetslæren (i det andet Aar). Dels maa det nemlig antages, at disse ere de for det praktiske Liv mest uundværlige Grene af Videnskaben, dels opnaar man ved et saadant Arrangement, at man altid kan have Klassens samtlige Elever paa samme Parti.

Det vil af efterfølgende Blade sees, at der forudsættes temmelig udførligt Kjendskab til den elementære Mathematik, hvilket vistnok oftere tør falde vanskeligt at meddele i de to Aar, som Eleverne tilbringer i 1ste Latin- og Realklasse, hvor den egentlige mathematiske Undervisning paabegyndes — man erindre, at denne Klasse skal være toaarig og have to Partier, med hvilke der læses i samme Timer, — men naar man af de hidtil benyttede Lærebøger forbigaar, hvad jeg i Indberetningen til Rektor om indeværende Skoleaars mathematiske Pensum har anført, saa tror jeg nok at Resten kan fordres af dem, som vil optages i 2den Realklasse, hvor da Fysiken paabegyndes samtidigt med et kort Udtog af den plane Trigonometri.

Grunden til at Skoleverdenen forelægges dette Arbejde er allerede anført. Om dette selv har jeg endnu tilbage at sige, at det ikke udgives for Andet end en Kompilation, og at jeg fornemlig har benyttet Dr. Weisbachs Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. I den Tanke, at Kjendskaben til de engelske Navne paa nogle af de sædvanligste Kunstord turde blive nyttig for En og Anden af Eleverne, anføres disse Navne efter nævnte Forfatter.

Kongsberg den 21de Juni 1856.

V. Saxild.

Indledning.

Første Kapitel.

Om Kræfter og Bevægelse ialmindelighed.

§ 1.

Mekanik er den Videnskab, som lærer os at kjende Lovene for Legemers Bevægelse.

Den Aarsag, som bringer et Legeme i Bevægelse, eller stræber at bringe det i Bevægelse, hvis det er hindret deri af en anden Aarsag, kaldes Kraft (force).

Man skjelner mellem bestandige (uniform) og foranderlige (variable) Kræfter. Medens bestandige Kræfter altid virker paa samme Vis og derfor frembringer lige Virkninger i lige Tidsdele, ere ved foranderlige Kræfter disse Virkninger forskjellige.

Ved enhver Kraft mærker man sig:

1) Angrebspunktet (point of application) d. e. det Punkt af Legemet, hvorpaa Kraften umiddelbart virker.
2) Kraftretningen (direction), d. e. den rette Linie, hvori, som vi snart skal se, Kraften enten bevæger eller søger at bevæge Angrebspunktet. Kraftretningen har, ligesom enhver Bevægelsesretning, to Sider; den kan gaa fra Venstre mod Højre eller fra Højre mod Venstre, ovenfra nedad eller nedenfra opad o. s. v. Man kalder den ene den positive og altsaa den anden, den negative.
3) Kraftens Styrke (intensity).

§ 2.

Et Legemes Bevægelse siges at være absolut, naar den er bestemt ved at sammenligne den Plads, Legemet indtager til forskjellige

Tidsdele, med andre i Rummet faste Gjenstande; Bevægelsen kaldes derimod **relativ**, naar den bestemmes ved at henføre den til andre i Rummet bevægelige Gjenstande.

Et **Legemes Bevægelse** bestemmes ved at angive Bevægelsen af ethvert Punkt i samme. Et Punkts Bevægelse kaldes **ensformig**, naar Punktet i ligestore Tidsdele gjennemløber ligestore Rum. Bevægelsen kaldes i modsat Fald **foranderlig**; den kaldes **accelererende** (increasing), naar det i ligestore Tidsdele gjennemløbne Rum bliver større og større; **retarderende** (decreasing), naar det bliver mindre og mindre.

Ved en ensformig Bevægelses **Hastighed** (velocity) forstaaes Forholdet mellem det gjennemløbne Rum og den dertil medgaaede Tid. Ved en foranderlig Bevægelses Hastighed i et bestemt Øjeblik forstaaes den Hastighed, hvormed Bevægelsen vilde foregaa, dersom Kraften fra dette Øjeblik af ophørte at virke.

§ 3.

Erfaring har lært os følgende Sætninger om den Forbindelse, som finder Sted mellem en Kraft og den ved samme frembragte Bevægelse:

1) Naar en Kraft i en vis Tid har virket paa et Legeme, som befandt sig i Hvile, saa vil dette Legeme, naar Kraften har ophørt at virke paa samme, og indtil en eller flere nye Kræfter hindrer det deri, bevæge sig i en ret Linie og med en uforanderlig Hastighed.

   Denne Egenskab hos Legemerne, at de ikke, uden at nye Kræfter virker paa dem, kan forandre den engang meddelte Bevægelses Retning og Hastighed, kaldes deres **Træghed** (inertia).

2) Naar en Kraft virker paa et Legeme, som allerede har en vis Bevægelse, saa bliver den herved frembragte Bevægelse relativ til den oprindelige den samme, som om Legemet oprindelig havde været i Hvile.

   Denne Sætning kaldes **Loven for den relative Bevægelses Uafhængighed af den oprindelige Bevægelse.** Naar altsaa et Legeme har en vis Bevægelse i Retningen A B (Fig. 1.), og det i samme Øjeblik, det forlader A, paavirkes af en Kraft, som, ifald Legemet oprindelig havde været i Hvile, vilde have bevæget samme i Retningen A C, saa vil Legemet ifølge ovenstaaende Lov bevæge sig, som om Linien A C, medens Legemet med den ved den nye Kraft bestemte Hastighed bevæger sig henad samme, — selv bevægedes parallel med sin oprindelige Stilling, idet dens Endepunkt A netop udførte Legemets oprindelige Bevægelse.

§ 4.

Naar et Legeme har en ensformig Bevægelse, plejer man at udtrykke dets Hastighed ved det i 1 Sekund gjennemløbne Rum. Kaldes denne Hastighed c og den i t Sekunder tilbagelagte Vej s, saa har man $s = ct$ (1). Omvendt er $c = \frac{s}{t}$ (2) og $t = \frac{s}{c}$ (3).

§ 5.

Dersom en Kraft meddeler et Legeme en ensformig Bevægelse, hvis Hastighed er c_1, og en anden Kraft meddeler samme Legeme i samme Retning en ensformig Bevægelse, hvis Hastighed er c_2, saa har man den af Legemet i t Sekunder tilbagelagte Vej: $s = c_1 t + c_2 t = (c_1 + c_2) t$, og følgelig er den resulterende Hastighed lig Summen af de enkelte Bevægelsers Hastigheder. Foregaar begge Bevægelser i modsatte Retninger, bliver $s = c_1 t - c_2 t = (c_1 - c_2) t$; da bliver altsaa den resulterende Hastighed lig Differentsen mellem de enkelte Hastigheder.

§ 6.

En Bevægelse siges at være *jævnt foranderlig*, naar dens Hastighed til- eller aftager lige meget i lige Tidsdele. Størrelsen af den Forandring i Hastighed, som en foranderlig Bevægelse lider i en given Tid, kaldes *Accelerationen*; denne er positiv eller negativ, eftersom Hastigheden til- eller aftager. Ved den jævnt foranderlige Bevægelse er Accelerationen, som sagt, uforanderlig, og derfor maales den sædvanligvis ved den Til- eller Aftagelse i Hastighed, som finder Sted i 1 Sekund.

§ 7.

Naar en Kraft ved at virke paa et Legeme i en vis Tid, f. Ex. 1 Sekund, har meddelt Legemet Hastigheden p Fod i Sekundet, og den da ophører at virke paa Legemet, saa vil dette ifølge Trægheden fortsætte sin Bevægelse i Kraftens Retning med den uforanderlige Hastighed p Fod i Sekundet. Hvis man nu tænker sig at, i det Øjeblik denne Kraft ophørte at virke paa Legemet, en ny Kraft, aldeles lig den første, begyndte at virke i samme Retning, saa at altsaa denne nye Kraft, hvis Legemet havde været i Hvile, ogsaa ved Udløbet af 1 Sekund vilde have meddelt samme en Hastighed af p Fod i Sekundet, — saa vil Legemet ved Udløbet af dette andet Sekund erholde Hastigheden 2p Fod i Sekundet. Ophører nu den nye Kraft at virke, saa vil altsaa Legemet fra nu af fortsætte sin Bane i samme Retning med den uforanderlige Hastighed 2p Fod i Sekundet. Men at antage, at en Kraft, efter at have virket paa Legemet i et Sekund, ophører at virke, og at umiddelbart derpaa en ny Kraft, lig den oprindelige, virker paa Legemet i næste Sekund, — er det samme som at antage, at den oprindelige Kraft med uforandret Styrke vedbliver at virke paa Legemet i begge Sekunder. Naar altsaa en Kraft ved at virke paa et Legeme i et Sekund meddeler samme Hastigheden p, saa vil den ved med uforandret Styrke og Retning at virke paa Legemet i to Sekunder meddele det Hastigheden 2p. Paa samme Maade indsees, at denne Kraft ved med uforandret Styrke og Retning at virke paa Legemet i tre Sekunder vil meddele det Hastigheden 3p, og ialmindelighed, at man, dersom man ved v forstaar den Hastighed, som Kraften har meddelt Legemet ved at virke paa samme i t Sekunder, vil have $v = pt$. (I)

Betegner s den i Tiden t af Legemet tilbagelagte Vej, saa kan man, for at bestemme Forbindelsen mellem s og t, dele Tiden t i n (overmaade mange) lige Dele, hver $= \tau$, og indtil videre tænke sig, at Kraften virker stødvis, saaledes at den ved Begyndelsen af hver Tidsdel τ meddeler Legemet den samme Tilvækst i Hastighed. Kaldes den ved Begyndelsen af den første Tidsdel τ meddelte Hastighed γ, saa har man $v = n\gamma$.

Den Vej, som tilbagelægges i første Tidsdel, bliver $= \gamma\tau$
— — — — - anden — — $= 2\gamma\tau$
— — — — - tredie — — $= 3\gamma\tau$
. . . .
. . . .
— — — — - nte — — $= n\gamma\tau$

Følgelig har man $s = \gamma\tau + 2\gamma\tau + 3\gamma\tau + \ldots\ldots\ldots n\gamma\tau = (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots n)\,\gamma\tau = (n+1)\,\frac{n}{2}\,\gamma\tau = \frac{n^2\gamma\tau}{2} + \frac{n\gamma\tau}{2} = \frac{n^2\gamma\tau}{2} + \frac{n^2\gamma\tau}{2n}$. Da nu $v = n\gamma$ og $t = n\tau$, faar man $s = \frac{vt}{2} + \frac{vt}{2n}$. Men da Kraften egentlig virker stadigt, og ikke stødvis, maa man i dette Udtryk sætte $n = \infty$, hvorved Leddet $\frac{vt}{2n}$ forsvinder, og man faar $s = \frac{vt}{2}$. (II)

Elimineres v og t af Ligningerne I og II, faaes

$$s = \frac{pt^2}{2} \text{ (III) og } s = \frac{v^2}{2p} \text{ (IV).}$$

§ 8.

For den med Hastigheden c begyndende jævnt accelererende Bevægelse har man, naar Bogstaverne beholder samme Betydning som i

§ 7, $v = c + pt$ (I), og, da Vejen ct svarer til den uforanderlige Hastighed c og Vejen $\frac{pt^2}{2}$ til Accelerationen p, $s = ct + \frac{pt^2}{2}$ (II). Bortskaffer man p af begge Ligninger, faar man $s = \frac{c + v}{2}\ t$ (III), og bortskaffes t, saa faaes $s = \frac{v^2 - c^2}{2p}$ (IV).

§ 9.

For den med Hastigheden c begyndende jævnt retarderende Bevægelse gjælder Formlerne:

$$v = c - pt \text{ (I)}, \quad s = ct - \frac{pt^2}{2} \text{ (II)},$$

$$s = \frac{c + v}{2} \cdot t \text{ (III)}, \quad s = \frac{c^2 - v^2}{2p} \text{ (IV)},$$

som fremgaar af Ligningerne i § 8, naar man der sætter p negativ.

Sætter man i den første Formel $v = o$, saa faar man $pt = c$ og deraf $t = \frac{c}{p}$ = den Tid, som forløber indtil Hastigheden bliver Nul; indsætter man denne Værdi for t i Ligningen II, saa faar man den af Legemet i denne Tid tilbagelagte Vej at være $= \frac{c^2}{2p}$.

§ 10.

Ethvert understøttet og hvilende Legeme falder lodret ned mod Jordens Overflade, naar Understøtningen borttages. Den Kraft, som bevirker dette Fald, kaldes Tyngdekraften.

Jordiske Legemers frie Fald i lufttomt Rum afgiver det vigtigste Exempel paa en jevnt accelererende Bevægelse. Den Hastighed, som Tyngdekraften har meddelt et frit Legeme, naar den alene har virket paa samme i et Sekund, med andre Ord, Faldets Acceleration, betegnes gjerne med Bogstavet g og har Middelværdien 31,25 Fod eller 9,81 Metre. Indsættes en af disse Værdier i følgende af § 7 udledede Formler:

$$v = gt, \quad s = g\frac{t^2}{2}, \quad s = \frac{v^2}{2g}, \quad v = \sqrt{2gs},$$

saa faar man i Norsk eller Fransk Maal besvaret de Spørgsmaale, som kan gjøres med Hensyn til jordiske Legemers frie Fald; dettes Forholde for en given Tid oplyses af følgende Tabel:

Tid i Sekunder . . .	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Hastighed	0	1g	2g	3g	4g	5g	6g	7g	8g	9g	10g
Vej	0	$1\frac{g}{2}$	$4\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$	$16\frac{g}{2}$	$25\frac{g}{2}$	$36\frac{g}{2}$	$49\frac{g}{2}$	$64\frac{g}{2}$	$81\frac{g}{2}$	$100\frac{g}{2}$
Differentser	0	$1\frac{g}{2}$	$3\frac{g}{2}$	$5\frac{g}{2}$	$7\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$	$11\frac{g}{2}$	$13\frac{g}{2}$	$15\frac{g}{2}$	$17\frac{g}{2}$	$19\frac{g}{2}$

Denne Tabels sidste Horisontalrad angiver de Veje, som frit faldende Legemer tilbagelægger i de enkelte Sekunder.

Tillæg. Foregaar et Legemes frie Fald med en vis Begyndelseshastighed c, saa har man følgende Formler for dets Bevægelse: $v = c + gt = c + 31{,}25\ t$, ogsaa $v = \sqrt{c^2 + 2gs} = \sqrt{c^2 + 62{,}5s}$. $s = ct + g\frac{t^2}{2} = ct + 15{,}625\ t^2$,

$$\text{ogsaa } s = \frac{v^2 - c^2}{2g} = 0{,}016\ (v^2 - c^2).$$

Kastes derimod et Legeme lodret i Vejret med Hastigheden c, saa har man

$$v = c - gt, \text{ ogsaa } v = \sqrt{c^2 - 2gs}\ .$$

$$s = ct - g\frac{t^3}{2}, \text{ ogsaa } s = \frac{c^2 - v^2}{2g}\ .$$

Betragter man en given Hastighed c som en ved frit Fald erholdt Endehastighed, saa kalder man det tilsvarende Faldrum $\frac{c^2}{2g} = 0{,}016\ c^2$ **Hastighedshøjden.**

§ 11.

Bevæges et og samme Legeme i Tiden t i samme Retning med Hastighederne c_1 og c_2 og desuden med Accelerationerne p_1 og p_2, saa bliver de tilsvarende Veje c_1t, c_2t, $p_1\frac{t^2}{2}$, $p_2\frac{t^2}{2}$, hvoraf sees, at Legemet i nævnte Tid vil tilbagelægge Vejen $s = (c_1 + c_2)\ t + (p_1 + p_2)\ \frac{t^2}{2}$. Sætter man her $c_1 + c_2 = c$ og $p_1 + p_2 = p$, saa faar man $s = ct + p\frac{t^2}{2}$.

§ 12.

Har et Legeme paa en Gang to i Retning afvigende Bevægelser, saa antager det en mellem begge liggende Retning. Man finder Stedet O (Fig. 2), som et i Retningerne AX og AY paa en Gang bevæget Legeme indtager efter Forløbet af en vis Tid (t), at være det fjerde Hjørne O af et Parallelogram, som konstrueres af de i samme Tid tilbagelagte Veje AM = x og AN = y samt Vinkelen XAY, der angiver Bevægelsesretningernes Afvigning. Rigtigheden af denne Fremgangsmaade beror paa § 3, 2.

§ 13.

Foregaar begge Bevægelser i Retningerne AX (Fig. 3) og AY ensformigt og med Hastighederne c_1 og c_2, saa ere de om Tiden t tilbagelagte Veje: $x = c_1\, t$ og $y = c_2\, t$; Forholdet $\frac{y}{x} = \frac{c_2}{c_1}$ er altsaa til enhver Tid det samme, hvilken Ejendommelighed allene tilkommer den r e t t e Linie AO. Heraf følger altsaa, at den af begge Bevægelser fremkommende Bevægelse foregaar i en ret Linie. Konstruerer man videre af Hastighederne $c_1 = AB$ og $c_2 = AC$ Parallelogrammet ABCD, saa angiver dettes Hjørne D Stedet, hvor det bevægede Legeme befinder sig ved Enden af det første Sekund. Men da den fremkommende Bevægelse er retliniet, saa følger, at denne altid foregaar efter Diagonalen i det af Hastighederne konstruerede Parallelogram. Sætter man nu den i Tiden t Sekunder tilbagelagte Vej $AO = s$, saa har man $\frac{s}{x} = \frac{AD}{AB}$, hvoraf findes $s = \frac{x\,.\,AD}{AB} = \frac{c_1\, t\,.\,AD}{AB} = \frac{c_1\, t\,.\,AD}{c_1} = AD.\, t$. Af denne Ligning følger, at Bevægelsen selv er ensformig (§ 4, 1) og at Diagonalen AD forestiller dens Hastighed. ABCD kaldes Hastighedernes Parallelogram, de enkelte Hastigheder (c_1 og c_2) kaldes Komponenter eller Sidehastigheder, og den af dem sammensatte Hastighed (AD), hvormed Bevægelsen virkelig foregaar, den resulterende Hastighed.

Man kan ogsaa ved Triangel-Regning bestemme den af to Sidehastigheder $AB = c_1$ (Fig. 4) og $AC = c_2$ resulterende Hastigheds Størrelse og Retning, naar man kjender den Vinkel α, som de danner med hinanden. Betegnes nemlig den resulterende Hastighed AD med Bogstavet c, saa har man $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2 \cos.\, \alpha}$; den Vinkel $BAD = \varphi$, som den resulterende Hastigaed danner med Sidehastigheden c_1, kan bestemmes ved de bekjendte Udtryk $\sin.\, \varphi = \frac{c_2 \sin \alpha}{c}$ eller $\text{tang.}\, \varphi = \frac{c_2 \sin \alpha}{c_1 + c_2 \cos \alpha}$.

T i l l æ g. Enhver given Hastighed kan ansees som en Resulterende af to Sidehastigheder. Kjender man f. Ex. Vinklerne $DAB = \varphi$ og $DAC = \psi$, som de søgte Sidehastigheder skal danne med deu givne Hastighed c, saa trækker man gjennem Endepunktet D af den rette Linie AD, som forestiller c, Linien DC ǂ Retningen AX og DB ǂ Retningen

AY, og faar da formedelst Skjæringspunkterne C og B bestemt Sidehastighederne $AC = c_2$ og $AB = c_1$.

§ 14.

Af to jævnt accelererende med Nul Hastighed begyndende Bevægelser fremkommer en jævnt accelererende Bevægelse i en ret Linie. Er p_1 og p_2 Accelerationerne af de i Retningerne AX (Fig. 3) og AY foregaaende Bevægelser, saa ere de ved samme i Tiden t tilbagelagte Veje $AM = x = \frac{p_1 t^2}{2}$ og $AN = y = \frac{p_2 t^2}{2}$, og Forholdet $\frac{y}{x} = \frac{p_2}{p_1}$ til enhver Tid det samme; heraf følger, at ogsaa den af to jævnt accelererende Bevægelser fremkommende Bevægelse foregaar efter en ret Linie. Gjør man $p_1 = AB$ og $p_2 = AC$, saa faar man Ligedannethed og altsaa $\frac{AO}{AD} = \frac{AM}{AB} = \frac{\frac{1}{2} p_1 t^2}{p_1} = \frac{1}{2} t^2$, hvoraf $AO = \frac{1}{2} AD. t^2$. Af denne Ligning følger, at den fremkommende Bevægelse selv er jævnt accelererende (§ 7, III) og at Diagonalen AD forestiller dens Acceleration. ABCD kaldes i dette Tilfælde Accelerationernes Parallelogram.

§ 15.

Af en ensformig og en jævnt accelererende Bevægelse fremkommer en ujævn foranderlig Bevægelse, naar ikke begges Retninger falder sammen. I en vis Tid t tilbagelægges med Hastigheden c i Retningen AY (Fig. 5) Vejen $AN = y = ct$, og i samme Tid med Accelerationen p i Retningen AX, som vi vil antage lodret paa AY, Vejen $AM = x = \frac{pt^2}{2}$; vedkommende Legeme vil da ved Enden af denne Tid befinde sig i Hjørnet O af det Parallelogram, som er konstrueret af $y = ct$ og $x = \frac{pt^2}{2}$. Ved Hjælp af disse Formler kan man vistnok til enhver Tid finde Legemets Sted; men dette ligger ikke længere bestandig i en og samme rette Linie, thi tager man Værdien $t = \frac{y}{c}$ og indsætter i den anden Ligning, saa faar man $x = \frac{py^2}{2c^2}$. Herefter forholder altsaa Vejene (x) i den ene Bevægelsesretning sig ikke som Vejene (y) i den anden, men som disse Sidstes Kvadrater, og derfor gaar Legemet ikke efter en ret men efter en krum Linie, i dette Tilfælde Parabolen.

Til fuldstændig Kundskab om den af Hastighed og Acceleration fremkommende foranderlige Bevægelse hører at kunne angive dens Retning, Hastighed og Vej til enhver Tid (t). Befinder et Legeme, som bevæges i Retningen AY (Fig. 6) med Hastigheden c og i Retningen AX med Accelerationen p, sig efter t Sekunder ved O, saa er dets Hastighed paa dette Sted sammensat af Hastighederne c og pt. Gjøres altsaa OQ $=$ c og OP $=$ pt, saa forestiller Diagonalen OR den ved O resulterende Hastighed, og kaldes denne v, saa har man $v = \sqrt{c^2 + p^2t^2}$. Tangenten OR angiver Retningen, hvori Legemet ved denne Tid vil bevæge sig for et Øieblik, hvilken Retning kan bestemmes ved Ligningen tang POR $= \frac{OQ}{OP} = \frac{c}{pt}$.

Den højere Geometri lærer, hvorledes man kan finde Længden af den tilbagelagte Vej AO.

Vi har hidtil antaget, at de oprindelige Bevægelsesretninger indesluttede en ret Vinkel, og skal nu betragte det Tilfælde, at Accelerationens Retning afviger under en vilkaarlig Vinkel fra Hastighedens. Har Legemet Hastigheden c i Retningen AY_1 (Fig. 7) og Accelerationen p i Retningen AX_1, som med AY_1 danner Vinkelen $X_1 AY_1 = \alpha$, saa bevæger det sig vistnok i en Parabol, men A bliver ikke dens Toppunkt og AX_1 ikke dens Akse. Hastigheden c, som kan forestilles ved en Linie AD, kan opløses i Sidehastighederne AF $=$ c. sin. α og AE $=$ c. cos. α. Antages nu, at Legemet, naar det paa engang paavirkes af Hastigheden c. sin α og den paa samme lodrette Acceleration p, behøver Tiden t for at naa fra Parabolens Toppunkt (C) til Bevægelsens egentlige Begyndelsespunkt A, saa maa man sætte c. cos α $=$ pt, følgelig $t = \frac{c. \cos \alpha}{p}$, og man faar AB $= c. \sin \alpha. t = \frac{c^2 \sin \alpha. \cos. \alpha}{p} = \frac{c^2 \sin. 2\alpha}{2p}$ og BC $= \frac{pt^2}{2} = \frac{c^2 \cos^2 \alpha}{2p}$.

Har man formedelst disse Afstande fundet Beliggenheden af Parabolens Toppunkt C, saa kan man ved at gaa ud derfra finde Legemets Sted O for hvilkensomhelst Tid.

§ 16.

Forener man flere Hastigheder og flere uforanderlige Accelerationer, saa fremkommer en parabolisk Bevægelse, thi man kan forene saavel Hastighederne som Accelerationerne saaledes, at man kun faar en Hastighed og en Acceleration at gjøre med.

Ere Accelerationerne foranderlige, saa kan det være tilladt, at anse dem som uforanderlige i en meget liden Tidsdel. Forener man nu den for et Øjeblik resulterende Acceleration med den givne Hastighed, saa kan man finde en liden Parobolbue, hvori Bevægelsen foregaar i den meget lille Tidsdel. Bestemmes derpaa for det følgende Øjeblik igjen Hastigheden og den resulterende Acceleration, saa kan man finde et nyt Buestykke, som tilhører en anden Parabol, og ved at vedblive saaledes, vil man tilnærmelsesvis kunne bestemme Banen.

§ 17.

Ethvert lidet Buestykke af hvilkensomhelst Kurve kan ansees som en Cirkelbue. Den Cirkel, som tilhører denne, kaldes **Krumningscirkel** og dens Radie **Krumningsradie**.

En Formel for Krumningsraadien til et bevæget Legemes Bane kan udledes paa følgende Maade.

$AM = x$ (Fig. 8) være en meget liden i den meget lille Tidsdel τ med den uforanderlige Acceleration p tilbagelagt Vej i Retningen AX, saa har man $x = \frac{p\tau^2}{2}$; fremdeles være $AN = y$ en meget liden i samme Tidsdel med Hastigheden c tilbagelagt Vej i Retningen AY, saa har man $y = c\tau$. Et fra A udgaaende Legeme, som meddeles begge de antydede Bevægelser, vil da ved Enden af Tidsdelen τ befinde sig i det ved Parallelogramet $AMNO$ bestemte Punkt O. Nu lægger man AC lodret mod AY og søger i hin Linie et Punkt C, der kan tjene til Centrum for den lille Cirkelbue, som lader sig beskrive mellem A og O. Paa Grund af denne Bues ringe Størrelse, kan man uden at begaa mærkelig Fejl i Regningen betragte Vinkelen NPO som en ret Vinkel. Man faar da $OP = ON.\ \sin.\ XAY = \frac{p\tau^2}{2}.\ \sin\alpha$ medens Tangenten $AP = AN + NP = c\tau + \frac{p\tau^2}{2}.\ \cos\alpha = (c + \frac{p\tau}{2}\cos\alpha)\tau$ lader sig sætte $= c\tau$, fordi Størrelsen $\frac{p\tau}{2}\cos\alpha$ er saa liden, at den hverken gjør fra eller til paa c. Nu har man fremdeles $AP^2 = PO \times (PO + 2CO)$ eller, da PO forsvinder mod $2CO$, $AP^2 = PO \times 2CO$. Sætter man endelig den søgte Krumningsradie $CA = r$, saa har man

$$CA = CO = r = \frac{AP^2}{2PO} = \frac{c^2\tau^2}{p\tau^2 \sin.\alpha} = \frac{c^2}{p.\ \sin\alpha}.$$

§ 18.

Gaar en Bevægelse fra et Sted A (Fig. 9), hvor Accelerationens Retning AC er lodret mod Hastighedens Retning AY, er altsaa Vinkelen $\alpha = 90^0$, saa har man paa dette Sted Krumningsradien $CA = r = \frac{c^2}{p}$. Hastigheden (v) i det nærliggende Punkt O er sammensat af c og $p\tau$, altsaa $v = \sqrt{c^2 + p^2\tau^2} =$

$$\sqrt{c^2 + p^2\tau^2 + \left(\frac{p^2\tau^2}{2c}\right)^2} = c + \frac{p^2\tau^2}{2c}$$, fordi τ kan antages uendelig liden medens derimod c og p maa forudsættes at være endelige Størrelser. Skriver vi $v = c + \frac{p^2}{2c}\tau \,.\, \tau$, saa kan vi anse $\frac{p^2\tau}{2c}$ som Acceleration og $\frac{p^2\tau}{2c} \,.\, \tau$ som den til samme svarende Forandring i Hastighed. Da imidlertid τ er uendelig liden, saa er ogsaa Accelerationen $\frac{p^2\tau}{2c}$ uendelig liden, man har altsaa i et Sekund kun en uendelig liden Forandring i Hastighed, og kan følgelig anse Bevægelsen som ensformig, d. e. sætte $v = c$.

Forandrer Accelerationens Retning sig med Bevægelsens Retning, saaledes at hin uophørlig stiller sig lodret mod denne, saa bliver v bestandig $= c$. Man kalder en saadan sig bestandigt mod Bevægelsesretningen lodret stillende Acceleration Normalacceleration, og forstaar altsaa ifølge det Anførte, at denne for sig alene ikke kan forandre en Bevægelses Hastighed, men kun afvige den fra den rette Linie. Af Formelen $r = \frac{c^2}{p}$ findes Normalaccelerationen $p = \frac{c^2}{r}$.

Ved Cirkelen beholder Krumningsradien (r) bestandig samme Størrelse; derfor er ved Bevægelse i en Cirkel Accelerationen $p = \frac{c^2}{r}$ uforanderlig. Omvendt sluttes, at en uforanderlig Acceleration, som bestandig afviger et Legeme retvinklet fra dets indehavende Bevægelsesretning, bevirker Omdrejning i en Cirkel.

§ 19.

Naar to Legemer samtidigt bevæges i afvigende Retninger, foregaar der en idelig Forandring med deres gjensidige Beliggenhed og Afstand. Det ene Legeme begynde sin Bevægelse i A (Fig. 10) og det andet i B; hint rykke i en given Tid i Retningen AX til M, dette i Retningen BY i samme Tid til N; drager vi nu MN, saa erholdes i denne Linie de to Legemers relative Beliggenhed og Afstand ved Enden af den givne Tid. Gjøres AO ǂ og = MN, saa vil Linien AO ligeledes angive Legemernes gjensidige Beliggenhed. Drages endvidere ON, saa faar man et Parallelogram, og altsaa ON = AM. Gjøres endelig BQ ǂ og = NO og drages OQ, saa faaes et et nyt Parallelogram BNOQ, hvori Siden BN er det andet Legemes absolute Vej, Siden BQ det første Legemes i modsat Retning tilbagelagte Vej, og Hjørnet O det andet Legemes relative Sted med Hensyn til det førstes.

Man finder altsaa et bevæget Legemes (B) relative Sted O med Hensyn til en anden Bevægelses Udgangspunkt, naar man foruden dets egen Bevægelse (BN) ogsaa tillægger det hin anden Bevægelse (AM) i modsat Retning (BQ) og derpaa sammensætter disse Bevægelser til en eneste.

Andet Kapitel.

Om Maal for Kræfter samt om de fysiske Legemer ialmindelighed.

§ 20.

Det, som opfylder et fysisk Legemes Rum, kaldes Materie (matter); Mængden af Materie i et Legeme kaldes dets Masse (masse).

En Masse, som paavirkes af en Kraft, vil udøve et Tryk (pressure) paa en Flade, som stilles lodret mod Bevægelsesretningen. Da ligestore Virkninger forudsætter ligestore Aarsager, saa ere to Kræfter ligestore, naar de under samme Omstændigheder frembringer ligestore Tryk. En Kraft P er dobbelt saa stor som en anden Kraft Q, naar hin under samme Omstændigheder udøver et dobbelt saa stort Tryk som denne, og i Almindelighed er en Kraft R n Gange saa stor som en Kraft S, naar R under samme Omstændigheder udøver n Gange saa stort Tryk som S.

Med Hensyn til Forholdet mellem Masse, Kraft og Bevægelse lærer Erfaring, at naar Masser ere ligestore, saa forholder de paa dem virkende uforanderlige Kræfter sig som de frembragte Accelerationer, samt at, naar uforanderlige Kræfter meddeler forskjellige Masser ligestore Accelerationer, saa forholder Kræfterne sig som Masserne; med andre Ord: For at meddele en given Masse en a dobbelt Acceleration udkræves en a dobbelt Kraft, og for at meddele en given Acceleration til en m dobbelt Masse udfordres en m dobbelt Kraft.

Vælger man en vilkaarlig Mængde Masse til Enhed for Massen og man ved T_1 (Trykket) forstaar Virkningen af en Kraft P_1, som meddeler Masseenheden en Acceleration lig 1 (Fod, Meter), ved T_2 Virkningen af en Kraft P_2, som meddeler Massen M Accelerationen 1, og endelig ved T Virkningen af en Kraft P, som meddeler Massen M Accelerationen p, saa har man $P_2 = M P_1$ og $P = p P_2 = p M P_1$. Antager man nu P_1 som Kraftenhed, saa haves $P = p M$. (I)

Da Aarsagerne (Kræfterne) maa forholde sig som Virkningerne (Trykkene), har man ogsaa $T_2 = M T_1$ og $T = p T_2 = p M T_1$. Antager man som Trykenhed det Tryk, som frembringes af P_1, saa faar man følgende Udtryk for Virkningen af den Kraft P, som meddeler Massen M Accelerationen p, $T = p M$.

Ved et Legemes Vægt forstaar man det Tryk, som dets Masse formedelst Tyngdekraften *) udøver mod et horisontalt Underlag. Betegner V Vægten af et Legeme, hvis Masse er M, og som af Tyngdekraften meddeles Accelerationen g, saa har man ifølge det Foregaaende $V = g M$ d. e. et Legemes Vægt er lig Produktet af dets Masse og dets af Tyngdekraften meddelte Acceleration. Omvendt er $M = \frac{V}{g}$ (II) d. e. et Legemes Masse er lig dets Vægt divideret med dets af Tyngdekraften meddelte Acceleration.

§ 21.

Erfaring lærer, at alleslags Legemer i lufttomt Rum og under samme geografiske Brede falder til Jorden med samme Acceleration. Er et Legemes Vægt V og dets Masse M, et andet Legemes Vægt V_1 og dets Masse M_1, saa har man efter § 20

$$\begin{array}{rcl} V & = & g M \\ V_1 & = & g M_1 \\ \hline V : V_1 & = & M : M_1 \end{array}$$

d. e. to Legemers Masser forholder sig som deres Vægter.

§ 22.

Et Legeme siges at have en større eller mindre Tæthed (density), eftersom det indenfor et givet Rumfang har en større eller mindre Mængde Materie. Det naturlige Maal for Tætheden er den Masse, som udfylder Enheden for Rumfanget; da imidlertid Massen kun lader sig maale ved Vægter, saa tjener Vægten af en Rumfangsenhed, f. Ex. af en Kubikfod, af et Legeme som Maal for dets Tæthed. Herefter er f. Ex. Vandets Tæthed = 62 (Pund), da 1 Kubikfod Vand vejer 62 Pund, og Raajernets Tæthed = 432 (Pund), da 1 Kubikfod Raajern vejer 432 Pund.

*) Det bemærkes, at vi ovenfor har tænkt os Kræfterne som uforanderlige, og at vi, naar Talen i det Efterfølgende er om Kræfter uden nærmere Betegnelse, derved altid ville forstaa uforanderlige Kræfter.

Af et Legemes Rumfang R og dets Tæthed δ følger dets Vægt: $V = R\,\delta$.

§ 23.

Ved et Legemes specifike Vægt forstaar man ialmindelighed det Tal, hvormed dets Tæthed maa udtrykkes, naar Vandets Tæthed udtrykkes med 1.

For ikke at forvekšle et Legemes specifike Vægt med den Vægt, som tilkommer forskjellige Rumfang deraf, plejer man at kalde den sidste absolut Vægt.

Følgende Tabel angiver den specifike Vægt af nogle hyppigt forekommende Stoffer:

Alun	1,720	Kalk, brændt	1,842
Asphalt	1,104	Kobber, støbt	8,897
Bly	11,389	Kogsalt	2,078
Granit	2,5 til 3 063	Kvarts	2,654
Is	0,926	Sukker, hvidt	1,606
Jern, smid	7,778	Vinaand	0,792

§ 24.

Legemerne viser sig for os i forskjellige Tilstande, som vi kalder Aggregattilstande, og som beror paa den forskjellige Sammenhæng mellem deres Dele. De ere enten faste (rigid) eller draabbarflydende (liquid) eller luftformige (aëriform). Faste Legemer ere saadanne, hvis mindste Dele hænger saa fast sammen, at man maa anvende en vis Kraft for at forandre deres Form. Draabbarflydende Legemer ere saadanne, hvis Dele ved Anvendelsen af den ringeste Kraft kan forskydes over hverandre. Luftformige Legemer ere saadanne, hvis Dele altid viser en Bestræbelse efter at fjerne sig mere og mere fra hverandre.

Medens de faste Legemer har en ejendommelig Form og et bestemt Rumfang, besidder de draabbarflydende kun et bestemt Rumfang uden ejendommelig Form; de luftformige Legemer mangler begge Dele.

De vigtigste paa Legemerne virkende mekaniske Kræfter ere følgende:

1) Tyngdekraften, formedelst hvilken alle Legemer søger at nærme sig Jordens Midtpunkt.
2) Muskelkraften.
3) Elasticiteten, som Legemerne yttrer, naar deres Form eller Rumfang forandres.
4) Varmekraften, formedelst hvilken Legemerne udvider eller sammentrækker sig ved Temperaturvekšel.
5) Magnetkraften eller Magnetens tiltrækkende og frastødende Kraft.

6) **Kohæsionskraften**, som er den Kraft, hvorved et Legemes Dele hænger sammen, og hvormed de altsaa modstaar en Adskillelse.
7) **Adhæsionskraften**, hvormed to i nær Berøring bragte Legemer tiltrækker hinanden.

Man kan inddele Mekaniken i følgende Afsnit:
1) De faste Legemers Mekanik (mechanics of rigid bodies).
2) De draabbarflydende Legemers Mekanik (hydraulic), som behandler Ligevægt og Bevægelse hver for sig.
3) De luftformige Legemers Mekanik (mechanics of elastic fluids), som ligeledes behandler Ligevægt og Bevægelse hver for sig.

Förste Afsnit.

Faste Legemers Mekanik.

Første Kapitel.

Det materielle Punkts Bevægelse.

§ 25.

Et materielt Punkt er et Legeme, hvis Udstrækninger til alle Sider ere uendeligt smaa i Sammenligning med dets tilbagelagte Vej. Et endeligt Legeme kan betragtes som en Sammensætning af uendeligt mange materielle Punkter. Naar et Legemes Punkter bevæger sig med samme Hastighed i rette Linier, som indbyrdes ere parallele, saa kan man anvende Læren om det materielle Punkts Bevægelse paa det hele Legemes, fordi det i dette Tilfælde lader sig antage, at ligestore Massedele af Legemet paavirkes af ligestore Kraftdele.

§ 26.

Er p Accelerationen, hvormed en Masse M bevæges af en Kraft P, saa har man ifølge § 20:

$$P = M p \text{ og omvendt } p = \frac{P}{M}$$

Sættes fremdeles $M = \frac{V}{g}$, hvor V betyder Legemets Vægt og g Tyngdekraftens Acceleration, saa faar man

$$P = \frac{p}{g} V \text{ og } p = \frac{P}{V} g.$$

Man finder altsaa den Kraft (P), som bevæger et Legeme med en given Acceleration (p), naar man multiplicerer dets Vægt (V) med Forholdet $\left(\frac{p}{g}\right)$ mellem dets og Tyngdekraftens Acceleration.

Omvendt finder man den Acceleration (p), hvormed et Legeme bevæges af en given Kraft (P), naar man multiplicerer Tyngdekraftens Acceleration (g) med Forholdet $\left(\frac{P}{V}\right)$ mellem Kraften og Legemets Vægt.

§ 27.

Virker en uforanderlig Kraft paa et Legeme, som har en Hastighed c, saa opstaar der en jævnt accelererende Bevægelse, dersom Kraften virker til samme Side som Hastigheden; virker derimod Kraften til den modsatte Side, saa bliver Legemets Bevægelse jævnt retarderende. Indsætter man i Formlerne i § 8 og § 9 istedetfor p Værdien $\frac{P}{V}$ g, saa faar man følgende Udtryk:

I For jævnt accelererende Bevægelse:

1) $v = c + \frac{P}{V} g t$

2) $s = c t + \frac{P}{V} \frac{g t^2}{2}$

II For jævnt retarderende Bevægelse:

1) $v = c - \frac{P}{V} g t$

2) $s = c t - \frac{P}{V} \frac{g t^2}{2}$

§ 28.

En Kraft siges at arbejde, naar den overvinder en Modstand. Der udrettes altsaa et mekanisk Arbeide, naar et Legeme sættes i Bevægelse eller meddeles en større Hastighed (Trægheden overvindes); fremdeles, naar et Legeme hæves i Vejret (Tyngden overvindes), naar det knuses (Kohæsionen overvindes) o. s. v. Det udrettede Arbejde (work done) bedømmes saavel efter Størrelsen af den overvundne Modstand som efter Størrelsen af den Vej, som Kraftens Angrebspunkt tilbagelagde, medens den overvandt denne Modstand.

Har man løftet et Legeme i Vejret, saa er det udrettede Arbejde proportionalt saavel med Legemets Vægt som med den Højde, hvortil det er løftet; thi for at løfte f. Ex. 2 Pund til 1 Fods Højde udkræves dobbelt saa meget Arbejde som for at løfte 1 Pund til samme Højde, og for at løfte 1 Pund til 2 Fods-Højde udkræves dobbelt saa meget Arbejde som for at løfte 1 Pund til 1 Fods Højde. Saadan Proportionalitet finder Sted ved ethvert Slags mekanisk Arbejde, og vælger man nu til dettes Enhed det Arbejde, som maa udrettes for langs en Vej lig Længdeenheden at overvinde en uforanderlig Modstand lig Vægtenheden, saa faar man følgende almindelige Udtryk;

$$A = Ps \text{ Arbejdsenheder},$$

hvor P betegner Modstandens eller Kraftens Størrelse, s den under Modstandens Overvindelse af Kraften, eller rettere, af Kraftens Angrebspunkt tilbagelagte Vej, og A det udrettede Arbejde eller, som man ogsaa kan kalde det, Arbejdsmængden.

For nærmere at betegne Arbejdsenheden angiver man sædvanlig Enhederne i Faktorerne P og s og siger derfor istedetfor Arbejdsenheder Fodpund (Fpd) eller Meterkilogram (km), eftersom Vægt og Vej skal udtrykkes i Norsk eller Fransk Maal.

Ogsaa naar den Modstand, som skal overvindes, er foranderlig, lader Arbejdsmængden sig udtrykke som et Produkt af Kraft og Vej. Man kan nemlig isaafald reducere de forskjellige Modstande til en midlere Modstand og derpaa indføre dennes Værdi istedetfor P. Følgende grafiske Fremstilling vil oplyse dette. Naar Modstanden er uforanderlig, kan Arbeidsmængden udtrykkes som Arealet af en Rektangel ABCD (Fig. 11), hvis Grundlinie AB er den tilbagelagte Vej (s) og hvis Højde er den uforanderlige Kraft, som langs denne Vei har overvundet Modstanden. Er derimod Modstanden foranderlig, saa bliver Arbejdsmængden at udtrykke ved Arealet af en Figur ABCGD (Fig. 12), hvis Grundlinie AB er den tilbagetagte Vej og hvis Højde over ethvert Punkt af Grundlinien er lig den til ethvert saadant Punkt svarende Kraft. Forvandler man ABCGD til en Rektangel ABEF af samme Areal, saa udtrykker dennes Højde AF den midlere Kraft.

T i l l æ g. For at finde Værdien af den midlere Kraft, som behøves for at overvinde en foranderlig Modstand, kan maa gaa frem paa følgende Maade: Den Vej, langs hvilken den foranderlige Mod-

3

stand skal overvindes, være $s = AB$ (Fig. 13), den Kraft, som virker ved Vejens Begyndelsespunkt A være P_0 og den Kraft, som virker ved Vejens Ende, være P_n. Vejen deles i n (jo flere desbedre) lige store Stykker $AE = EG = GP$ o. s. v. og ved disses Endepunkter afsættes de forskjellige der virkende Kræfter $P_1 = EF$, $P_2 = GH$ o. s. v. Dersom nu DF, FH o. s. v. kan betragtes som rette Linier, saa erholder man den midlere Kraft

$P = \frac{\frac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + \ldots \frac{1}{2} P_n}{n}$ og altsaa det af denne

udrettede Arbeide $Ps = (\frac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + \ldots . \frac{1}{2} P_n) \frac{s}{n}$.

Exempel. En Hest har draget en Vogn 100 Fod frem og anvendte i Begyndelsen Kraften $P_0 = 110$ Pund, efter Tilbagelæggelsen af 25 Fod Kraften 122 Pund, efter Tilbagelæggelsen af 50 Fod 127 Pund, af 75 Fod 120 Pund og af 100 Fod 114 Pund. Hvor stort er det udrettede Arbejde? Her bliver Middelkraften $P = (\frac{1}{2} . 110 + 122 + 127 + 120 + \frac{1}{2} . 114) : 4 = 120{,}25$ Pund og Arbejdsmængden $Ps = 120{,}25 \times 100 = 12025$ Fpd.

§ 29.

Det mekaniske Arbejde, som udkræves for at faa en Masse, som har Hastigheden c, til at antage en større Hastighed v, findes ved i § 8, IV istedetfor Accelerationen p at indsætte dens Værdi $\frac{P}{V}$ g

(§ 26); herved finder man Udtryttet $Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) V$, eller, naar

man betegner Hastighedshøjderne $\frac{v^2}{2g}$ og $\frac{c^2}{2g}$ ved h og h_1:

$$Ps = (h - h_1) V.$$

Man kan altsaa sige, at den Arbeidsmængde (Ps), som en Masse enten optager i sig, naar den gaar over fra en mindre Hastighed (c) til en større (v), eller giver fra sig, naar den tvinges til at gaa over fra en større Hastighed til en mindre, er lig denne Masses Vægt (V) multipliceret med Differentsen mellem de til begge Hastigheder svarende Hastighedshøjder. Har man f. Ex. en Vogn, 4000 Pund vægtig, staaende paa en fuldkommen glat Bane og man vil meddele den 30 Fods Hastighed, saa udkræves hertil Arbejdsmængden $Ps = \frac{v^2}{2g} V$ $= 0{,}016 \times 900 \times 4000 = 57600$ Fodpund; og ligesaameget Arbejde vil denne Vogn udrette, naar man ved en Modstand tvinger den til at gaa over i Hvile.

Produktet af Masse $M = \frac{V}{g}$ og Hastighedens Kvadrat (v^2), altsaa Mv^2, har man vedtaget at kalde den bevægede Masses levende Kraft (vis viva), og man kan altsaa sige, at den Arbejdsmængde, som en bevæget Masse har opsamlet i sig, er lig dens halve levende Kraft.

Tillæg. Arbejdsformelen $Ps = (h - h_1) V$ gjælder ikke alene for uforanderlige, men ogsaa for foranderlige Kræfter, naar man kun efter § 28 indfører en midlere Værdi for P; thi tænker man sig Bevægelsens hele Vej (s) bestaaende af n (mangfoldige) ligestore med jævnt accelererende Bevægelser tilbagelagte Stykker $\left(\frac{s}{n}\right)$, saa erholder man langs disse Arbejdsmængderne

$$P_1 \frac{s}{n} = \frac{v_1^2 - c^2}{2g} V,$$

$$P_2 \frac{s}{n} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} V,$$

$$P_3 \frac{s}{n} = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2g} V$$

o. s. v., naar v_1, v_2, v_3 o. s. v. betegner de ved Vejstykkernes Ender opnaaede Hastigheder. Adderes disse Arbejdsmængder, saa faar man den Arbejdsmængde, som behøves for at ombanne Massens Hastighed c til v, udtrykt paa følgende Maade:

$$Ps = \left(\frac{P_1 + P_2 + P_1 + \ldots}{n}\right) s = \frac{v^2 - c^2}{2g} V.$$

§ 30.

En Kraft siges at være Resultanten af flere andre Kræfter, naar den alene udøver samme Virkning paa et Legeme som disse andre Kræfter, der kaldes Komponenter, udøver i Forening.

Virker 2 Kræfter P_1 og P_2 paa et Legeme i samme eller modsat Retning, saa er deres Resultant P lig Summen eller Differentsen af dem. Meddeler nemlig disse Kræfter Massen M Accelerationerne p_1 og p_2, saa er $p_1 = \frac{P_1}{M}$ og $p_2 = \frac{P_2}{M}$, følgelig den resulterende Acceleration $p = p_1 \pm p_2 = \frac{P_1 \pm P_2}{M}$ og altsaa den til samme svarende Kraft $P = Mp = P_1 \pm P_2$.

Angribes et materielt Punkt, hvis Masse er M (Fig. 14) af to

Kræfter P_1 og P_2, hvis Retninger MX og MY indeslutter en Vinkel XMY $= \alpha$, saa frembringes langs disse Retninger Accelerationerne $p_1 = \frac{P_1}{M}$ og $p_2 = \frac{P_2}{M}$, af hvis Forening der opstaar en resulterende Acceleration i Retningen MZ (§ 14). Kaldes den resulterende Acceleration p og er φ den Vinkel, som dens Retning danner med MX, saa har man p og φ bestemte ved Ligningerne

$$p = \sqrt{p_1{}^2 + p_2{}^2 + 2p_1\,p_2 \cos.\,\alpha}, \quad \sin.\,\varphi = \frac{p_2 \sin.\,\alpha}{p}.$$

Indsættes her de ovenanførte Værdier for p_1 og p_2, saa faar man

$$p = \sqrt{\left(\frac{P_1}{M}\right)^2 + \left(\frac{P_2}{M}\right)^2 + 2\left(\frac{P_1}{M}\right)\left(\frac{P_2}{M}\right)\cos.\,\alpha} \quad \text{og}$$

$$\sin.\,\varphi = \left(\frac{P_2}{M}\right)\frac{\sin.\,\alpha}{p}.$$

Multiplicerer man den første Ligning med M, saa følger

$$M\,p = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2P_1\,P_2 \cos.\,\alpha} \text{ eller,}$$

da Mp er lig den til Accelerationen p svarende Kraft P,

$$P = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2P_1\,P_2 \cos.\,\alpha} \text{ og } \sin\,\varphi = \frac{P_2 \sin.\,\alpha}{P}.$$

Forestiller man Kræfterne ved rette Linier, som ere proportionale med deres Styrke, saa forestilles altsaa Resultanten af tvende paa et Punkt i afvigende Retninger virkende Kræfter saavel i Størrelse som Retning ved Diagonalen i det Parallelogram, som kan konstrueres af Komponenterne og den mellem samme liggende Vinkel. Dette Parallelogram kaldes Kræfternes Parallelogram.

Tillæg. Ve Hjælp af Kræfternes Parallelogram kan man ikke alene sammensætte to eller flere Kræfter til en eneste, men ogsaa opløse en given Kraft i to eller flere andre. Kjender man Vinklerne α og β, som to Komponenter $MP_1 = P_1$ og $MP_2 = P_2$ (Fig. 15) skal danne med en given Kraft $MP = P$, saa findes Komponenterne ved Formlerne $P_1 = \frac{P.\ \sin.\ \beta}{\sin\,(\alpha + \beta)}$, $P_2 = \frac{P \sin.\ \alpha}{\sin\,(\alpha + \beta)}$.

Er $\alpha + \beta = 90^0$, saa har man $P_1 = P \cos.\ \alpha$ og $P_2 = P \sin.\ \alpha$; er $\alpha = \beta$, faaes $P_1 = P_2 = \frac{P \sin.\ \alpha}{\sin 2\,\alpha} = \frac{P}{2 \cos.\ \alpha}$.

§ 31.

Resultanten P af flere i samme Plan paa et Punkt M (Fig. 16) virkende Kræfter P_1, P_2, P_3 o. s. v. findes nøjagtigst paa følgende Maade:

Man opløser enhver af de givne Komponenter i Kræfter Q_1 og R_1, Q_2 og R_2 o. s. v., som virker paa Punktet M langs to gjennem samme lodret mod hinanden stillede Axer $X\overline{X}$ og $Y\overline{Y}$, og adderer de i samme Axeretning faldende Kræfter algebraisk. Herved fremkommer to Kræfter Q og R, som virker paa M under en ret Vinkel, og hvis Resultant er den søgte Resultant P. Forstaar man ved α_1, α_2, α_3 o. s. v. Vinklerne P_1MX, P_2MX, P_3MX o. s. v., saa har man $Q_1 = P_1 \cos. \alpha_1$, $R_1 = P_1 \sin. \alpha_1$, $Q_2 = P_2 \cos. \alpha_2$, $R_2 = P_2 \sin. \alpha_2$ o. s. v., hvoraf følger, da $Q = Q_1 + Q_2 + \ldots.$,

1) $Q = P_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \cos. \alpha_2 + \ldots.$,

og, da $R = R_1 + R_2 + \ldots\ldots.$,

2) $R = P_1 \sin. \alpha_1 + P_2 \sin. \alpha_2 + \ldots.$

Heraf findes nu

3) $P = \sqrt{Q^2 + R^2}$ og

4) $\text{tang. } \varphi = \frac{R}{Q}$,

naar man ved φ forstaar den Vinkel, som Resultantens Retningslinie danner med $X\overline{X}$.

Ved Kræfternes algebraiske Addition maa man nøje mærke sig deres Fortegn, thi ere disse modsatte ved to Kræfter, d. e. drager disse Kræfter Angrebspunktet M til modsatte Sider, saa gaar Additionen som bekjendt over til en arithmetisk Subtraktion.

Tillæg. Ligger Kræfternes Retningslinier ikke i samme Plan, saa kan man lægge et Plan gjennem Angrebspunktet og opløse enhver Kraft i tvende, hvoraf den ene virker lodret mod Planet, medens den anden kommer til at virke i samme. De Kræfter, som man paa denne Maade faar virkende i Planet, forenes efter § 31 til en Resultant, som atter i Forening med den algebraiske Sum af de gjennem det fælles Angrebspunkt paa Planet lodret staaende Kræfter giver den endelige Resultant.

§ 32.

Virker Kræfterne P_1 og P_2 i samme Plan og man fra et vilkaarligt Punkt O (Fig. 17) i dette Plan fælder Perpendikulærer ON_1 og ON_2 paa Retningslinierne for Kræfterne P_1 og P_2, saa kaldes disse Perpendikulærer Kræfternes Vægtarme, og Produkterne af Kræfter og Vægtarme, altsaa $P_1 \times ON_1$ og $P_2 \times ON_2$, **Kræfternes (statiske) Momenter med Hensyn til Punktet O.**

M (Fig. 18) være et materielt Punkt, $MP_1 = P_1$ og $MP_2 = P_2$ de paa samme virkende Kræfter, samt $MP = P$ deres Resultant.

hvilke alle maa ligge i Radien CD, som halverer Buen AB. Anbringer man nu paa disse tre Tyngdepunkter parallele Kræfter proportionerede med S, S_1 og S_2, saa er den første Resultanten af de to sidste og man har (§ 38) $Sx = S_1 x_1 + S_2 x_2$.

Nu er $S = \frac{1}{2}\, rb$, $x = \frac{2kr}{3b}$ og, naar man for Korthedsd Skyld sætter $CE = h$, $S_1 = \frac{1}{2}\, kh$ samt $x_1 = \frac{2}{3}\, h$ og endelig $S_2 = S - S_1 = \frac{1}{2}\,(rb - kh)$. Indsættes disse Værdier i ovenstaaende Ligning, saa faar man $\frac{1}{3}\, r^2k = \frac{1}{3}\, kh^2 + \frac{1}{2}\,(rb - kh)\, x_2$ og altsaa $x_2 = \frac{2k}{3}\left(\frac{r^2 - h^2}{rb - kh}\right)$.

§ 44.

En Pyramide ADF (Fig. 30) har sit Tyngdepunkt i den rette Linie MF fra Toppunktet F til Grundfladens Tyngdepunkt M, thi alle med Grundfladen parallele Snit NOPQR har deres Tyngdepunkter i denne Linie.

Er Pyramiden tresidet, som ABCD (Fig. 31), saa lader ethvert af dens fire Hjørner sig betragte som Toppunkt og den modstaaende Flade som Grundflade, og man faar derfor Pyramidens Tyngdepunkt i T, som er Skjæringspunktet af de to fra Hjørnerne D og A til de modstaaende Flader Tyngdepunkter M og N gaaende rette Linier DM og AN. Drages EA og DE, saa har man $EM = \frac{1}{3}\, EA$ og $EN = \frac{1}{3}\, DE$; altsaa er MN parallel AD og lig $\frac{1}{3}\, AD$ og $\triangle MNT \backsim \triangle DAT$. Heraf følger igjen $MT = \frac{1}{3}\, DT$ eller $DT = 3MT$, altsaa $MD = DT + MT = 4MT$ eller $MT = \frac{1}{4}\, MD$. Fældes DH og TG lodrette mod Grundfladen ABC og drages HM samt GM, saa bliver $\triangle DHM \backsim \triangle TGM$ og altsaa $TG = \frac{1}{4}\, DH$. En tresidet Pyramides Tyngdepunkt T befinder sig altsaa i en Afstand fra Grundfladen lig $\frac{1}{4}$ af Pyramidens Højde, eller i en Afstand fra Toppunktet lig $\frac{3}{4}$ af Pyramidens Højde.

Da nu enhver Pyramide eller Kegle kan tænkes bestaaende af lige høje tresidede Pyramider, saa befinder enhver Pyramides eller Kegles Tyngdepunkt sig i en Afstand fra Grundfladen lig $\frac{1}{4}$ af Højden.

§ 45.

ret paa Buens Plan. Er PQ en Del af Buen og PN denne Dels Afstand fra Skjæringslinien XX, saa har man Delens Moment = PQ . PN. Drages derpaa Radien PC = MC = r og Linien QR parallel med AB, saa faar man $\triangle$ PQR $\backsim$ $\triangle$ CPN og altsaa PQ: QR = CP : PN. Heraf sees, at Buedelens Moment PQ . PN er = QR . r. Men nu er Radien r en fælles Faktor for alle de øvrige Buedeles Momenter, og Summen af samtlige Buedeles Projektioner paa XX er lig Projektionen af den hele Bues Korde paa samme Linie; følgelig er den hele Bues Moment = Korden AB Gange Radien r. Sætter man dette Moment ligt Buens Moment bestemt ved x, altsaa ligt bx og man betegner Korden AB med k, saa faar man bx = kr og altsaa $\frac{x}{r} = \frac{k}{b}$ eller $x = \frac{kr}{b}$.

§ 43.

Et Triangels Tyngdepunkt T (Fig. 28) ligger i Skjæringspunktet af to rette Linier dragne fra to Vinklers Toppunkter til de modstaaende Siders Halveringspunkter. Er nemlig Siden AB halveret i E, saa er E dens Tyngdepunkt og deler man nu ved Linier parallele med AB Trianglet i Strimler, saa halveres disse af CE, i hvilken Linie altsaa Trianglets Tyngdepunkt maa ligge. Paa samme Maade sees, at Trianglets Tyngdepunkt ogsaa maa ligge i AD, naar CD = DB. Følgelig maa Trianglets Tyngdepunkt være i T. Drages DE, saa bliver den parallel med AC og lig $\frac{1}{2}$ AC; da frembeles $\triangle$ ATC $\backsim$ $\triangle$ ETD, saa bliver TE = $\frac{1}{2}$ CT = $\frac{1}{3}$ CE.

Anm. Af Tyngdepunktets Beliggenhed i et Triangel kan man let bestemme dets Beliggenhed i en Sektor og i et Segment. Tænker man sig CADB (Fig. 29) delt i uendelig mange Sektorer, saa kan disse betragtes som Triangler med uendelig smaa Grundlinier og med en fælles Høide lig Radius CA. Slaar man nu med en Radius $CA_1 = \frac{2}{3}$ CA Buen A_1B_1, saa er det klart, at Tyngdepunkterne af alle disse Triangler eller Sektorer maa ligge i Buen A_1B_1; man kan altsaa forestille sig, at der paa alle Punkter af denne Bue virker ligestore og parallele Kræfter. Tyngdepunktet af Sektoren CADB maa altsaa være det samme som Middelpunktet for disse parallele Kræfter, d. e. det samme som Tyngdepunktet af Buen A_1B_1. Sættes CD = r, Buen ADB = b, Korden AB = k, saa er $CD_1 = \frac{2}{3}$ r, Buen $A_1D_1B_1 = \frac{2}{3}$ b og Korden $A_1B_1 = \frac{2}{3}$ k. Sættes nu Sektorens Tyngdepunkts Afstand fra C lig x, saa har man ifølge § 42

$$x = \frac{2\,kr}{3\,b}.$$

S, S_1, S_2 være Arealerne af Sektoren CADB, Trianglet CAB og Segmentet ADBE; x, x_1, x_2 Afstandene fra C til deres Tyngdepunkter,

saa ere Elementernes bueformige Veje: $r_1\alpha$, $r_2\alpha$ o. s. v. De af Elementerne F_1, F_2 o. s. v. gjennemløbne Rum lader sig betragte som krumbøjede Prismer, hvis Grundflader ere F_1, F_2 o. s. v. og hvis oprindelige Højder ere $r_1\alpha$, $r_2\alpha$ o. s. v. Betegner R Rumfanget af hele Legemet $ABCB_1A_1C_1$, faar man altsaa $R = F_1 r_1 \alpha + F_2 r_2 \alpha + \ldots = (F_1 r_1 + F_2 r_2 + \ldots.)\,\alpha$. Er MT = x Afstanden af det beskrivende Plans Tyngdepunkt fra Omdrejningsaksen, saa har man som bekjendt $(F_1 + F_2 \ldots.)\,x = F_1 r_1 + F_2 r_2 \ldots$ og altsaa ogsaa $R = (F_1 + F_2 + \ldots.)\,x\alpha$. Hermed er ovenstaaende Sætning bevist, thi $F_1 + F_2 + \ldots$ er Arealet af det beskrivende Plan ABC og $x\alpha$ er den af dets Tyngdepunkt T gjennemløbne Bue TT_1.

Fjerde Kapitel.

Om Ligevægt ved de enkelte Maskiner samt om Friktionens og Tougstivhedens Modstand mod Bevægelsen.

§ 46.

Ved et Skraaplan (inclined plane) forstaar man et Plan HF (Fig. 33), som danner en Vinkel med et horisontalt Plan HR. Perpendikulæren FR kaldes Skraaplanets Højde, Linien HF dets Længde og HR dets Grundlinie. Naar et Legeme, hvis Tyngdepunkt er i T, befinder sig paa Skraaplanet, vil dets lodrette Fald forhindres af dette, der kun tilsteder Bevægelse i Retningen FH. Størrelsen af den Kraft P, der bevæger Legemet nedad Skraaplanet, findes ved at opløse den paa Legemet virkende Tyngdekraft V, som forestilles ved Linien TV, i tvende andre, af hvilke TP = P, som er parallel med Skraaplanet, [illegible] til Bevægelsen, og TN = N, som er lodret

Skraaplanet og altsaa til fuldkommen at ophæves af dette. Under saadanne Omstændigheder har man ifølge Læren om Kræfternes Parallelogram $\frac{P}{V} = \frac{\sin. TNP}{\sin. PTN}$. Nu er imidlertid Vinkelen TNP $=$ NTV $=$ FHR $= \alpha$ og Vinkelen PTN $=$ PTK $+$ KTN $= \beta + 90^0$, naar KT er dragen parallel HF, og man ved β forstaar den Vinkel PEF, som Kraftretningen danner med Skraaplanet. Man faar altsaa: $\frac{P}{V} = \frac{\sin. \alpha}{\sin (\beta + 90)}$ d. e. $\frac{P}{V} = \frac{\sin. \alpha}{\cos. \beta}$, og heraf

$$P = \frac{V . \sin \alpha}{\cos \beta}.$$

For Trykket N har man $\frac{N}{V} = \frac{\sin. TVN}{\sin. TNV}$, men da Vinkelen TVN $= 90^0 - (\alpha + \beta)$ og Vinkelen TNV $= 90^0 + \beta$, saa faaes $\frac{N}{V} = \frac{\sin. [90^0 - (\alpha + \beta)]}{\sin (90 + \beta)} = \frac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos \beta}$, og følgelig det Tryk, som virker lodret imod Skraaplanet

$$N = \frac{V . \cos (\alpha + \beta)}{\cos \beta}.$$

Virker Kraften P parallel med Skraaplanets Længde, saa er $\beta = 0$ og $\cos \beta = 1$, altsaa $P = V . \sin. \alpha$ og $N = V . \cos. \alpha$.

Virker P parallel med Skraaplanets Grundlinie, saa er $\beta = - \alpha$ og $\cos \beta = \cos \alpha$, altsaa

$$P = \frac{V . \sin \alpha}{\cos \alpha} = V . \text{tang. } \alpha \text{ og } N = \frac{V}{\cos \alpha}.$$

Virker endelig Kraften vertikalt d. e. parallel Skraaplanets Højde, saa er $\alpha + \beta = 90^0$, altsaa $\cos. \beta = \sin. \alpha$ og $\cos. (\alpha + \beta) = 0$, og følgelig $P = V$ og $N = 0$.

§ 47.

Ved en Kile (wedge) forstaar man ethvert trekantet Prisma (Fig. 35), som med sin ene Kant, Eggen, bringes ind i en Klemme, for at holde denne aaben. Eggens modstaaende Side kaldes Kilens Ryg eller Hoved, og de to øvrige Sideflader, Kilens Sideflader.

ABC (Fig. 36) forestille et Gjennemsnit af Kilen lodret paa dens Egg; den holdes inde i Legemet GHJK ved en Kraft P, som virker lodret paa dens Hoved. Hvert Punkt af Kilens Sideflader, som er i Berøring med Legemet GHIK lider af samme et lodret Tryk. Da alle disse Tryk paa hver Sideflade ere parallele, saa kan man sammensætte de paa Sidefladen AC virkende til en Resultant P_1, og de paa BC virkende til en Resultant P_2. Skal nu Kilen være i Ligevægt, saa maa P være lig med men virke i modsat Retning af Resultanten af Kræfterne P_1 og P_2. Forlænger man derfor disse to Kræfters Retningslinier og afsætter paa disse fra deres Skjæringspunkt x Stykkerne $xx_1 = P_1$ og $xx_2 = P_2$ samt fuldfører Parallelogramet xx_1x_2r, saa maa dettes Diagonal xr falde sammen med Retningslinien for P og tillige forestille en Kraft, som er ligestor med P. Man faar altsaa $xr : xx_1 : xx_2 = P : P_1 : P_2$. Men Vinkelen $y_1\,xr =$ Vinkelen A, da $A + y_1\,xy = y_1\,xy + y_1\,xr = 2R$. Fremdeles faar man, naar man drager $y_1 D \ddagger xx_2$, at $C + Dy_1C = Dy_1C + xx_1r = R$, og altsaa Vinkelen $xx_1r =$ Vinkelen C. Heraf faaes $\triangle\, xx_1r \backsim \triangle\, ABC$, og altsaa $xr : xx_1 : xx_2 = AB : AC : BC$, eller $P : P_1 : P_2 = AB : AC : BC$. Skrives dette Udtryk saaledes: $\frac{P}{AB} = \frac{P_1}{AC} = \frac{P_2}{BC}$, saa sees let, at P maa minke, eftersom AB minker, og at altsaa Kilen virker desto fordelagtigere, jo smalere Ryg den har.

§ 48.

En Vægtstang (lever) er et Legeme, som kan drejes om en fast Akse eller et fast Punkt (fulcrum). Forestiller man sig den uden Vægt, kaldes den mathematisk, i modsat Fald, fysisk. Vi vil for det Første undersøge Betingelserne for Ligevægten ved den mathematiske Vægtstang.

Er $A_1\,A\,A_2$ (Fig. 37) Vægtstangen, A dens faste Punkt, P_1 og P_2 to Kræfter, som angriber den i A_1 og A_2, saa er det klart, at der ikke kan være Ligevægt, medmindre Kræfternes Resultant (P) gaar gjennem det faste Punkt A; altsaa maa deres Retningslinier ligge i et og samme Plan, som gaar gjennem A. Tages nu Momenterne med Hensyn til dette Punkt, saa bliver Resultantens Moment ligt Nul, og naar man ved a_1 og a_2 forstaar Perpendikulærerne AN_1 og AN_2 paa de givne Kræfters Retningslinier, saa faar man $0 = -P_1 a_1 + P_2 a_2$ (§ 32), og altsaa

$$P_1 a_1 = P_2 a_2,$$

hvoraf sees, at Vægtstangen er i Ligevægt, naar Kræfternes Momenter med Hensyn til dens faste Punkt ere ligestore. Af de fire Størrelser P_1, P_2, a_1, a_2 kan man bestemme enhver, naar de tre øvrige ere givne. Trykket, som maa udholdes af det faste Punkt A, er ligt Kræfternes Resultant (P) og findes efter § 36.

Ere Kræfterne parallele og Vægtstangen ret (Fig. 38), saa forholder Kræfternes Angrebspunkters Afstande fra det faste Punkt sig ligesom Retningslinierues Afstande fra samme Punkt, og man kan altsaa da sætte A_1A og AA_2 istedetfor a_1 og a_2.

Betragter man den ene Kraft (P_2) som en Modstand (Last), der skal overvindes af den anden Kraft, saa plejer man at inddele Vægtstangen i tre Arter.

I Vægtstangen af første Art (Fig 38) ligger det faste Punkt A mellem Kraften P_1 og Modstanden P_2, f. Ex. Brækstangen, Skaalvægten. I Vægtstangen af anden Art (Fig. 39) virker Modstanden P_2 mellem Kraften P_1 og det faste Punkt, f. Ex. Trillebaaren. I Vægtstangen af tredie Art (Fig. 40) virker Kraften P_1 mellem Modstanden P_2 og det faste Punkt f. Ex. Ildtangen. Ere Kræfterne parallele, saa trykkes det faste Punkt af deres Resultant P, som virker parallelt med deres Retning og som er lig deres algebraiske Sum (§ 37).

Vi vil antage at A_1A (Fig. 39) er en fysisk Vægtstang af anden Art, paa hvilken en Vægt P_2 er ophængt i Punktet A_2, medens en Kraft P_1 virker vertikalt opad i A_1. Er Stangens Længde $A_1A = l$, Vægten af en Enhed af Stangen $= q$, saa er Vægten af hele Stangen $= lq$, hvilken Vægt man tænker sig anbragt i dens Tyngdepunkt, hvis Afstand fra A er lig $\frac{1}{2}l$, dersom Stangen er prismatisk. Betingelsen for Ligevægten bliver nu, at Resultanten af de tre Kræfter P_1, P_2 og lq skal gaa gjennem det faste Punkt A. Sættes $A_2A = b$, saa faar man altsaa $0 = P_1 l - P_2 b - \frac{1}{2} ql^2$ eller $P_1 l = P_2 b + \frac{1}{2} ql^2$.

Tillæg. Ved et Legemes Stabilitet forstaar man dets Evne til alene formedelst sin Vægt at haandhæve sin Stilling og gjøre Modstand mod en Omvæltning.

Hviler et Legeme ABCD (Fig. 41) paa et horisontalt Underlag og det angribes af en Kraft P, som ikke virker vertikalt, saa vil denne baade søge at vælte det og føre det fremad; vi vil imidlertid antage, at dets Bevægelse fremad møder en eller anden Hindring, og kun betragte Omdrejningen om Kanten C. Fælder man fra denne Kant en Perpendikulær $CE = a$ paa Kraftretningen og en anden Perpendikulær $CN = x$ paa Lodlinien TV gjennem Legemets Tyngdepunkt, saa har man, naar Legemets Vægt betegnes med V, en Vægtstang, hvis Ligevægt bestemmes ved Ligningen $Pa = Vx$ eller $P = \frac{x}{a}.V$. Er altsaa Kraften P en Smule større end $\frac{x}{a}.V$, saa vil Legemet drejes om C. Ifølge dette afhænger et Legemes Stabilitet af Produktet (Vx) af dets Vægt og dets Underkants korteste Afstand fra Lodlinien gjennem dets Tyngdepunkt, og derfor kan man anse Vx som et Maal for Stabiliteten.

§ 49.

Tridsen (pulley) er en cirkelrund Skive, som kan dreje sig om en Akse; en større eller mindre Del af dens Omkreds er belagt med et Toug, hvis Ender angribes af to Kræfter P_1 og P_2 (Fig. 42 og 43). Er Lejet, hvori Aksen eller Tapperne hviler, ubevægeligt, saa kaldes Tridsen fast, er Taplejet derimod bevægeligt, kaldes Tridsen løs.

Ved enhver Tridse er det nødvendigt for Ligevægten, at de to Kræfter P_1 og P_2, som angriber Tougets Ender, ere ligestore, thi enhver Tridse er en ligearmet Vægtstang, som faaes, naar man fra Aksen A fælder Perpendikulærer AA_1 og AA_2 paa Kræfternes Retningslinier. Af Kræfterne P_1 og P_2 dannes en Resultant P, som trykker paa Taplejet, og som forestilles ved Diagonalen i den Rhombe, som kan konstrueres af de ligestore Kræfter P_1 og P_2 samt Vinkelen $A_1\,C\,A_2$ $= \alpha$; man faar altsaa $P = 2\,P_1 \cos. \frac{\alpha}{2}$.

Tillæg. Ved den faste Tridse (Fig. 42) er Kraften P_2 en Last, som skal overvindes eller hæves; Kraft er altsaa lig Last, og man opnaar her ikke Videre end en Forandring i Retning. Ved den løse Tridse (Fig. 43) virker derimod Lasten P paa Taplejet, medens den ene Tougende er befæstet til en fast Gjenstand; her maa man altsaa sætte Kraften $P_1 = \dfrac{P}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$. Betegnes Korden $A_1\,K\,A_2$, som svarer til den med Touget belagte Bue, ved k, og Radien $AA_1 = AA_2$ ved r, saa er $k = 2\,A_1K = 2\,AA_1 \cos.\,AA_1\,K = 2\,AA_1 \cos.\,A_1\,C\,K$ $= 2\,r \cos. \frac{\alpha}{2}$; man kan altsaa sætte $\dfrac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \dfrac{r}{k}$ og følgelig $\dfrac{P_1}{P}$ $= \dfrac{r}{k}$. Ved den løse Tridse forholder altsaa Kraften sig til Lasten som Tridsens Radius til den tougbelagte Bues Korde. Er $k = 2r$ (Fig. 44), bliver $P_1 = \frac{1}{2}P$; er $k = r$, og altsaa den tougbelagte Bue $= 60^\circ$, bliver $P_1 = P$. Det sees, at jo mindre man gjør k, desto større bliver P_1, og gjøres omsider k uendelig liden d. e. Tougbelægningen uendelig liden, saa bliver P_1 uendelig stor.

§ 50.

Bomhjulet (wheel and axle) er et Hjul CA (Fig. 45), som er forbundet med en Cylinder (Bom) FBE, paa hvilken det er befæflet saaledes, at dets Flade er lodret paa Cylinderens Akse. De runde Ender F og E, hvormed Bomhjulet hviler paa Underlaget, kaldes Tapper (trunnions). Vi vil her betragte et Bomhjul, hvis Omdrejningsakse er horisontal, samt forudsætte, at Kræfterne P og Q, eller Kraften P og Lasten Q, virker paa fuldkommen bøjelige Snore, som ere lagte om Hjulet og Bommen. De Spørgsmaal, som skal besvares ere: i hvilket Forhold staar Kraften P til Lasten Q, og hvilke Tryk virker paa Taplejerne ved F og E?

Vi vil tænke os et Horisontalplan lagt gjennem Aksen CD, og Angrebspunkterne A og B for Kræfterne P og Q forflyttede til Punkterne A_1 og B_1 i dette Plan. Ere Vinklerne AA_1C og BB_1D, som begge Kræfterne danner med Horisonten, lig α og β, saa lader disse Kræfter sig opløse i Horisontalkræfterne $R = P \cos. \alpha$, $S = Q \cos \beta$ og Vertikalkræfterne $P_1 = P \sin. \alpha$ og $Q_1 = Q \sin. \beta$. Horisontalkræfterne ere rettede imod Omdrejningsaksen; de kan antages at angribe den i C og D og bliver fuldkommen ophævede af samme. Vertikalkræfterne P_1 og Q_1 søger derimod at dreje Bomhjulet om Aksen. Er K dennes Skjæringspunkt med den rette Linie, som forbinder Angrebspunkterne A_1 og B_1, saa ere KA_1 og KB_1 Vægtarme for P_1 og Q_1, og der er Ligevægt om K og altsaa ogsaa om CD, naar man har $P_1 \,.\, KA_1 = Q_1 \,.\, KB_1$, eller, da $\frac{KA_1}{KB_1} = \frac{CA_1}{DB_1}$, naar

$P_1 \,.\, CA_1 = Q_1 \,.\, DB_1$, eller, da $\frac{P_1}{P} = \frac{CA}{CA_1}$ og $\frac{Q_1}{Q} = \frac{DB}{DB_1}$,

naar $\frac{P \,.\, CA}{CA_1} \,.\, CA_1 = \frac{Q \,.\, DB}{DB_1} \,.\, DB_1$, d. e.

$$P \,.\, CA = Q \,.\, DB.$$

Kræfterne P_1 og Q_1 udøver paa K et Vertikaltryk $P_1 + Q_1$; fremdeles angriber Bomhjulets Vægt V ved dets Tyngdepunkt T. Begge Taplejerne E og F maa altsaa udholde Vertikaltrykket $P_1 + Q_1 + V = P \sin. \alpha + Q \sin. \beta + V$. Sætter man EF (Bommens Længde) $= L$, $EC = l_1$, $CD = l$, $DF = l_2$, altsaa $L = l + l_1 + l_2$, fremdeles $ET = d_1$ samt $FT = d_2$, altsaa ogsaa $L = d_1 + d_2$, og bemærkes, at $\frac{DK}{DC} = \frac{P_1}{P_1 + Q_1}$ eller $DK = \frac{P_1 l}{P_1 + Q_1}$, saa faar man for Vertikaltrykket X_1 i Tappen E Bestemmelsen

$$X_1 \, EF = V \,.\, FT + (P_1 + Q_1) \, FK, \text{ hvoraf}$$

$$X_1 = \frac{V\,.\,d_2 + (P_1 + Q_1)\left(l_2 + \frac{P_1\,l}{P_1 + Q_1}\right)}{L} \text{ eller}$$

$$X_1 = \frac{V\,.\,d_2 + (P_1 + Q_1)\,l_2 + P_1\,l}{L}, \text{ og for Vertikaltrykket}$$

X_2 i Tappen F:

$$X_2\,EF = V\,.\,EF + (P_1 + Q_1)\,EK, \text{ hvoraf}$$

$$X_2 = \frac{V\,.\,d_1 + (P_1 + Q_1)\left(l_1 + \frac{Q_1\,l}{P_1 + Q_1}\right)}{L} \text{ eller}$$

$$X_2 = \frac{Vd_1 + (P_1 + Q_1)\,l_1 + Q_1\,l}{L}.$$

Angaaende Horisontalkræfterne R og S bemærkes, at deres Momenter med Hensyn til Punktet F ere $R\,(l + l_2)$ og Sl_2 og med Hensyn til Punktet E: $S\,(l + l_1)$ og $R\,l_1$. Forstaar man nu ved Y_1 og Y_2 de formedelst R og S i Tapperne E og F frembragte Horisontaltryk, saa har man $Y_1\,L = R\,(l + l_2) - Sl_2$, eller $Y_1 = \frac{R\,(l + l_2) - Sl_2}{L}$, og $Y_2\,L = S\,(l + l_1) - Rl_1$, eller $Y_2 = \frac{S\,(l + l_1) - Rl_1}{L}$.

Forstaar man ved Z_1 det samlede Tryk i Taplejet E og ved Z_2 det samlede Tryk i Taplejet F, saa er
$Z_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$ og $Z_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}$.

Ere endelig φ og ψ de Vinkler, som disse Tryks Retninger danner med Horisonten, saa har man

$$\text{tang. } \varphi = \frac{X_1}{Y_1} \text{ og tang. } \psi = \frac{X_2}{Y_2}.$$

§ 51.

Dersom Planet KG_1GFBA (Fig. 46 a), der bestaar af et Rektangel KG_1BA og et ligebenet Triangel GFB, drejer sig om Aksen AK, og Triangelet tillige har en Bevægelse henad den med AK parallele Linie BG_1 saaledes, at naar Punktet B har gjort $\frac{1}{n}$ af en hel Omdrejning det tillige har bevæget sig opad $\frac{1}{n}$ af Linien BG og er efter en hel Omdrejning kommet til Punktet G, altsaa Punktet G til G_1 ($BG = GG_1$), saa har Triangelsiderne gjennemløbet Overfladen af et Legeme, som kaldes en Skrue (screw). Afstanden AD eller BG kaldes Højden af en Skruegang. Punktet B gjennemløber under den akførte Omdrejning en Linie, som kaldes en Skruelinie (spiral line). Gjennemskjærer man den Cylinderflade, i hvilken denne Linie ligger, med en ret Linie, som er parallel med Axen AK, og udvikler den i et Plan, saa forvandler den cylindriske Overflade sig til et Rektangel BMGL (Fig. 46 b), hvis Grundlinie BM bliver $= 2\pi . AB$, og hvis Højde GM bliver $= AD$, og da man med Hensyn til ethvert Punkt g af Skruelinien har den Bestemmelse, at $gm : GM = Bm : BM$, saa forestilles den i et Plan udviklede Skruelinie ved den rette Linie BG. Paa samme Maade som B gjennemløber alle Punkter af Triangelsiderne BF og FG Skruegangslinier, og man kan altsaa forestille sig Skruen som en Cylinder, der er omviklet med et bøjeligt Prisma. En udhulet Cylinder BFGHC (Fig. 46 a), hvis indre Radius er AB og af hvis indvendige Del der er udskaaret et med det omviklede kongruent Prisma, kaldes Skruens Møttrik.

Tænker man sig Skruens Axe vertikal og antager man, at en Last Q virker paa Møttrikken, saa vil Lastens Tryk fordeles paa alle de Punkter af Skruens Gjænger, som berører Møttrikken, og denne sidste vil, ifald der ikke er nogen Hindring mod dens Bevægelse, glide nedad Skruen saaledes, at ethvert Punkt N i hin gjennemløber en Skruelinie. Et uendeligt lidet Stykke af denne Skruelinie kan betragtes som et Stykke af Længden af et Skraaplan, hvis Grundlinie er den af Radien $EN = r$ beskrevne Cirkels Periferi, og hvis Højde er $AD = h$; Skraaplanets Heldning være $= \alpha^0$. Forstaar man nu ved q_1 den Del af Trykket Q, som virker paa N, og man formedelst en horisontalt virkende Kraft k vil holde Punktet N i Ligevægt, saa har man ifølge § 46:

$$k = q_1 . \text{tang. } \alpha \text{ eller } k = \frac{q_1 h}{2 \pi r}.$$

Anbringer man istedetfor den i N virkende Kraft k en Kraft p_1, der virker med Vægtarmen $EI = R$, saa maa man, ifald p_1 skal være ligegjældende med k, have $p_1 R = kr$. Indsættes denne Værdi for kr i foregaaende Ligning, saa faar man $2 \pi R p_1 = q_1 h$. Betegner man nu Trykkene paa forskjellige andre Punkter af Skruegangen ved q_2, q_3 o. s. v. og de horisontalt virkende Kræfter, som maa anbringes i Afstanden R fra Axen AK for at holde Ligevægt med hine Tryk, ved p_2, p_3 o. s. v., saa faar man paa samme Maade $2 \pi R p_2 = q_2 h$, $2 \pi R p_3 = q_3 h$ o. s. v. og følgelig

$$2 \pi R (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots.) = (q_1 + q_2 + q_3 + \ldots) h$$

eller, naar man sætter $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = P$ og $q_1 + q_2 + q_3 + \ldots. = Q$,

$$2\pi RP = Qh.$$

Der er altsaa Ligevægt ved Skruen, naar Kraften forholder sig til Lasten som Højden af en Skruegang forholder sig til Omkredsen af den Cirkel, som Kraftens Vægtarm beskriver under en Omdreining.

§ 52.

De ovenfor omhandlede Maskiner kaldes enkelte. Forbinder man flere af dem saaledes, at den ene virker paa den anden, saa kaldes en saadan Forbindelse en sammensat Maskine. Som Exempler herpaa anføres Multiplikationsvægten og Skruen uden Ende.

Ved Multiplikationsvægten (Fig. 47) hviler Lasten P paa en Vægtstang AB, som har sit Fulcrum ved A og som ved B er fæstet til en Stang BB_1, som atter er fæstet til den paa Kniven K hvilende Vægtstang IC_1. Kniven A hviler paa en Vægtstang CD, hvis Fulcrum er ved D, og hvis anden Ende C er fæstet til den i C_1 fæstede Stang CC_1. Hvorsomhelst nu Lasten P lægges paa AB, vil den virke som om den var ophængt umiddelbart paa Stangen BB_1, dersom Proportionen $KB_1 : KC_1 = DA_1 : DC$ finder Sted. Trykket af Lasten P lader sig nemlig opløse i to med samme parallele Tryk, nemlig P_1, som virker ved A_1, og P_2, som virker ved B. Sættes $CD = n \cdot A_1D$ og man ved Q forstaar en Kraft, som anbragt i C er ligegjældende med den ved A_1 angribende Kraft P_1, saa faaes $P_1 \cdot A_1D = Q \cdot n \cdot A_1D$, eller $Q = \frac{P_1}{n}$. Man har altsaa paa højre Side af K Kraften P_2 angribende i B_1 og Kraften $\frac{P_1}{n}$ angribende i C_1, og da nu efter Betingelsen $C_1K = n \cdot B_1K$, saa faar man Summen af Momenterne paa denne Side lig $\frac{P_1}{n} \cdot n \cdot B_1K + P_2 \cdot B_1K = (P_1 + P_2)B_1K = P \cdot B_1K$. Forholdet mellem Kraft (Vægtlod) og Last bestemmes af Forholdet mellem Vægtarmene IK og KB_1; er f. Ex. $KB_1 = \frac{1}{10}$ IK, saa vil 1 Pund paa Vægtskaalen holde Ligevægt med 10 Pund Last.

Forbinder man en Skrue, der er forsynet med et Haandgreb saaledes med et Tandhjul, at Skruens Akse ligger i Hjulets Flade, og at dens Gjænger griber ind i Hjultænderne, saa vil, naar Skruen en Gang omdrejes, en Tand bevæges gjennem Højden af en Skruegang. Denne Maskine kaldes Skruen uden Ende. Er Haandgrebets Afstand fra Skruens Akse = a, Højden af en Skruegang = h, Hjulets Radius = R, dets Boms Radius = r, er fremdeles paa Bommen anbragt en Last Q, og Kraften, som virker paa Skruens Haandgreb,

$= P$, saa er, naar Q_1 betegner Skruens Tryk paa Hjultanden, Betingelsen for Ligevægt efter § 51

$$2 \pi a P = Q_1 h,$$
$$\text{men } Q_1 R = Qr \text{ (§ 50)},$$
$$\text{altsaa } 2 \pi a R P = Qrh.$$

§ 53.

Naar Kraft og Last efter de ovenstaaende Beregninger holder hinanden i Ligevægt paa en Maskine, saa skulde, hvis dens materielle Dele ikke gjorde nogen Modstand mod Bevægelsen, den mindste Forøgelse af Kraften sætte Lasten i Bevægelse.

Erfaring lærer imidlertid, at dette ikke sker. Naar f. Ex. et Legeme hviler paa et horisontalt Plan, saa skulde ifølge § 46 den ringeste Kraft, som anbringes paa samme i horisontal Retning, sætte det i Bevægelse; men da selv de glatteste Legemer har smaa Ujævnheder, som griber ind i hinanden, saa kan Legemet ej bevæges hen ad Planet uden at disse Ujævnheder sonderrives eller hæves ud af hinanden; der opstaar altsaa en Modstand mod Bevægelsen, hvilken Modstand kaldes Gnidning eller Friktion. Jo haardere og glattere Legemernes Overflader ere, desto mindre bliver Gnidningen; man kan derfor formindske den ved mellem Legemerne at bringe Substantser, som udfylder Ujævnhederne uden selv at gjøre synderlig Modstand mod Bevægelsen, saasom Talg, Olie o. s. v. Forøvrigt maa man ikke forvexle Gnidningen med Adhæsionen, d. e. med den Sammenhæng mellem to Legemer, som indtræder, naar Punkter af det ene blot bringes i Berøring med Punkter af det andet. Adhæsionen voxer med Berøringsfladens Størrelse og er uafhængig af den Kraft, hvormed de trykkes mod hinanden, medens det Modsatte er Tilfældet med Gnidningen. Alene ved svagt Tryk er Adhæsionens Modstand mod Bevægelsen af Betydning i Sammenligning med Gnidningens, ved stærke Tryk bliver hin forsvindende i Sammenligning med denne.

Man adskiller to Slags Gnidning, nemlig glidende (sliding) og rullende (rolling); den glidende er den Modstand, som opstaar, naar et Legeme bevæger sig saaledes henad et andet, at alle dets Punkter beskriver parallele Linier; den rullende er derimod den Modstand, som opstaar, naar et Legeme paa en Gang bevæger sig fremskridende og drejende henad et andet og et Berøringspunkt tilbagelægger en ligesaa stor Vej paa det bevægede som paa det hvilende Legeme. En egen Art af glidende Gnidning er Tapgnidning, som opstaar, naar en cylindrisk Tap drejer sig i sit Leje.

Man adskiller fremdeles Hvilens Gnidning, som overvindes, naar et hvilende Legeme sættes i Bevægelse, og **Bevægelsens** Gnidning, som modsætter sig Bevægelsens Vedbliven.

Erfaring har lært os følgende Love for Gnidningen:

1) Gnidningen forholder sig som det lodrette Tryk mellem de gnidende Legemer.

2) Gnidningen er uafhængig af Gnidnings- eller Berøringsfladens Størrelse. Er f. Ex. en Murstens Sideflader af samme Beskaffenhed, saa udfordres samme Kraft til at bevæge den henad et horisontalt Plan, enten man lader den hvile paa dens største, midlere eller mindste Sideflade.

3) Hvilens Gnidning er i Regelen større end Bevægelsens; men den sidste er uafhængig af Hastigheden.

4) Gnidningen ved smurte Flader er mindre end ved usmurte og afhænger mindre af de gnidende Legemers end af Smurningens Beskaffenhed.

5) Tapgnidning er mindre end almindelig glidende Friktion; den rullende Gnidning er i de fleste Tilfælde saa ubetydelig, at den i Sammenligning med den glidende kan sættes ud af Betragtning.

§ 54.

Gnidningsmodstandens Størrelse kan bestemmes paa følgende Maade. Man fæster paa et Bord (Fig. 48) to horisontale Skinner af den Materie, som skal undersøges, og sætter paa disse en Slæde, (AB) hvis Mejer ere skodde med den samme eller en anden Materie. Fra Slæden gaar en Snor horisontalt hen over en Tridse, og ved dens nedhængende Ende anbringes en Vægt F. Kjendetegnet paa at denne Vægt er lig Gnidningsmodstanden er, at et Stød til Slæden meddeler denne en ensformig Bevægelse. Ved at lægge Vægt paa Slæden kan de gnidende Overfladers Tryk imod hinanden forøges. Trykker nu Slæden en Gang mod Skinnerne med en Kraft V og fordrer til Overvindelse af sin Gnidning Kraften F og en anden Gang med en Kraft V_1 og fordrer da til Gnidningens Overvindelse Kraften F_1, saa har man ifølge § 53, 1:

$$\frac{F}{F_1} = \frac{V}{V_1}, \text{ og altsaa } F = \frac{F_1}{V_1} . V.$$

Har man nu ved Forsøg fundet den Gnidningsmodstand F_1, som svarer til et vist Tryk V_1, saa finder man altsaa den Gnidningsmodstand F, som svarer til et andet Tryk V, idet man multiplicerer dette Tryk med Forholdet $\frac{F_1}{V_1}$. Exponenten af dette Forhold, eller Gnidningsmodstanden for et Tryk lig Enheden, f. Ex. 1 Pund, kaldes Gnidningskoefficienten. Betegnes denne med f og de gnidende Fladers lodrette Tryk mod hinanden med N, saa har man altsaa ialmindelighed Gnidningen F = f. N.

Gnidningskoefficienten er forskjellig ved forskjellige Substantser og ved de forskjellige Slags Gnidning, hvorfor den maa bestemmes ved særlige Forsøg.

Vil man, at Slæden AB skal tilbagelægge Vejen s, saa maa der udrettes et mekanisk Arbejde ligt Fs; det af Gnidningen optagne mekaniske Arbejde fNs er altsaa ligt Produktet af Gnidningskoefficienten, det perpendikulære Tryk og den af det gnidende Legeme tilbagelagte Vej.

Anm. Vil man bestemme f ved Tapgnidning, kan man anvende en fast Tridse ACB (Fig. 49) med de over samme i en Snor hængende Vægter P og Q. Summen P + Q = R angiver da Trykket paa Taplejet, naar Tridsens egen Vægt sættes ud af Betragtning, og Differentsen P — Q den Kraft paa Tridsens Omkreds, som holder Ligevægt med Friktionen F = f (P + Q) paa Tappens Omkreds: er nu CA = CB = a og Tappens Radius CD = r, saa maa man have Momenterne ligestore eller $(P - Q)\,a = F r = f(P + Q)\,r$ og altsaa $f = \frac{P - Q}{P + Q} \cdot \frac{a}{r}$.

§ 55.

Ligger et Legeme AB (Fig. 50) paa et Skraaplan FH, hvis Heldning FHR er $= \alpha^0$, saa kan dets Vægt V opløses i det mod Skraaplanet lodrette Tryk $N = V \cdot \cos\alpha$ og i den parallel Skraaplanet virkende Kraft $P = V \cdot \sin.\ \alpha$.

Ved Hjælp af den første Kraft bestemmes nu Gnidningen $F = f.V \cos.\ \alpha$, der ytrer sig som en Modstand mod enhver Bevægelse paa Skraaplanet, hvorfor man for at bringe Legemet opad samme maa anvende Kraften $F + P = f\ V \cos.\ \alpha + V \sin.\ \alpha + = (f \cos.\ \alpha + \sin.\ \alpha)\ V$; nedad samme vil Legemet gaa formedelst Kraften $F - P = (f \cos.\ \alpha - \sin.\ \alpha)\ V$. Den sidste Kraft er Nul, d. e. Legemet vil formedelst Friktionen befinde sig i Hvile paa Skraaplanet, naar $\sin.\ \alpha = f \cos.\ \alpha$, d. e. naar f er $=$ tang. α. Den Vinkel, hvis Tangens er lig Gnidningskoefficienten, kaldes Gnidningsvinkelen (angle of resistence).

§ 56.

Vi fandt i § 54 Koefficienten for Hvilens Gnidning af den Vægt F, som holdt Ligevægt med Gnidningsmodstanden, saaledes, at et Stod meddelte Slæden (Fig. 48) ensformig Bevægelse. Koefficienten for Bevægelsens Gnidning lader sig beregne af den Vægt P, som netop udkræves for at Slæden skal bevæge sig formedelst sammes Nedsynken. Er V Slædens Vægt, saa har man Gnidningen = f V, den bevægende Kraft = P — f V og den bevægede Masse $M = \frac{P + V}{g}$ (§ 26). Forstaar man ved p den opstaaende jævnt accelererende Bevægelses Acceleration, saa bliver $p = \frac{P - fV}{P + V} g$, og altsaa Gnidningskoefficienten $f = \frac{P}{V} - \frac{P + V}{V} \cdot \frac{p}{g}$. Er s den i Tidsdelen t tilbagelagte Vej, saa har man $s = \frac{1}{2} pt^2$ (§ 7. III) eller $p = \frac{2s}{t^2}$ og altsaa $f = \frac{P}{V} - \frac{P + V}{V} \cdot \frac{2s}{gt^2}$.

Følgende Tabel giver nogle Exempler paa Gnidningens Størrelse.

Glidende Friktion.	Overfladens Tilstand.	Gnidnings-koefficient. i Hvile.	Gnidnings-koefficient. under Bevægelse.
Eg paa Eg med parallele Trevler	tør	0,62	0,48
Do. — Do. — Trevler paatvers	tør	0,54	0,34
Furu paa Eg med parallele Trevler	tør	0,53	0,38
Jern paa Eg med Do. . . .	befugtet med Vand	0,65	0,24
Do. Do.	tjæresmurt	0,11	0,08
Støbejern paa Støbejern . .	tør	0,19	0,18
Do. paa Messing . . .	tør	0,26	0,21
Do. paa Kobber . . .	tør	0,20	0,17

§ 57.

Naar en Last hæves ved et Toug, som ligger over en Bom eller Tridse, saa gjør dets Stivhed nogen Modstand mod Bevægelsen. Var Touget fuldkommen bøjeligt, saa vilde paa Lastens Side dets sidste Berøringspunkt med Cylinderen falde sammen med dennes vertikale Tangent. Men Tougets Stivhed gjør, at det viger lidt af fra denne og forøger derved noget Lastens Moment. Den Modstand mod Bevægelsen, som er en Følge heraf, kaldes **Tougstivheden** (rigidity of rope). Den er afhængig af Tougets Stramning, dets Beskaffenhed, dets Diameter samt af Radien af den Cylinder, hvorom det bøjes.

Tougstivhedens Størrelse kan bestemmes paa følgende Maade. Man ophæver saavidt muligt de Kræfter, som hindrer Omdrejningen af en fast Tridse A B (Fig. 49), belægger den med et Toug, hvis Stivhed skal undersøges, og betynger dettes modsatte Ender med to ligestore Vægter P og Q. Disse vil da holde hinanden i Ligevægt.

Forøger man efterhaanden den ene Vægt P med Tillægsvægter, indtil Tridsen begynder at bevæge sig, saa er den Tillægsvægt q, ved hvilken Bevægelsen begynder, Maalet for Tougstivheden. Forøges begge Vægter P og Q eller Tougets Stramning, vil man finde, at ogsaa q maa forøges. Tougstivheden bestaar altsaa af en uforanderlig Del og en Del, som er proportioneret med Stramningen; den kan derfor udtrykkes ved Formelen $a + bQ$, hvor a og b ere Værdier, som findes ved Forsøg, og Q Stramningen.

Erfaring viser, at Stivheden tiltager i et større Forhold end Tougets Diameter, nemlig som en vis Potents (mellem 1,7 og 1,4) af denne. Fremdeles finder man ved at forandre Tridsens Radius, at Tougstivheden forholder sig omvendt som denne.

Femte Kapitel.

Om Elasticitet og Fasthed.

§ 58.

Den Egenskab, at lade sig sammentrykke og atter at udvide sig efter Trykkets Ophør — eller at lade sig udvide og atter at sammentrække sig efter Udvidningskraftens Ophør, er fælles for alle Legemer og kaldes *Elasticitet*. Faste Legemers Elasticitet har en vis Grænse; overskrides denne, saa vil Legemerne formedelst det paa dem virkende Tryk eller Drag lide en Formforandring, der ikke hæves, naar Kraften ophører at virke. Elasticitetsgrænsen er forskjellig hos forskjellige Legemer; de, hos hvilke den er meget stor, kaldes sædvanlig *fuldkommen elastiske* *), medens de, hos hvilke den er meget ringe, kaldes *uelastiske*.

Forskjellige Legemer viser forskjellige Fremsyninger, naar deres Formforandring skrider ud over Elasticitetsgrænsen; *sprøde* Legemer springer i Stykker, *smidige* Legemer kan derimod gives højst forskjellige Skikkelser, uden at deres Dele adskilles.

Medens man ved Elasticitet forstaar den Modstand, som et Legeme sætter imod en Forandring af dets Form, forstaar man ved *Fast-*

*) I streng Forstand er et Legeme kun fuldkommen elastisk indenfor sin Elasticitetsgrænse.

hed den Modstand, som et Legeme sætter imod en Afsplittelse af dets Dele.

Et Legemes Elasticitet saavel som Fasthed siges at være:

1) absolut, naar den ytrer sig som en Modstand mod en strækkende Kraft i Retning af dets Længde,

2) relativ, naar den ytrer sig som en Modstand mod en Kraft, der virker lodret mod dets Længde,

3) tilbagevirkende, naar den ytrer sig imod et Tryk i Retning af dets Længde,

4) vridende, naar den ytrer sig som en Modstand mod Kræfter, der søger at dreje Legemet om dets Akse.

§ 59.

Indenfor Elasticitetsgrænsen er et Legemes Udvidning eller Sammentrykning proportioneret med den anvendte Kraft, men overskrider Formforandringen hin Grænse, saa ophører denne Proportionalitet og Formforandringen tiltager ialmindelighed meget raskt indtil Afsplittelsen indtræder. Til Maal for Elasticiteten tjener den saakaldte Elasticitetsmodul, som vi vil betegne med E, og som udtrykker den Kraft, som er nødvendig for enten at forlænge et prismatisk Legeme, hvis Tversnit er 1 (f. Ex. 1 Kvadrattomme), til det Dobbelte, eller for at sammentrykke dette Legeme til Halvparten af dets oprindelige Længde. Elasticitetsmodulen er forskjellig hos forskjelligt Material. Det bemærkes forøvrigt, at Elasticitetsmodulen kun gjælder indenfor Elasticitetsgrænsen og at den ikke er noget iagttaget men kun et vedtaget Maal; thi der gives neppe noget fast Legeme, som, uden at dets Elasticitetsgrænse overskrides, tilsteder en saa stor Formforandring, som Elasticitetsmodulen forudsætter.

Naar et Legeme AC (Fig. 51), hvis Længde $BC = AD$ er $= l$ og hvis Tversnit er $= 1$, formedelst Kraften E vilde strækkes gjennem $DG = l$, saa vil det, naar dets Tversnit er F, strækkes gjennem samme Længde formedelst Kraften $F.E$; skal derimod et saadant Legeme udstrækkes gjennem Længden $DN = CM = \lambda$, saa udfordres dertil en Kraft P, som bestemmes af Proportionen $P : F.E = \lambda : l$. Heraf følger: 1) $P = \frac{\lambda}{l} F.E$ og omvendt: 2) $\lambda = \frac{P}{F.E}.l$. Disse Formler gjælder ogsaa for et Legeme AC (Fig. 52), hvis Længde AD er $= l$, og hvis Tversnit AB er $= F$, naar det formedelst et Tryk P bliver forkortet gjennem λ.

§ 60.

Den Kraft, som kan udøves paa et Legeme af Tversnittet 1, indtil dets Udvidning naar Elasticitetsgrænsen, bestemmer dets Bære-Evne og kaldes **Bæremodulen**. Betegnes denne med B, Elasticitetsmodulen med E og den til Elasticitetsgrænsen svarende Længdeudvidning med λ, saa har man $B : E = \lambda : l$ og altsaa $B = \frac{\lambda E}{l}$. Er F Tverſnittet af et Legeme, som skal udholde et Drag = P, saa faaes

$$1)\ P = FB \text{ og } 2)\ F = \frac{P}{B}.$$

Fra Bæremodulen maa man adskille den saakaldte **Fasthedsmodul**, hvilken udtrykker den Kraft, som adsplitter et Legeme af Tverſnittet 1. Kaldes Fasthedsmodulen K og man ved Q forstaar den Kraft, som kan adsplitte et prismatisk Legeme, hvis Tverſnit er = F, saa har man $Q = FK$ og omvendt $F = \frac{Q}{K}$.

Man beregner ofte Legemers Bære-Evne ved Hjælp af K, idet man iforvejen dividerer denne Størrelse med et af Tallene fra 3, 4 indtil 10, for Sikkerheds Skyld, som det heder. Dette er naturligvis kun rigtigt, forsaavidt man kan antage, at Fasthedsmodulen udgjør det 3, 4.. til 10 dobbelte af Bæremodulen.

I følgende Tabel findes nogle midlere Værdier af Elasticitets-, Bære- og Fasthedsmoduler anførte for 1 Punds Drag og 1 Kvadrattommes Tverſnit.

Material.	Udvidning ved Elasticitetsgrænsen $\frac{\lambda}{l}$	Elasticitetsmodul. E.	Bæremodul. B.	Fasthedsmodul. K.
Bøg, Eg, Furu og Gran*) .	1/600	1800000	3000	12000
Jern i Traad	1/1250	26000000	21000	85000
Do. i Stænger	1/1520	29000000	20000	58000
Støbejern	1/1200	17000000	14000	19000
Staal	1/853	30000000	36000	120000
Hærdet Støbestaal	1/4500	44000000	96000	146000
Hamptoug under 1 Tomme tykt	. . .	. . .	. . .	9000
— fra 1—3 Do. .	. . .	. . .	. . .	7000
— over 3 Do. .	. . .	. . .	. . .	5000

§ 61.

Vil man sammentrykke et prismatisk Legeme saa stærkt, at det ad-

*) Naar Kraften virker efter Trevlernes Længde; virker den lodret mod samme, er Elasticitetsmodulen betydelig mindre.

splittes, saa maa man overvinde dets tilbagevirkende Modstand. Afsplittelsen kan foregaa paa to Maader; er Legemet kort, saa vil det paa en Gang springe i flere Stykker; er det derimod langt i Forhold til Breden og Tykkelsen, saa vil det først bøjes og derpaa brydes. Man kan herefter skjelne mellem Springningens og Brydningens Fasthed. Den første er ved lige Tversnit proportioneret med deres Indhold. Er K_1 Modulen for Springningens Fasthed, F Legemets Tversnit og B_1 Bære-Evnen, saa har man $B_1 = FK_1$ og $F = \frac{B_1}{K_1}$, i hvilke Formler man dog for Sikkerheds-Skyld sætter $\frac{1}{5} K_1$ til $\frac{1}{20} K_1$ for K_1.

Følgende Tabel indeholder nogle Moduler for den tilbagevirkende Fasthed.

Tversnittet er 1 Kvadrattomme og Trykket angivet i Pund.

Material.	K_1	Material.	K_1
Basalt . .	27000	Egetræ . .	2800 til 6800
Gnejs . .	5100	Furu . .	6800 - 8000
Granit . .	6000 til 11000	Gran . .	2000
Kalksten . .	1500 - 6000	Støbejern .	146000
Marmor .	3200 - 12000	Smidjern .	72000
Mursten .	580 - 2200	Kobber . .	60000

De i ovenstaaende Tabel anførte Værdier for K_1 bruges ogsaa ofte, naar man har at gjøre med Legemer af betydelig Længde. Navnlig har man for Træsøjler den Bestemmelse, at man skal formindske disse Værdier med en, to eller tre Sjettedele, naar Søjlerne ere 12, 24 eller 48 Gange saa lange som tykke.

Sjette Kapitel.

Om Træghedens Modstand mod Bevægelsen.

§ 62.

Et med Accelerationen p i ret Linie farende Legemes Massedele M_1, M_2, M_3 o. s. v. kan siges formedelst deres Træghed at modstaa Bevægelsen med Kræfterne M_1p, M_2p, M_3p o. s. v. (§ 20. I), og da alle Delenes Bevægelser foregaar i parallele Linier, saa ere ogsaa disse Kræfters Retninger indbyrdes parallele; heraf følger, at Resultanten af alle disse af Trægheden fremgaaende Kræfter er lig Summen $M_1 p + M_2 p + M_3 p + \ldots = (M_1 + M_2 + M_3 + \ldots) p = Mp$, naar M betegner hele Legemets Masse, og at dens Angrebspunkt falder sammen med Legemets Tyngdepunkt (§ 39). For altsaa at meddele et frit bevægeligt Legeme, hvis Masse er M eller hvis Vægt er $V = Mg$, en med Accelerationen p foregaaende retliniet Bevægelse, udfordres en Kraft $P = Mp = \frac{Vp}{g}$, hvis Retningslinie gaar gjennem Legemets Tyngdepunkt (Smlgn. § 29).

§ 63.

Gaar et Legemes bevægende Kraft P (Fig. 53) ikke gjennem dets Tyngdepunkt T, saa antager Legemet en Drejning om dette Punkt, hvilket dog derunder farer frem som om Kraften umiddelbart angreb samme. Dette lader sig forklare paa følgende Maade. Man fælder fra Tyngdepunktet T en Perpendikulær TA paa Kraftretningen, forlænger denne Perpendikulær tilbage, gjør TB lig TA og tænker sig i B anbragt to ligestore parallele med AP men til modsatte Sider virkende Kræfter, den ene lig $+ \frac{1}{2} P$ og den anden lig $- \frac{1}{2} P$. Kraften $+ \frac{1}{2} P$ giver i Forening med den ene Halvpart af den i A angribende Kraft P den i Tyngdepunktet T angribende Kraft $P_1 = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P = P$, hvorimod Kraften $- \frac{1}{2} P$ danner et Kræftepar med den anden Halvpart af den i A angribende Kraft P; af den excentrisk virkende Kraft P opstaar altsaa en paa Tyngdepunktet virkende Kraft P, hvilken meddeler dette Punkt og altsaa det hele Legeme en i ret Linie fremskridende Bevægelse, og et Kræftepar ($\frac{1}{2} P_1$, $- \frac{1}{2} P$), som ikke har nogen Resultant og som alene vil dreje Legemet.

§ 64.

Drejes et Legeme AB (Fig. 54) om en fast Akse C, saa tilbagelægger alle dets Punkter ligestore Vinkler i ligestore Tidsdele. Drejer Legemet sig i en vis Tid gjennem Vinkelen φ^0 eller Buen $\varphi = \frac{\varphi^0}{180^0} \cdot \pi$, saa tilbagelægger Massedelene M_1, M_2 o. s. v., hvis Afstande fra Omdrejningsaksen ere $CM_1 = y_1$, $CM_2 = y_2$ o. s. v., Vejene φy_1, φy_2, o. s. v. Betegner ω den saakaldte **Vinkelhastighed** (angular velocity), d. e. den Hastighed, som tilhører de Massedele, hvis Afstand fra Aksen er Længdeenheden (f. Ex. 1 Fod), saa har Massedelene M_1, M_2 o. s. v. paa samme Tid Hastighederne ωy_1, ωy_2 o. s. v., altsaa udtrykker $(\omega y_1)^2 M_1$, $(\omega y_2)^2 M_2$ o. s. v. deres levende Kræfter (§ 29) og $(\omega y_1)^2 M_1 + (\omega y_2)^2 M_2 + \ldots$

$= \omega^2 (M_1 y_1{}^2 + M_2 y_2{}^2 + \ldots\ldots)$ Summen af deres levende Kræfter eller hele Legemets levende Kraft.

Summen af Produkterne af Masseelene i Kvadraterne af deres Afstande fra Omdrejningsaksen, d. e. $M_1 y_1{}^2 + M_2 y_2{}^2 + \ldots\ldots$ kaldes et Legemes Træghedsmoment (moment of inertia). Betegnes dette med T, saa bliver altsaa $\omega^2 T$ Udtrykket for den levende Kraft i et Legeme, som drejer sig med Vinkelhastigheden ω. Vil man derfor bibringe et hvilende Legeme Vinkelhastigheden ω, maa man udrette et mekanisk Arbejde $Ps = \omega^2 T$, hvilket Arbejde Legemet naturligvis ogsaa udretter, naar det fra denne Vinkelhastighed gaar over i Hvile.

Gaar ialmindelighed et roterende Legemes Vinkelhastighed over fra ε til ω, saa har man det optagne Arbeide $Ps = \left(\frac{\omega^2 - \varepsilon^2}{2}\right)T$ og omvendt $\omega = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{2Ps}{T}}$.

§ 65.

Dersom tvende Masser M_1 og M_2 har samme Vinkelhastighed, udgjør de f. Ex. Dele af et og samme roterende Legeme, saa forholder deres levende Kræfter sig som deres Træghedsmomenter $T_1 = M_1 y_1{}^2$ og $T_2 = M_2 y_2{}^2$, og ere nu ogsaa disse ligestore, saa besidder Masserne ligestore levende Kræfter. Ifølge dette har altsaa tvende Masser den samme Indflydelse med Hensyn til et roterende Legemes Bevægelsestilstand, naar Masserne forholder sig til hinanden omvendt som Kvadraterne af deres Afstande fra Omdrejningsaksen.

Ved Hjælp af Formelen $M_1 y_1{}^2 = M_2 y_2{}^2$ kan man reducere en Masse fra en Afstand til en anden, d. e. man kan finde en Masse M_2, som ved at anbringes i Afstanden y_2 fra Omdrejningsaksen har samme Virkning med Hensyn til et roterende Legemes Bevægelsestilstand, som en given Masse M_1 har i Afstanden y_1; man har nemlig $M_2 = \frac{M_1 y_1{}^2}{y_2{}^2} = \frac{T_1}{y_2{}^2}$, d. e. den til Afstanden y_2 reducerede Masse er lig Kvotienten af dens Træghedsmoment og hin Afstands Kvadrat.

§ 66.

Naar man kjender et Legemes Træghedsmoment med Hensyn til en gjennem dets Tyngdepunkt gaaende Akse, saa kan man paa følgende Maade bestemme Legemets Træghedsmoment med Hensyn til en anden med hin parallel Akse. A (Fig. 55) være den gjennem Tyngdepunktet gaaende og B den anden Omdrejningsakse, for hvilken Legemets Træghedsmoment skal bestemmes; Afstanden AB mellem begge Akser være a og $AN_1 = x_1$ samt $N_1 M_1 = y_1$ de retvinklede Koordinater for en Massedel M_1 af det hele Legeme; τ_1 være denne Dels Træghedsmoment med Hensyn til Axen B, og t_1 dens Træghedsmoment med Hensyn til Axen A. Man har nu $\tau_1 = M_1 . \overline{BM_1}^2 = M_1 [(a + x_1)^2 + y_1^2]$ og $t_1 = M_1 . \overline{AM_1}^2 = M_1 (x_1^2 + y_1^2)$, og altsaa Differentsen mellem begge Momenter $\tau_1 - t_1 = M_1 (a^2 + 2 a x_1 + x_1^2 + y_1^2) - M_1 (x_1^2 + y_1^2) = M_1 a^2 + 2 M_1 a x_1$. Betegner x_2 og y_2 Koordinaterne for en anden Massedel M_2, er fremdeles τ_2 og t_2 denne Dels Træghedsmomenter med Hensyn til Axerne B og A, saa findes paa samme Maade $\tau_2 - t_2 = M_2 a^2 + 2 M_2 a x_2$ og ialmindelighed $\tau_n - t_n = M_n a^2 + 2 M_n a x_n$, naar τ_n og t_n betegner Træghedsmomenterne af Massedelen M_n med Hensyn til Axerne B og A. Betegner nu T_1 det hele Legemes Træghedsmoment med Hensyn til Axen B og T dets Træghedsmoment med Hensyn til Axen A, saa findes $T_1 - T = (M_1 + M_2 + M_3 + \ldots) a^2 + 2 a (M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3 \ldots.) = M a^2 + 2 a Mx$, naar man ved M forstaar hele Legemets Masse og ved Mx Summen af alle dets Massedeles (statiske) Momenter med Hensyn til et Plan, som gaar gjennem Legemets Tyngdepunkt. Da man imidlertid angaaende Summen af alle disse Momenter har den Bestemmelse, at den skal være lig Nul (§ 38.), saa har man ogsaa $Mx = 0$, og altsaa $T_1 - T = M a^2$ eller

$$T_1 = T + M a^2.$$

Et Legemes Træghedsmoment med Hensyn til en excentrisk Axe er altsaa ligt dets Træghedsmoment med Hensyn til en gjennem dets Tyngdepunkt gaaende Parallel-Axe forøget med Produktet af Legemets Masse og Kvadratet af begge Axers Afstand.

§ 67.

Tænker man sig et Legemes hele Masse sammentrængt i et Punkt, saa lader dettes Afstand fra en Omdrejningsaxe sig bestemme under den Forudsætning, at den saaledes sammentrængte Masse har det samme Træghedsmoment som den i Rummet fordelte Masse. Man kalder denne Afstand **Træghedsradien** (radius of gyration). Er T Træghedsmomentet, M Massen og r Træghedsradien, saa har man $T = Mr^2$ og altsaa $r = \sqrt{\frac{T}{M}}$. Forøvrigt maa det erindres, at Træghedsradien egentlig ikke angiver noget bestemt Punkt, men kun en Cirkelperiferi, hvori Massen kan tænkes vilkaarligen fordelt. Da Træghedsradiens Bestemmelse uden den højere Mathematiks Hjælp er temmelig brydsom, indskrænker vi os her til at anføre dens Værdier for nogle sædvanlige Tilfælde.

For en Cylinder, som drejes om sin Akse, er den lig Cylinderens Radie Gange $\sqrt{1/2}$. Er Cylinderen hul, saa er dens Træghedsradie lig $\sqrt{1/2\,(A^2 + a^2)}$, naar A og a ere dens længste og korteste Radier.

Træghedsradien for en Stang, som drejes om sin ene Ende og i et Plan, som er lodret paa Omdrejningsaksen, er lig Stangens Længde Gange $\sqrt{1/3}$; drejes Stangen om sin Midte, saa er den lig Stangens Længde Gange $\sqrt{1/12}$.

For en Kugle, som drejes om sin Diameter er Træghedsradien lig Kuglens Radie Gange $\sqrt{2/5}$.

§ 68.

Theorien om Træghedsmomentet finder Anvendelse ved enhver Maskine, som drejer sig om en fast Akse. Virker f. Ex. to Vægter P og Q (Fig. 56) paa et Bomhjul formedelst fuldkommen bøjelige Snore og man sætter Tapgnidningen ud af Betragtning, saa bliver det i Ligevægt, dersom Pa er $=$ Qb, naar a betegner Hjulets Radie CA og b Bommens Radie BD. Er derimod Pa større end Qb, saa vil P synke og Q stige. Den Kraft, hvormed Q virker paa Vægtarmen DB, lader sig reducere til en Kraft $\frac{Qb}{a}$, hvis Vægtarm er CA og som virker i modsat Retning af den Kraft, hvormed P angriber A. Som bevægende Kraft faar man altsaa tilovers Kraften $\left(P - \frac{Qb}{a}\right)$. Ved at flyttes fra Afstanden b til Afstanden a reduceres Massen $\frac{Q}{g}$ (§ 20, II) til Massen $\frac{Qb^2}{ga^2}$ (§ 65); forstaar man derfor ved M den udenfor Bomhjulet af Kraften $\left(P - \frac{Qb}{a}\right)$ bevægede Masse, saa har man $M = \left(P + \frac{Qb^2}{a^2}\right) : g$. Betegnes Bomhjulets Vægt med V og dets Træghedsmoment med $\frac{Vy^2}{g}$, saa er dets til Afstanden a reducerede træge Masse lig $\frac{Vy^2}{g\,a^2}$; den hele af Kraften $\left(P - \frac{Qb}{a}\right)$ bevægede Masse bliver altsaa $M_1 = \left(P + \frac{Qb^2}{a^2} + \frac{Vy^2}{a^2}\right) : g = (Pa^2 + Qb^2 + Vy^2) : ga^2$.

Heraf findes nu ifølge § 26 den synkende Vægts eller Hjulomkredsens Acceleration

$$p = \frac{P - \frac{Qb}{a}}{(Pa^2 + Qb^2 + Vy^2) : ga^2} = \frac{(Pa - Qb)\, ga}{Pa^2 + Qb^2 + Vy^2},$$

og den stigende Vægts eller Bomomkredsens Acceleration

$$q = \frac{b}{a} p = \frac{(Pa - Qb)\, gb}{Pa^2 + Qb^2 + Vy^2}.$$

Betegner S Stramningen i det Toug, hvori P hænger, saa har man ifølge § 30: $S = P - \frac{Pp}{b} = P\left(1 - \frac{p}{g}\right)$; ligeledes faaes, naar T betegner Stramningen i det Toug, hvori Q hænger, $T = Q + \frac{Qq}{g} = Q\left(1 + \frac{q}{g}\right)$. For Trykket paa Taplejerne faar man altsaa $S + T = P + Q - \frac{Pp}{g} + \frac{Qq}{g} = P + Q - \frac{(Pa - Qb)^2}{Pa^2 + Qb^2 + Vy^2}$, hvoraf sees, at Bomhjulet med Kraft og Last udøver mindre Tryk paa Taplejerne, naar det er i Bevægelse end naar det er i Hvile.

Syvende Kapitel.

Om Centralbevægelse.

§ 69.

Er M (Fig 57) et Sted af et materielt Punkts krumliniede Bane MS, og er MP = P Resultanten af alle de paa Punktet paa dette Sted virkende Kræfter, saa kan denne opløses i to Kræfter, hvoraf den ene MT = T virker tangentialt og den anden MN = N lodret (normalt) mod Kurven; hin kaldes **Tangentialkraften** og denne **Normalkraften**. Denne sidste meddeler Punktet den saakaldte Normalacceleration, hvilken ifølge § 18 ikke har nogen Indflydelse paa dets Hastighed, men kun afviger det fra dets indehavende Bevægelsesretning MT. Forstaar man ved r Krumningsradien til et Sted af det bevægede Punkts Bane og ved v dets Hastighed paa dette Sted, saa har man der dets Normalacceleration $p = \frac{v^2}{r}$ (§ 17). Betegner nu M Punktets Masse, saa udtrykker altsaa $Mp = \frac{Mv^2}{r}$ Normalkraften eller den Kraft, som hvert Øjeblik forandrer Bevægelsesretningen.

§ 70.

Naar et bevægeligt Punkt meddeles en vis Hastighed i Retningen Aa_1 (Fig. 58) og det til samme Tid paavirkes af en fra et fast Punkt O udgaaende tiltrækkende Kraft, saa vil der opstaa en saakaldt Centralbevægelse. Det faste Punkt O kaldes denne Bevægelses Middelpunkt og den tiltrækkende Kraft Centripetalkraften. Forestiller man sig, at det bevægelige Punkt paa Grund af den meddelte Hastighed i en uendelig liden Tidsdel vilde gaa fra A til a_1, men at Tiltrækningen, som vi vil forestille os virkende stødvis, i samme Tidsdel formedelst et Stød vilde føre det fra A til a_2, saa vil Diagonalen AB være den af Punktet i Tidsdelen virkeligt tilbagelagte Vej. I den næste uendelig lille Tidsdel vilde det med den resulterende Hastighed gjennemløbe $Bb_1 = AB$, men samtidigt hermed vilde et nyt Stød af Tiltrækningen have ført det fra B til b_2, og det vil saaledes i Virkeligheden tilbagelægge Diagonalen BC o. s. v. Paa denne Maade forestilles det bevægelige Punkts krumliniede Bane AD ved en Polygonomkreds med uendeligt smaa Sider (Elementer) AB, BC o. s. v. En ret Linie fra Bevægelsens Middelpunkt til et Punkt i Banen, kaldes en Vektor-Radie. Tænker man sig en saadan at følge det bevægelige Punkt og tillige at forlænge eller forkorte sig, eftersom dette forandrer sin Afstand fra Bevægelsens Middelpunkt, saa siges den at beskrive den Flade, hvorover den bevæger sig. Ifølge det Foregaaende er $AB = Bb_1$, og naar man drager Ob_1 bliver $\triangle\, OBb_1 = \triangle\, OBA$, fordi de har ligestore Grundlinier og Højder; af samme Grund bliver $\triangle\, OBb_1 = \triangle\, OBC$, og altsaa faar man $\triangle\, OBA = \triangle\, OBC$. Paa samme Maade bevises, at $\triangle\, OBC$ er $= \triangle\, ODC$ o. s. v. Da nu altsaa de Flader, som en Vektorradie beskriver, indeholder ligesaa mange ligestore Flade-Elementer, som der har været anvendt Tidsdele paa at beskrive dem, saa forholder disse Flader sig ligesom den til deres Beskrivelse anvendte Tid. Den Tid, hvori Banen gjennemløbes kaldes Omløbstiden, og det indsees let, at denne maa forholde sig til den Tid, hvori en Bue gjennemløbes, ligesom den hele af Banen indesluttede Flade forholder sig til den til Buen svarende Sektor.

Omvendt kan man ogsaa bevise, at dersom et bevægeligt Punkt gaar om et fast Punkt paa den Maade, at de af Vektorradien beskrevne Flader forholder sig som den til deres Beskrivelse medgaaede Tid, og at Banens Hulning vender mod det faste Punkt, saa har det bevægelige Punkt en Centralbevægelse. Lad nemlig AB og BC (Fig. 58) være to af Banens Elementer, som tilbagelægges i to umiddelbart paa hinanden følgende og *lige store* Tidsdele. Forlænges nu AB til b_1 saaledes at Bb_1 bliver $=$ AB, drager man dernæst b_1C samt afsætter Bb_2 ǂ og $= b_1C$, saa forestiller Bb_2 den Vej, som det bevægelige Punkt vilde have tilbagelagt i den anden Tidsdel, ifald det i samme alene var bleven paavirket af den Kraft, som afviger det fra dets oprindelige Bevægelsesretning ABb_1. Er nu O det faste Punkt, med Hensyn til hvilket Trianglerne AOB og BOC ere lige store, saa maa, da Trngl. $BOb_1 =$ Trngl. AOB, ogsaa Trngl. BOb_1 være $=$ Trngl. BOC og altsaa BO være ǂ b_1C. Da man nu gjennem Punktet B har draget Bb_2 ǂ b_1C, saa maa den afvigende Kraft nødvendigvis være rettet mod Punktet O og Bevægelsen altsaa være, hvad vi har kaldt en Centralbevægelse.

Anm. Den højere Analyse beviser, at dersom Centralbevægelsens Middelpunkt tiltrækker det bevægelige Punkt med en Kraft, som forholder sig omvendt som Kvadratet af dettes Afstand fra hint, saa bliver det bevægelige Punkts Bane enten en *Ellipse* eller en *Hyperbol* eller en *Parabol*, og Punktet O i alle Tilfælde et Brændpunkt.

Omvendt bevises ogsaa, at dersom en Kraft holder det bevægelige Punkt i en af ovennævnte Baner om Bevægelsens Middelpunkt, saa *forholder denne Krafts Styrke sig omvendt som Vektorradiens Kvadrat.*

§ 71.

Bevæger et materielt Punkt sig i en Cirkelperiferi, saa bliver Centripetalkraften ensbetydende med den radialt indad virkende Normalkraft. Ifald Normalkraften paa et Sted af Banen pludselig ophørte at virke, vilde Punktet, om end ingen Tangentialkraft virkede paa samme, dog formedelst Trægheden gaa bort efter Tangenten til dette Sted. Den Normalkraft, som netop er tilstrækkelig til at hindre en saadan Bortgaaen, kan siges at holde Ligevægt med Punktets Bestræbelse efter at fare ud efter Tangenten, hvilken Bestræbelse man plejer at kalde dets *Centrifugalkraft*. Denne forestilles altsaa ligestor med men virkende i modsat Retning af Normalkraften.

Er V Vægten af et Legeme, som bevæges i en Cirkelperiferi, og altsaa dets Masse $M = \frac{V}{g}$, er fremdeles r Radien i den Cirkel, hvori Bevægelsen foregaar, og v Bevægelsens Hastighed, saa har man altsaa ifølge § 69 Centrifugalkraften $P = \frac{Mv^2}{r} = \frac{Vv^2}{gr}$. Er Bevægelsen ensformig, saa lader Hastigheden sig udtrykke ved Omdrejningstiden t, idet man sætter $v = \frac{\text{Vei}}{\text{Tid}} = \frac{2\pi r}{t}$, og man erholder altsaa i dette Tilfælde følgende Udtryk for Legemets Centrifugalkraft: $P = \left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 \frac{M}{r} = \frac{4\pi^2}{t^2} . Mr = \frac{4\pi^2}{gt^2} . Vr = 1{,}2633 . \frac{Vr}{t^2}$.

Da $\frac{2\pi}{t}$ er lig Vinkelhastigheden ω, saa har man ogsaa $P = \omega^2 . Mr$.

§ 72.

CZ (Fig. 59) være et Legemes Omdrejningsakse, CX og CY to retvinklede Koordinater til denne Akse; fremdeles være M en Massedel og $MK = x$, $ML = y$ samt $MN = z$ dennes Afstande fra Koordinatplanerne YZ, XZ og XY. Da Massedelens Centrifugalkraft P virker radialt, saa kan dens Angrebspunkt tænkes forflyttet til dens Retningsliniens Skjæringspunkt O med Omdrejningsaksen. Opløses nu denne Kraft efter Retningerne CX og CY, saa erholdes Komponenterne $OQ = Q$ og $OR = R$, for hvilke man har Proportionerne $OQ : OP = OL : OM$ og $OR : OP = OK : OM$. Heraf følger $Q = \frac{x}{r} P$ og $R = \frac{y}{r} P$, naar r betegner Massedelens Afstand OM fra Omdrejningsaksen. Gaar man frem paa lignende Maade med alle Legemets Massedele, saa erholder man to Systemer af Parallelkræfter, et i Planet XZ og et andet i Planet YZ, og begge virkende lodret paa Aksen CZ. Betegnes nu Massedelene med M_1, M_2, M_3 o. s. v. og deres Afstande fra CZ med r_1, r_2, r_3 o. s. v. og fra vedkommende Koordinatplaner med x_1 og y_1, x_2 og y_2, x_3 og y_3 o. s. v. samt deres Centrifugalkræfter med P_1, P_2 o. s. v. saa faar man det ene Systems Resultant Q (Fig. 60) $= Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots = \frac{P_1x_1}{r_1} + \frac{P_2x_2}{r_2} + \frac{P_3x_3}{r_3} + \ldots = \omega^2 (M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3 + \ldots)$ og det andets Resultant $R = \omega^2 (M_1y_1 + M_2y_2 + \ldots)$. Betegner endelig z_1, z_2 o. s. v. Massedelenes Afstande fra Planet XY, saa erholder man disse Resultanters Angrebspunkters Afstande $CK = k$ og $CL = l$ fra Planet XY bestemte ved Ligningerne $(Q_1 + Q_2 + \ldots) k = Q_1z_1 + Q_2z_2 + \ldots$ og $(R_1 + R_2 + \ldots) l = R_1z_1 + R_2z_2 + \ldots$, og altsaa

$$k = \frac{Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \ldots}{Q_1 + Q_2 + \ldots} = \frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \ldots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots} \text{ og}$$

$$l = \frac{R_1 z_1 + R_2 z_2 + \ldots}{R_1 + R_2 + \ldots} = \frac{M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \ldots}{M_1 y_1 + M_2 y_2 + \ldots}.$$

Paa denne Maade bliver altsaa ialmindelighed et Legemes eller Massesystems Centrifugalkræfter tilbageførte til to Kræfter, som dog ikke lader sig sammensætte til en eneste, saalænge k og l ere af forskjellig Størrelse.

§ 73.

Dersom alle Massedele befinder sig i et Plan, som staar lodret imod Ombrejningsaksen (Fig. 61), saa kan deres Centrifugalkræfter sammensættes til en eneste, fordi disses Retningslinier isaafald skjærer Aksen i samme Punkt. Beholdes Betegningerne fra foregaaende §, saa faaes for dette Tilfælde den resulterende Centrifugalkraft $P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 \sqrt{(M_1 x_1 + M_2 x_2 + ..)^2 + (M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..)^2}$. Er nu $CL = x$ og $CK = y$ Koordinaterne til Tyngdepunktet T i Massesystemet $M = M_1 + M_2 + \ldots$, saa har man (§ 38) $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots = Mx$ og $M_1 y_1 + M_2 y_2 + \ldots = My$, og altsaa $P = \omega^2 \sqrt{M^2 x^2 + M^2 y^2} = \omega^2 M \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 Mr$, naar man ved r forstaar Tyngdepunktets Afstand $CT = \sqrt{x^2 + y^2}$ fra Ombrejningsaksen CZ.

Vinkelen $PCX = \alpha$, som Centrifugalkraftens Retningslinie danner med CX, bestemmes ved Ligningen $\text{tang.}\alpha = \frac{R}{Q} = \frac{My}{Mx} = \frac{y}{x}$.

I det foreliggende Tilfælde sees altsaa, at **Centrifugalkraftens Retning gaar gjennem Massesystemets Tyngdepunkt, og at den virker som om samtlige dets Dele var sammentrængte i dette Punkt.**

Tillæg. Naar et Legeme lader sig dele i parallele Skiver, hvis Tyngdepunkter samtlige falder i en ret Linie, som er parallel med Ombrejnigsaksen, saa er $x = x_1 = x_2$ o. s. v. saavelsom $y = y_1 = y_2$ o. s. v. og derfor ogsaa $r = r_1 = r_2$ o. s. v. Man faar altsaa det hele Legemes Centrifugalkraft $P = \omega^2 (M_1 r + M_2 r + \ldots) = \omega^2 Mr$ og dens Angrebspunkts Afstand z fra Planet YX (Fig. 60) bestemt ved

$$z = \frac{(M_1 z_1 + M_2 z_2 + \ldots)r}{(M_1 + M_2 + \ldots)r} = \frac{M_1 z_1 + M_2 z_2 + \ldots}{M_1 + M_2 + \ldots}.$$

Heraf kan man finde Centrifugalkraften for ethvert symmetrisk Legeme, hvis Symmetri-Akse gaar parallel med Ombrejningsaksen. Falder et saadant Legemes Symmetri-Akse sammen med Omdrejningsaksen, saa bliver $r = 0$ og altsaa dets Centrifugalkraft ogsaa lig Nul. Naar ingen ydre Kræfter virker paa et sig saaledes omdrejende Legeme, vil det bibeholde sin Omdrejning og Stilling, uden at man behøver at fastholde Omdrejningsaksen, og denne kaldes derfor i dette Tilfælde en fri Akse.

Ottende Kapitel.

Om Tyngdekraftens Virkninger ved Bevægelse paa foreskreven Vej.

§ 74.

Befinder et Legeme, hvis Vægt er V, sig paa et Skraaplan HF (Fig. 33), saa er ifølge § 46 dets bevægende Kraft $P = V \,.\, \sin.\alpha$, naar α betegner Skraaplanets Vinkel med Horisonten. Antages at Legemet glider nedad, saa har alle dets Dele en fælles Acceleration

$$p = \frac{P}{M} = \frac{V \,.\, \sin.\,\alpha}{V} \,.\, g = g \sin.\,\alpha,$$

i hvilket Udtryk M betegner Legemets Masse og g det frie Falds Acceleration. Man faar altsaa $p : g = \sin.\,\alpha : 1 = FR : FH$, d. e. den Acceleration, hvormed Bevægelsen foregaar nedad Skraaplanet, forholder sig til det frie Falds Acceleration ligesom Skraaplanets Højde til dets Længde.

Glider Legemet nedad med Begyndelseshastigheden Nul, og man ved v forstaar dets Hastighed efter Forløbet af t Sekunder samt ved s den i t Sekunder tilbagelagte Vej, saa har man ifølge § 7:

$$v = g \sin.\,\alpha \,.\, t = 31{,}_{25} \sin.\,\alpha \,.\, t \text{ Fod, og}$$

$$s = \frac{g \sin.\,\alpha}{2} t^2 = 15{,}_{625} \sin.\,\alpha\ t^2 \text{ Fod.}$$

Det bemærkes, at der i disse Formler ikke er taget noget Hensyn til Gnidningen.

Foregaar Bevægelsen med en vis Begyndelseshastighed c, saa anvendes de i §§ 8 og 9 fundne Formler. Derefter bliver for det opadgaaende Legeme Endehastigheden $v = c - g \sin.\,\alpha \,.\, t$, og den tilbagelagte Vej $s = ct - \frac{1}{2} g \sin.\,\alpha \,.\, t^2$, hvorimod man for det nedadgaaende Legeme faar:

$$v = c + g \sin.\,\alpha \,.\, t \text{ og } s = ct + \tfrac{1}{2} g \sin.\,\alpha \,.\, t^2.$$

§ 75.

Forestiller ABC (Fig. 62) et retvinklet Triangel, hvis Hypothenus AC er vertikal, saa vil et Legeme formedelst Tyngden tilbagelægge Vejene AB, BC og AC i ligestore Tidsdele. Tænker man sig nemlig AB som et Stykke af et Skraaplan, som med Horisonten danner Vinkelen ADC $= \alpha$, samt at et Legeme for at falde fra A til B behøver t Sekunder, saa har man AB $= \frac{g}{2}$ sin. α . t^2; i samme Tid vil det fra A vertikalt faldende Legeme tilbagelægge Vejen s $= \frac{gt^2}{2}$, og da nu AB $=$ AC . sin. α, saa bliver s $=$ AC. Drages BE ∦ AC og CE ∦ AB, saa sees paa lignende Maade, at BC vil tilbagelægges i samme Tid som BE d. e. som AC. Man kalder AB, BC og AC ligetidige eller isokrone Linier.

Da alle Korder, som støder sammen i et Punkt af Periferien ere Katheter i retvinklede Triangler, hvis fælles Hypothenus er Diameteren gjennem hint Punkt, saa vil alle Korder, som støder sammen i en Cirkels øverste eller nederste Punkt, blive isokrone.

§ 76.

Betegner v_1 den Hastighed, som et Legeme opnaar ved at falde ned ad et Skraaplans Længde FH (Fig. 50), og v den Hastighed, som det opnaar ved at falde gjennem dets Højde FR, saa har man v $= \sqrt{2g \, . \, FR}$ og $v_1 = \sqrt{2g \, \sin. \alpha \, . \, FH}$. Da nu FR $=$ FH . sin. α, saa bliver v $= v_1$, hvoraf sees, at et Legeme ved at falde gjennem et Skraaplans Højde opnaar samme Hastighed som det vilde have opnaaet ved at falde ned ad dets Længde. Heraf følger igjen, at et Legeme opnaar ens Hastighed, naar det falder ned ad forskjellige Skraaplaner af ens Højde.

§ 77.

Forestiller AB og BC (Fig 63) to Skraaplaner, som støder sammen under en Vinkel ABC, saa vil et Legeme, som falder fra A til B, naar det ankommer til B, søge med dets her opnaaede Hastighed Bv $=$ v at gjennemløbe BD. Tænker man sig Hastigheden v opløst i to andre, den ene $Bv_1 = v_1$ lodret paa BC og den anden $Bv_2 = v_2$ parallel med BC, saa vil alene denne sidste paaskynde Legemets Fald nedad BC. Er Vinkelen DBC $= \psi$, og forstaar man ved a det Tab i Hastighed, som Legemet lider ved at maatte gaa over paa BC, saa kan man antage $a = v - v_2 = v - v \cos. \psi = v\,(1 - \cos. \psi)$. Ved en kontinuerlig krum Linie er ψ meget nær $=$ Nul, altsaa $\cos. \psi = 1$ og følgelig $a = 0$.

§ 78.

Et paa en horisontal Akse hængende Legeme er i Ligevægt, saalænge dets Tyngdepunkt ligger i Lod under Aksen; men bringes Tyngdepunktet ud af denne Stilling og overlades nu Legemet til sig selv, saa antager det en svingende Bevægelse (oscillation). Ethvert om en horisontal Akse svingende Legeme kaldes ialmindelighed en Pendel. Ved en enkelt eller mathematisk Pendel forstaar man et materielt Punkt, som man tænker sig forbundet med Aksen formedelst en Linie uden Vægt; derimod kaldes Pendelen sammensat eller fysisk, naar den bestaar af et eller flere fysiske Legemer. Vi vil først betragte den mathematiske Pendel.

Bliver den i C ophængte Pendel (Fig. 64) bragt fra sin lodrette Stilling CM til Stillingen CA og derpaa overladt til sig selv, saa vil dens Masse M, ifald Tyngden virker uforanderligt paa samme, gaa tilbage til Punktet M med accelererende Bevægelse og ankomme did med en Hastighed v, hvis Højde $\frac{v^2}{2g}$ er lig Faldhøjden DM (§§ 76 og 77). Formedelst denne Hastighed gjennemløber Pendelen nu paa den anden Side Buen MB = MA og stiger derved igjen til Højden DM. Fra B falder den paany tilbage til M og A og saaledes vilde den vedblive at gaa frem og tilbage i Cirkelbuen AB, dersom ikke Luftens Modstand og Aksegnidningen omsider bragte den i Hvile.

Pendelens Bevægelse fra A til B kaldes en Svingning og Buen AB Svingningsbuen (amplitude); den Vinkel MCA, som svarer til en halv Svingningsbue, kaldes Elongations- eller Udslagsvinkelen; endelig heder Tiden, hvori Pendelen gjør en Svingning, Svingningstiden.

§ 79.

En mathematisk Pendels Svingningstid kan for mindre Udslagsvinkler bestemmes paa følgende Maade.

Pendellængden AC = MC være = r (Fig. 65) og den Fald- eller Stighøjde MD, som svarer til en Svingning, være = h. Antages, at Pendelens materielle Punkt er faldt fra A til G og sættes den til denne Bevægelse svarende Faldhøjde DH = x samt den i Punktet G opnaaede Hastighed = v, saa er $v = \sqrt{2gx}$. Forstaar man fremdeles ved τ den Tidsdel, hvori et uendeligt lidet Buestykke GK tilbagelægges, saa kan man sætte $v\tau = GK$ og altsaa $\tau = \frac{GK}{v}$ $= \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$. Beskrives nu fra Midten O af MD = h med Radien

OM en Halvcirkel MND, saa kan man af dennes Periferi afskjære et Buestykke NP, hvis Høide PQ er lig Høiden KL af Buestykket GK. Nu er

$$\triangle GKL \backsim \triangle CGH, \text{ altsaa } GK : KL = CG : GH,$$
$$\triangle NPQ \backsim \triangle ONH, \text{ altsaa } NP : PQ = ON : NH.$$

Divideres disse Proportioner med hinanden og bemærkes, at $KL = PQ$, saa faar man Forholdet mellem de nævnte Buestykker $\frac{GK}{NP} = \frac{CG \cdot NH}{GH \cdot ON}$. Nu er imidlertid, som bekjendt, $GH^2 = MH\,(2\,CM - MH)$ og $NH^2 = MH \cdot DH$, følgelig kan man sætte $\frac{GH}{NP} = \frac{CG \cdot \sqrt{DH}}{ON \cdot \sqrt{2\,CM - MH}} = \frac{r\sqrt{x}}{\frac{1}{2}h\sqrt{2r - (h - x)}}$. Man faar altsaa

$$\tau = \frac{r\sqrt{x}}{\frac{1}{2}h\sqrt{2r - (h - x)}} \cdot \frac{NP}{\sqrt{2gx}} = \frac{2r}{h\sqrt{2g\,[2r - (h - x)]}} \cdot NP$$
$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{NP}{h\sqrt{1 - \frac{h - x}{2r}}}.$$

Er nu Udslagningsvinkelen liden, saa er $\frac{h - x}{2r}$ en saa liden Størrelse, at den kan sættes ud af Betragtning, og derved faar man $\tau = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{NP}{h}$. Betegner man de Tidsdele, hvori Buen AM tilbagelægges, med τ_1, τ_2 o. s. v. og de til disse Tidsdele svarende Stykker af Halvperiferien MND med σ_1, σ_2 o. s. v., saa faar man den halve Svingningstid $= \tau_1 + \tau_2 + \ldots =$

$$= \frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}}\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots) = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{\pi h}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}},$$

hvoraf følger den hele Svingningstid

$$t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 0{,}562\,\sqrt{r},$$

hvilken Formel gjælder for alle Udslagsvinkler under 5^0 paa et Sted af Jorden, hvor g er $= 31{,}25$ Fod.

§ 80.

Da Udslagsvinkelen ikke forekommer i Formelen $t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, saa afhænger smaa Pendelsvingningers Varighed ikke af denne Vinkel, og man slutter derfor, at lige lange Pendler, som gives forskjellige (smaa) Udslagsvinkler, har samme Svingningstid.

Sætter man de til to Pendellængder r og r_1 svarende Svingningstider lig t og t_1, saa faaes $t : t_1 = \sqrt{r} : \sqrt{r_1}$. Paa et og samme Sted forholder altsaa Svingningstiderne sig som Kvadratrødderne af Pendellængderne. Forstaar man derimod ved n Antallet af den ene Pendels Svingninger i en given Tid, f. Ex. i et Minut, og ved n_1 Antallet af den anden Pendels Svingninger i samme Tid, saa har man $t : t_1 = \frac{1}{n} : \frac{1}{n_1}$, hvoraf følger $n : n_1 = \sqrt{r_1} : \sqrt{r}$. Paa et og samme Sted forholder altsaa Svingningernes Antal sig omvendt som Kvadratrødderne af Pendellængderne.

Ved en Sekundpendel forstaaes en Pendel, hvis Svingningstid er et Sekund. Sættes $t = 1$ i Formelen $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, saa faaes Sekundpendelens Længde $r = \frac{g}{\pi^2}$. For $g = 31{,}25$ bliver altsaa $r = 3{,}167$ Fod.

Af Formelen $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ benytter man sig ogsaa for at bestemme et lodret faldende Legemes Acceleration. Ere nemlig t og r bekjendte Størrelser, saa har man $g = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 r$.

§ 81.

AB (Fig. 66) forestille en fysisk Pendel, som svinger om den horisontale Akse C. Ved en saadan Pendels Svingningspunkt forstaar man et Punkt K, som ligger i den gjennem dens Tyngdepunkt T til Omdreiningsaksen dragne Perpendikulær og som, naar det for sig alene svinger om C eller udgjør en mathematisk Pendel, har samme Svingningstid som den fysiske Pendel.

Sættes den foranderlige Udslagsvinkel KCF $= \varphi$, saa kan man forestille sig, at det materielle Punkt K for et Øieblik glider ned ad et Skraaplan, hvis Heldningsvinkel mod Horisonten er KHR = KCF, og at altsaa dets Acceleration er $= g \cdot \sin. \varphi$.

Betegnes nu den fysiske Pendels Masse med M og dens Træghedsmoment med My^2, er fremdeles $TC = s =$ dens Tyngdepunkts Afstand fra Omdreiningsaksen C og altsaa Ms dens statiske Moment med Hensyn til denne Akse, og forstaar man endelig ved $r = CK$ Svingningspunktets Afstand fra C eller Længden af den mathematiske Pendel, som har fælles Svingningstid med den fysiske, — saa har man den til K reducerede fysiske Pendels Masse $= \frac{My^2}{r^2}$ (65) og den til samme Punkt reducerede Omdrejningskraft $= \frac{s}{r}$ M g sin. φ; følgelig er dette Punkts Acceleration $= \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{s}{r}$ M g sin. φ : $\frac{My^2}{r^2} = \frac{Mrs}{My^2}$. g sin. φ. For at nu denne Pendel skal have samme Svingningstid som den mathematiske, er det nødvendigt, at begge paa ethvert Sted af deres Bane har samme Acceleration, at altsaa $\frac{Mrs}{My^2}$. g sin. φ er $=$ g sin. φ, og af denne Ligning findes $r = \frac{My^2}{Ms} = \frac{\text{Træghedsmoment}}{\text{Statisk Moment}}$.

Man finder altsaa Svingningspunktets Afstand fra Omdrejningsaksen, eller Længden af den mathematiske Pendel, som har fælles Svingningstid med den fysiske, naar man dividerer den fysiske Pendels Træghedsmoment med dens statiske Moment.

Indsættes den fundne Værdi af r i Formelen $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, saa faar man følgende Udtryk for en fysisk Pendels Svingningstid

$$t = \pi \sqrt{\frac{My^2}{Mgs}} = \pi \sqrt{\frac{y^2}{gs}}.$$

Omvendt kan man af et ophængt Legemes Svingningstid finde dets Træghedsmoment, idet man sætter: $My^2 = \left(\frac{t}{\pi}\right)^2$. Mgs eller $y^2 = \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 gs$.

§ 82.

En Pendels Ophængningspunkt og Svingningspunkt kan ombyttes, d. e. man kan ophænge den ved det ene eller andet af disse Punkter uden at Svingningstiden forandres.

Forstaar man nemlig ved L Træghedsmomentet af den fysiske Pendel AB (Fig. 66) med Hensyn til dens Omdrejning om sit Tyngdepunkt T, og ved L_1 dens Træghedsmoment med Hensyn til dens Omdrejning om Aksen C, hvis Afstand CT fra Tyngdepunktet er $=$ s, saa har man ifølge § 66: $L_1 = L + Ms^2$. Er nu r Afstanden mellem Svingningspunktet K og Omdrejningsaksen C, saa har man (§ 81): $r = \frac{L_1}{Ms} = \frac{L + Ms^2}{Ms} = \frac{L}{Ms} + s$ og altsaa $r - s =$

$\frac{L}{Ms}$. Men da $r - s$ er $= KT$ eller Afstanden mellem Tyngdepunktet og Svingningspunktet, saa faaes, naar man sætter $KT = s_1$,

$$s s_1 = \frac{L}{M},$$

i hvilken Ligning s og s_1 forekommer paa samme Maade og derfor maa kunne ombyttes.

Man benytter den anførte Egenskab hos Pendelen ved den saakaldte Reversjonspendel AB (Fig. 67), hvilken er forsynet med to Knive C og K, der ere stillede saaledes mod hinanden, at Svingningstiderne bliver de samme, enten Pendelen svinger om den ene eller den anden af dem. Har man ved Flytning af Løbevægterne P og Q bragt det derhen, at Svingningstiden er den samme, enten man ophænger Pendelen i C eller i K, saa angiver begge Knives Afstand CK Længden r af den mathematiske Pendel, som svinger ligetidigt med Reversjonspendelen, og man finder nu Svingningstiden af Formelen

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Niende Kapitel.

Om Stødet.

§ 83.

Materien er uigjennemtrængelig, d. e. to Legemer kan ikke paa samme Tid indtage et og samme Rum. Naar to Legemer kommer i Berøring med hinanden paa slig Maade, at det ene søger at trænge ind i det andets Rum, saa opstaar der en Vekselvirkning mellem dem, hvilken har til Følge en Forandring i deres Bevægelsestilstande. Denne Vekselvirkning kaldes Stød (impact, collision).

Stødet kaldes centralt, naar den Retning, hvori det stødende Legemes Tyngdepunkt bevæger sig, gaar gjennem det stødte Legemes Tyngdepunkt; i modsat Fald kaldes det excentrisk. Naar Stødets Retningslinie staar lodret paa det Plan, hvori Legemerne berører hinanden, kaldes det lige, ellers kaldes det skjævt.

Tiden, som medgaar til Bevægelsens Forandring formedelst Stødet, er visstnok meget liden, men dog ikke uendelig liden; den afhænger saavel af Stødkraften som af de stødende Legemers Masse, Hastighed og Elasticitet. Man kan betragte denne Tid som bestaaende af to Perioder; i den første Periode sammentrykker Legemerne hinanden, i den anden udvider de sig igjen enten fuldkommen eller tildels.

§ 84.

Lovene for frit bevægelige Legemers lige og centrale Stød kan udvikles paa følgende Maade.

Man tænker sig at et efterfølgende Legeme A (Fig. 68), hvis Masse er M_1 og hvis Hastighed for Stødet er c_1, støder et forangaaende Legeme B, hvis Masse er M_2 og hvis Hastighed for Stødet er c_2. Fremdeles tænker man sig Stødtiden bestaaende af lige store Tidselementer τ samt at Stødkraften d. e. den Kraft, som under Stødtiden trykker A mod B, i det første Tidselement er P_1, i det andet P_2 o.s.v. Forstaar man ialmindelighed ved x den Hastighedsforandring, som et med Accelerationen p gaaende Legeme lider i Tidselementet τ, saa kan man sætte $x = p\tau$. Forstaar man nu ved p_1, p_2 o. s. v. de Accelerationer, som Kræfterne P_1, P_2 o. s. v. meddeler Massen M_1, saa har man, som bekjendt, $p_1 = \frac{P_1}{M_1}$, $p_2 = \frac{P_2}{M_1}$ o. s. v., og betegner fremdeles x_1, x_2 o. s. v. de Hastighedsforandringer, som den stødende Masse M_1 formedelst disse Accelerationer lider i hvert Tidselement τ, saa faaes $x_1 = \frac{P_1}{M_1}\tau$, $x_2 = \frac{P_2}{M_1}\tau$ o. s. v., og følgelig bliver for en given endelig Tid denne Masses Hastighedsforandring $= x_1 + x_2 + \ldots = (P_1 + P_2 + \ldots)\frac{\tau}{M_1}$. Saalænge Stødet varer, trykker naturligvis det stødte Legeme B ligesaa stærkt paa det stødende Legeme A i Retningen fra C til $-$ N, som dette trykker paa hint i Retningen fra C til $+$ N; følgelig lider A under Stødet en Hastighedsformindskelse $= (P_1 + P_2 + \ldots)\frac{\tau}{M_1}$ og beholder altsaa efter Stødet tilbage Hastigheden

$$v_1 = c_1 - (P_1 + P_2 + \ldots)\frac{\tau}{M_1}.$$

Da Stødkraften virker ligesaa stærkt paa B som paa A, saa findes paa lignende Maade som ovenfor, at Massen M_2 under Stødet lider en Hastighedsforandring $= (P_1 + P_2 \ldots)\frac{\tau}{M_2}$; men her virker Stødkraften i denne Masses oprindelige Bevægelsesretning, følgelig lider den en Hastighedsforøgelse $= (P_1 + P_2 + \ldots)\frac{\tau}{M_2}$ og erholder altsaa formedelst Stødet Hastigheden

$$v_2 = c_2 + (P_1 + P_2 \ldots)\frac{\tau}{M_2}.$$

Elimineres Størresen $(P_1 + P_2 + \ldots)\tau$ af Udtrykkene for v_1 og v_2, saa faaes følgende almindelige Formel:
$M_1 (c_1 - v_1) = M_2 (v_2 - c_2)$ eller $M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 v_2$ (I).

Ere Legemerne A og B fuldkommen uelastiske, har de med andre Ord efter Sammentrykningen ingen Bestræbelse efter igjen at udvide sig, saa ophører al Hastighedsforandring fra den stærkeste Sammentryknings Øjeblik af, og de bevæger sig derfor efter Stødet som en samlet Masse $(M_1 + M_2)$ med en fælles Hastighed, som vi vil kalde v og som findes af Formelen I, naar man der sætter $v_1 = v_2 = v$. Man faar da

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}.$$

Ere derimod Legemerne fuldkommen elastiske, saa vil de, efter at være blevne sammentrykte i Stødtidens første Periode, udvide sig i dens anden Periode, indtil hvert af dem har faaet sin oprindelige Form igjen, og derpaa fortsætte sine Bevægelser med forskjellige Hastigheder. Da det mekaniske Arbejde, som udkræves for at sammentrykke et fuldkommen elastisk Legeme netop er lig det mekaniske Arbejde, som det sammentrykkede Legeme udretter medens det indtager sin oprindelige Form, saa maa Legemernes levende Kraft (§ 29) før Stødet netop være lig deres levende Kraft efter Stødet d. e.

$$M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 = M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 \text{ eller}$$
$$M_1 (c_1^2 - v_1^2) = M_2 (v_2^2 - c_2^2) \ldots \text{(II)}.$$

Af Ligningerne I og II kan man nu finde de Hastigheder v_1 og v_2, som Legemerne har efter Stødet. Først faar man ved Division $\frac{c_1^2 - v_1^2}{c_1 - v_1} = \frac{v_2^2 - c_2^2}{v_2 - c_2}$, altsaa $c_1 + v_1 = v_2 + c_2$, og følgelig $v_2 = c_1 + v_1 - c_2$. Indsættes denne Værdi for v_2 i Ligningen I, saa følger $M_1 v_1 + M_2 v_1 + M_2 (c_1 - c_2) = M_1 c_1 + M_2 c_2$ eller $(M_1 + M_2) v_1 = (M_1 + M_2) c_1 - 2M_2 (c_1 - c_2)$, og altsaa $v_1 = c_1 - \frac{2M_2}{M_1 + M_2}(c_1 - c_2)$, samt $v_2 = c_1 - c_2 + c_1 - \frac{2M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = c_2 + \frac{2M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}.$

Tillæg. Produktet af et Legemes Masse og Hastighed plejer man at kalde dets **Bevægelsesmængde.**

De ovenfor udviklede Formler gjælder ogsaa, om det ene Legeme er i Hvile, eller om begge Legemer bevæger sig imod hinanden, eller om det enes Masse er uendelig stor i Sammenligning med det andets o. s. v. Er Massen M_2 i Hvile, saa har man $c_2 = 0$ og altsaa for uelastiske Legemer: $v = \frac{M_1 c_1}{M_1 + M_2}$, og for elastiske: $v_1 = c_1 - \frac{2M_2 c_1}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} c_1$ og $v_2 = 0 + \frac{2M_1 c_1}{M_1 + M_2}$. Bevæger Legemerne sig imod hinanden, er altsaa c_2 negativ, saa følger for uelastiske Legemer: $v = \frac{M_1 c_1 - M_2 c_2}{M_1 + M_2}$, og for elastiske: $v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 + c_2)}{M_1 + M_2}$ og $v_2 = - c_2 + \frac{2 M_1 (c_1 + c_2)}{M_1 + M_2}$. Ere i dette Tilfælde Bevægelsesmængderne ligestore, er altsaa $M_1 c_1 = M_2 c_2$, saa er ved det uelastiske Stød $v = 0$, d. e. Legemerne bringer hinanden i Hvile; ved det elastiske Stød faar man derimod $v_1 = c_1 - 2c_1 = - c_1$ og $v_2 = - c_2 + 2c_2 = c_2$, d. e. Legemerne farer tilbage fra hinanden med modsatte Hastigheder. Ere i det foreliggende Tilfælde Bevægelsesmængderne forskjellige men Masserne ligestore, saa har man for uelastiske Legemer $v = \frac{c_1 - c_2}{2}$ og for elastiske $v_1 = - c_2$ og $v_2 = c_1$.

Antages igjen, at Masserne løber i samme Retning, og at den forangaaende Masse M_2 er uendelig stor, saa har man for uelastiske Legemer: $v = \frac{M_2 c_2}{M_2} = c_2$ og for elastiske: $v_1 = c_1 - 2 (c_1 - c_2) = 2c_2 - c_1$ samt $v_2 = c_2 + 0 = c_2$; den uendelig store Masses Hastighed bliver altsaa ikke forandret ved Stødet. Er endelig den uendelig store Masse i Hvile, altsaa $c_2 = 0$, saa har man for uelastiske Legemer: $v = 0$ og for elastiske: $v_1 = - c_1$ samt $v_2 = 0$, d. e. den uendelig store Masse bliver ogsaa efter Stødet i Hvile, men i første Tilfælde mister det stødende Legeme al sin Hastighed, medens dets Hastighed i det andet Tilfælde forvandles til den modsatte.

§ 85.

Ved uelastiske Legemers Sammenstød tabes der altid nogen levende Kraft, hvorfor deres Masser efter Stødet ikke kan udrette saameget mekanisk Arbejde, som før. Før Stødet indeholder de med Hastighederne c_1 og c_2 gaaende Masser M_1 og M_2 den levende Kraft $M_1 c_1{}^2 + M_2 c_2{}^2$; efter Stødet har de med Hastigheden $v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$ gaaende Masser den levende Kraft $M_1 v^2 + M_2 v^2$. Forstaar man nu ved L det Tab af levende Kraft, som bevirkes ved Stødet, saa faar man ved Subtraktion $L = M_1 (c_1{}^2 - v^2) + M_2 (c_2{}^2 - v^2) = M_1 (c_1{}^2 - 2 c_1 v + v^2 + 2 c_1 v - 2v^2) + M_2 (c_2{}^2 - 2c_2 v + v^2 + 2c_2 v - 2 v^2) = M_1 (c_1 - v)^2 + 2M_1 v (c_1 - v) + M_2 (c_2 - v)^2 + 2M_2 v (c_2 - v)$. Her bemærkes, at $M_1 (c_1 - v)$ er $= M_2 (v - c_2)$ (§ 84, I), og følgelig faaes

$$L = M_1 (c_1 - v)^2 + M_2 (c_2 - v)^2.$$

§ 86.

Vi gaar over til at betragte det skjæve Stød mellem to Legemer A og B (Fig. 69), som bevæger sig med Hastighederne $T_1 C_1 = c_1$ og $T_2 C_2 = c_2$, hvis Retninger umiddelbart for Stødet danner Vinklerne $C_1 T_1 N = \alpha_1$ og $C_2 T_2 N = \alpha_2$ med Perpendikulæren (Normalen) $\overline{NN}$ til Legemernes Berøringsflade. M_1 være Massen af A og M_2 Massen af B. Opløses nu Hastighederne c_1 og c_2 efter Normalen og en Tangentialretning, saa vil Sidehastighederne i Normalretningen $\overline{NN}$ bevirke et centralt Stød, medens de med Berøringsfladen parallele Sidehastigheder ikke vil bevirke nogetsomhelst Stød og forbliver altsaa uforandrede. Forener man endelig ethvert Legemes efter Lovene for det centrale Stød forandrede Normalhastighed med dets uforandrede Tangentialhastighed, saa faaes begge Legemers resulterende Hastigheder efter Stødet. Forestiller f. Ex. $T_1 E_1 = c_1 \cos. \alpha_1$ og $T_2 E_2 = c_2 \cos. \alpha_2$ Normalhastighederne før Stødet og $T_1 F_1 = c_1 \sin. \alpha_1$ samt $T_2 F_2 = c_2 \sin. \alpha_2$ Tangentialhastighederne, saa vil, eftersom Legemerne ere uelastiske eller elastiske, de to første formedelst Stødet gaa over til Hastighederne

$$v = \frac{M_1 c_1 \cos. \alpha_1 + M_2 c_2 \cos. \alpha_2}{M_1 + M_2},$$

$$v_1 = c_1 \cos. \alpha_1 - (c_1 \cos. \alpha_1 - c_2 \cos. \alpha_2) \frac{2 M_2}{M_1 + M_2},$$

$$v_2 = c_2 \cos. \alpha_2 + (c_1 \cos. \alpha_1 - c_2 \cos. \alpha_2) \frac{2 M_1}{M_1 + M_2}.$$

Forestiller $T_1 K_1$ det første Legemes og $T_2 K_2$ det andets resulterende Hastighed, saa faaes

for det uelastiske Stød:

$$T_1 K_1 = \sqrt{v^2 + c_1{}^2 \sin.^2 \alpha_1} \text{ og } T_2 K_2 = \sqrt{v^2 + c_2{}^2 \sin.^2 \alpha_2},$$

for det elastiske Stød:

$T_1K_1 = \sqrt{v_1^2 + c_1^2 \sin.^2\alpha_1}$ og $T_2K_2 = \sqrt{v_2^2 + c_2^2 \sin.^2\alpha_2}$.

Betegner man endelig Vinklerne K_1T_1N og K_2T_2N eller de resulterende Hastighedsretningers Afvigninger fra Normalen med φ_1 og φ_2, saa faar man for det uelastiske Stød: $\text{tang. } \varphi_1 = \frac{c_1 \sin.\alpha_1}{v}$ og $\text{tang. } \varphi_2 = \frac{c_2 \sin.\alpha_2}{v}$, og for det elastiske Stød: $\text{tang. } \varphi_1 = \frac{c_1 \sin.\alpha_1}{v_1}$ og $\text{tang. } \varphi_2 = \frac{c_2 \sin.\alpha_2}{v_2}$.

Tillæg. Træffer Legemet A (Fig. 70) paa en hvilende uendelig stor Masse eller paa en ubevægelig Hindring B, har man altsaa $c_2 = 0$ og $M_2 = \infty$, saa følger: $v = 0$ og $v_1 = - c_1 \cos. \alpha_1$ *) d. e. ved det uelastiske Stød gaar Normalhastigheden ganske tabt, ved det elastiske forvandles den derimod til den modsatte.

For Vinkelen, som Bevægelsesretningen efter Stødet danner med Normalen har man

ved uelastisk Stød: $\text{tang. } \varphi_1 = \infty$, d. e. $\varphi_1 = 90^0$,

ved elastisk Stød: $\text{tang. } \varphi_1 = - \text{tang. } \alpha_1$, d. e. $\varphi_1 = - \alpha_1$.

Efter et uelastisk Legemes Stød mod en ubevægelig og uelastisk Hindring vil altsaa det første bevæge sig med Tangentialhastigheden $c_1 \sin. \alpha_1$ i Retningen TF langs Berøringsfladen, hvorimod et elastisk Legeme, efter at være stødt an mod en elastisk Hindring vil bevæge sig med uforandret Hastighed i en Retning TK, der ligger i samme Plan som Normalen $N\overline{N}$ og dets oprindelige Bevægelsesretning XT, og som med Normalen danner en Vinkel $KT\overline{N} = XT\overline{N}$. Vinkelen $XT\overline{N}$, som Bevægelsesretningen for Stødet danner med Normalen, kaldes **Indfaldsvinkelen** (angle of incidence) og Vinkelen $KT\overline{N}$, som Bevægelsesretningen efter Stødet danner med Normalen, kaldes **Reflexionsvinkelen**.

*) Man maa nemlig i dette Tilfælde være berettiget til at sætte $\frac{M_2}{M_1 + M_2} = 1$.

Tiende Kapitel.

Materiens Tiltrækning.

§ 87.

Ved Betragtninger over Legemernes Fald mod Jordens Overflade er man fra først af ledet til Antagelsen af en tiltrækkende Kraft, som kaldes Tyngdekraften. Den yttrer sig ikke alene gjensidig mellem Jordlegemet og ethvert Legeme paa samme, men ogsaa mellem to hvilkesomhelst Masser i Verdensrummet, og i denne Henseende kaldes den almindelig Tyngdekraft eller Gravitation. Den er uafhængig af Legemernes materielle Beskaffenhed og retter sig blot efter de hinanden tiltrækkende Massers Kvantitet og indbyrdes Afstand, idet dens Styrke forholder sig ligefrem som Masserne og omvendt som deres Afstands Kvadrat.

§ 88.

Gaar man ud fra, at alle Legemer tiltrækker hinanden indbyrdes og betragter, hvorledes et materielt Punkt m (Fig. 71) tiltrækkes af en ensartet Kugle, hvis Centrum er C, saa maa det antages, at m vil tiltrækkes lige stærkt af alle Punkter i en Cirkelperiferi HIK, der er symmetrisk med Hensyn til m. Dette uendelige Antal af tiltrækkende Punkter virker altsaa som et uendeligt Antal af ligestore Kræfter, hvis Resultant selvfølgelig maa gaa gjennem C. Heraf sluttes, at en ensartet Kugle tiltrækker et udenfor samme værende materielt Punkt som om dens Masse var sammentrængt i dens Centrum, hvoraf igjen følger, at en saadan Kugles Tiltrækning, er proportioneret med dens Masse. Solens Masse f. Ex. er 355000 Gange større end Jordens; et Legeme paa Solens Overflade maatte altsaa tiltrækkes 355000 Gange stærkere, ifald ikke dens Radie var 112 Gange større, hvilken Omstændighed igjen gjør Soltiltrækningen $112^2 = 12544$ Gange mindre. Af denne Grund vil et og samme Legeme trykkes omtrent $28\frac{1}{2}$ Gang stærkere mod Solens end mod Jordens Overflade.

§ 89.

Lad A og B (Fig. 72) forestille to kugleformige Legemer, hvis Masser ere M og m og hvis Centrers Afstand AB er $= a$. Massen M trækker da paa en Masse-Enhed, som befinder sig i B med Kraften $\frac{M}{a^2}$ og altsaa paa en Masse m, som befinder sig i samme Punkt, med Kraften $P = \frac{Mm}{a^2}$. Massen m trækker paa Masse-Enheden i Punktet A med Kraften $\frac{m}{a^2}$ og altsaa paa en sig i dette Punkt befindende Masse M med Kraften $\frac{mM}{a^2} = P$. Har man to andre kugleformige Masser N og n, hvis Centrers Afstand er b og man ved Q forstaar den Kraft, hvormed N tiltrækker n eller n tiltrækker N, saa vil man faa

$$P : Q = \frac{Mm}{a^2} : \frac{Nn}{b^2}.$$

Sættes her $N = 1$, $n = 1$ og $b = 1$, forestiller med andre Ord Q Værdien af Tiltrækningen mellem to Masse-Enheder, hvis Afstand er Længde-Enheden, saa har man følgende almindelige Udtryk for Tiltrækningen mellem to Masser M og m, hvis Afstand er $= a$:

$$P = \frac{Mm}{a^2} \cdot Q.$$

Det fremgaar imidlertid af Udviklingen, at M og m i denne Ligning betegner Masser, som enten har saa ringe Udstrækning eller ogsaa saa stor Afstand, at det kan være ligegyldigt mellem hvilke af deres Punkter man maaler Afstanden a.

§ 90.

Tiltrækningens Virkninger i uendeligt smaa Tidsdele kan man antage at være frembragte ved uforanderlige Kræfter.

Betegner g_1 den Acceleration, hvormed Tiltrækningen mellem Legemerne A og B (Fig. 72) i det første Tidselement τ af dens Virketid vil bevæge Massen m, og p_1 den Acceleration, hvormed nævnte Tiltrækning i samme Tidselement vil bevæge Massen M, saa har man $\frac{Mm}{a^2} Q = g_1 m = p_1 M$, og derfor: $g_1 : p_1 = M : m$. De Veje, som i Tidselementet τ tilbagelægges af Legemerne, forholder sig ligefrem som disses Accelerationer og følgelig omvendt som Masserne, og det indsees, at dersom Tiltrækningen pludselig ophørte at virke ved Enden af det første Tidselement, saa vilde Legemerne alligevel formedelst de erholdte Hastigheder bevæge sig mod hinanden saaledes, at ovennævnte Forhold mellem deres samtidigt tilbagelagte Veje vedligeholdtes. Virker derimod Tiltrækningen ogsaa i næste Tidselement, og bevæger den da Massen m med Accelerationen g_2 og Massen M med Accelerationen p_2, saa vil man her have $g_2 m = p_2 M$ eller $g_2 : p_2 = M : m$, hvoraf det indsees, at ligeledes de i dette Tidselement af Legemerne tilbagelagte Veje forholder sig omvendt som deres Masser. Det samme vil gjælde for hvert følgende Tidselement saaledes at man, dersom man ved s_1 og S_1, s_2 og S_2 o. s. v. forstaar de i første, andet o. s. v. Tidselement af Masserne m og M tilbagelagte Veje, ialmindelighed vil faa $s_1 : S_1 = s_2 : S_2 = \ldots M : m$ og altsaa følgende Udtryk for de i n Tidselementer tilbagelagte Veje $(s_1 + s_2 + \ldots s_n)$ og $(S_1 + S_2 + \ldots S_n)$:

$$(s_1 + s_2 + \ldots s_n) : (S_1 + S_2 + \ldots S_n) = M : m.$$

Er nu C det Punkt, hvor de hinanden tiltrækkende og oprindeligt i Hvile værende Legemer A og B vil støde sammen, er med andre Ord AC og BC disse Legemers samtidigt tilbagelagte Veje, saa har man $BC : AC = M : m$ og altsaa $(BC + AC) : BC = (M + m) : M$ samt $(BC + AC) : AC = (M + m) : m$. Sættes her a istedetfor $BC + AC$, saa faaes

$$BC = \frac{aM}{M + m} \text{ og } AC = \frac{am}{M + m}$$

d. e. begge Legemer vil støde sammen i deres fælles Tyngdepunkt.

§ 91.

Tiltrækningen af en overalt lige tyk Kugleskorpe vil ikke bevæge et i Hulningen indenfor samme værende materielt Punkt m (Fig. 73) til nogen Side. Betragter man nemlig den Virkning, som et Element A af en Kuglehinde udøver paa m, saa kan man tænke sig A som Grundfladen af en Kegle, hvis Toppunkt er i m; Forlængelsen af denne Kegles Overflade vil paa den anden Side afskjære en Keglegrundflade B, der tiltrækker m i modsat Retning af A. Betegner M_1 Massen af A og M_2 Massen af B, samt a_1 og a_2 disse Massers Afstande fra m, saa kan man sætte $M_1 : M_2 = a_1^2 : a_2^2$. Betegner fremdeles T_1 og T_2 de Kræfter, hvormed M_1 og M_2 tiltrækker Punktet m, saa har man

$$T_1 : T_2 = \frac{M_1}{a_1^2} : \frac{M_2}{a_2^2}; \text{ men ovenfor fandtes}$$

$$M_1 : M_2 = a_1^2 : a_2^2, \text{ hvoraf følger}$$

$$T_1 = T_2.$$

Da nu dette tør antages at gjælde om hvilkesomhelst Elementer, som med Hensyn til Punktet m ligger lige over for hinanden, saa maa det gjælde for hele Kuglehindens Tiltrækning; men gjælder det for denne, saa maa det ogsaa gjælde for enhver med den yderste concentrisk Kuglehinde, udenfor m, og altsaa for en Kugleskorpe, hvis Tykkelse er a_1. Man kan derfor sige om hvilketsomhelst Punkt i en ensartet Kugle, at det kun tiltrækkes af en Kugle, hvis Radius er Punktets Afstand fra Centret, eller med andre Ord, at Tiltrækningen paa et Punkt inde i en saadan Kugle vil staa i ligefremt Forhold til dets

Afstand fra Centret og i dette være lig Nul. Heraf indsees ogsaa, at en Masse, hvorpaa der ikke virker andre Kræfter end Tiltrækningen mellem dens Dele, vil være i Ligevægt, naar den har Kugleformen.

§ 92.

Alle rette Linier, som staar lodrette paa en Kugles Overflade, maa støde sammen i dens Centrum, og da nu Legemernes frie Fald er lodret, saa maa alle frit faldende Legemers Bevægelsesretninger støde sammen i Jordens Centrum. Vistnok afviger Jordens Figur noget fra Kugleformen, men Afvigelsen er saa liden, at man ikke fejler mærkeligt, naar man forklarer Tyngdekraften som en Kraft, der stræber at drage alle Legemer mod Jordens Middelpunkt. Man belæres nærmere om denne Kraft ved følgende Jagttagelser, som kan gjøres med Pendelen:

1) Lige lange Pendler, som paa samme Sted af Jorden gives forskjellige (smaa) Udslagsvinkler, har samme Svingningstid.
2) Paa samme Sted svinger lige lange Pendler lige hurtigt, af hvad Materie de end ere.
3) En Pendel svinger langsommere ved Bunden af en Grube end ved sammes Dagaabning.
4) En Pendel svinger langsommere paa Toppen af et Fjeld end ved Havfladen.

Af 1 følger, at Tyngdekraften paa et givet Sted er uforanderlig, af 2, at den virker lige stærkt paa al Materie, af 3, at den aftager, naar man fra Jordens Overflade af nærmer sig dens Middelpunkt, og af 4, at den ligeledes aftager, naar man fra Havfladen af fjerner sig fra samme Punkt.

Af Jagttagelserne 3 og 4 sees straks en Overensstemmelse mellem Tyngdekraftens og den almindelige Tiltræknings Virkninger paa et materielt Punkt, som befinder sig indenfor eller udenfor en Kugle; vi vil nærmere prøve denne Overensstemmelse, idet vi vil søge at komme til Kundskab om Loven for Tyngdekraftens Aftagelse udenfor Jorden. Astronomien lærer, at Maanen har en Centralbevægelse i en Ellipse om Jorden, som befinder sig i Ellipsens ene Brændpunkt, og deraf kan man ifølge § 70 Anm. slutte, at den Kraft, som drager Maanen mod dens Bevægelses Middelpunkt forholder sig omvendt som Afstandens Kvadrat. Antager vi Maanebanen for en Cirkel *), vil følgende tilnærmende Beregning lede os til samme Slutning. Beteg-

*) Dette kan være tilladt paa Grund af Maanebanens ubetydelige Excentricitet.

ner V Maanens Vægt, t dens Omløbstid og r dens Afstand fra Jorden, saa er den paa samme virkende Centripetalkraft lig $1{,}2633\,\frac{Vr}{t^2}$ (§ 71). Men denne Centripetalkraft er Jordens Tiltrækning eller Tyngdekraften; antages nu dennes Styrke i forskjellige Afstande fra Jorden at forholde sig omvendt som en eller anden Potens af disse Afstande, saa bliver, naar Jordradien betegnes med a, den Kraft, hvormed Tyngden virker paa Maanen, at sætte lig $V\left(\frac{a}{r}\right)^x$, og man faar altsaa Ligningen $\left(\frac{a}{r}\right)^x = 1{,}2633 \cdot \frac{r}{t^2}$. Nu er, som bekjendt, $\frac{a}{r} = \frac{1}{60}$, $r = 1215000000$ Fod og $t = 27$ Dage 7 Timer 42 Min. $= 39342 \times 60$ Sekunder, og altsaa $\left(\frac{1}{60}\right)^x = \frac{1{,}2633 \cdot 1215}{393{,}4^2 \cdot 36}$; men denne Ligning giver meget nær $x = 2$, og derfor tør vi antage, at Tyngdekraften udenfor Jorden staar i omvendt Forhold til Afstandens Kvadrat.

Ved at sammenholde de Virkninger af Tyngdekraften, som vi saaledes kjender, med de forhen anførte Tiltrækningslove, bringes vi til at antage, at den ikke er en for Jordlegemet ejendommelig Kraft, men at den kun er en Yttring af den almindelige Tiltrækning, som finder Sted mellem alle Legemer. Da Jordens Tiltrækning er saa uendeligt mange Gange større end den gjensidige Tiltrækning mellem de mindre Masser paa dens Overflade, saa indsees let, at denne sidste Tiltrækning ikke mærkes i det daglige Liv. Dens Tilstedeværelse er imidlertid paavist. Saaledes har man ved astronomiske Jagttagelser i Nærheden af adskillige Berge fundet, at disse drager et nedhængende Blylod noget til sig fra den vertikale Linie. En anden Række af Førsøg i denne Retning er først foretaget af Cawendish. Han ophængte en lang og let Vægtstang, som paa hver Ende bar en liden Blykugle, ved en lang, meget fin Metaltraad saaledes, at dennes Modstand mod Vridning var den eneste, som Vægtstangen havde at overvinde, naar den drejedes i et horisontalt Plan. Dernæst anbragte han i Nærheden af de smaa Kugler to store Blykugler, en ved hver Ende af Vægtstangen og hver paa sin Side af samme, og fandt, at Vægtstangen bevægede sig henimod disse. Englænderen Baily har gjentaget og udvidet Cawendish's Forsøg, og blandt andet ogsaa anvendt forskjellige tiltrækkende Stoffer.

§ 93.

Ved Gradmaalinger, som ere foretagne langs Meridianer under forskjellige geogr. Breder, er man kommen efter, at Jordoverfladens

Krumning er stærkere ved Ækvator end ved Polerne. Den tydske Astronom **Bessel** har ved Beregning af saadanne Gradmaalinger fundet, at Jordens Figur temmelig nær kan tænkes fremkommet derved, at en Ellipse, hvis lille Akse er Polaraksen og hvis store Akse er Ækvatordiameteren, har drejet sig om sin lille Akse. De Tal, Bessel fandt, ere: Polaraksen $= 1713{,}128$ geogr. Mil, Ækvatordiameteren $= 1718{,}874$ geogr. Mil.

Da saaledes et Legeme, som befinder sig ved Ækvator har en større Afstand fra Jordens Middelpunkt end et Legeme, som befinder sig ved en af Polerne, saa vil Tyngdekraften allerede af denne Grund virke svagere paa det første end paa det sidste. Tyngdekraftens ved Erfaring godtgjorte Svækkelse, naar man nærmer sig Ækvator, hidrører imidlertid ogsaa fra en anden Omstændighed.

Antag, at et Legeme paa Ækvator havde Vægten $V = gM$, ifald Jorden alene havde en fremskridende Bevægelse. Da den imidlertid tillige drejer sig om sin Akse i Tiden $t = 24$ Timer $= 86400$ Sekunder *), og da Ækvators Radie r er omtrent 20300000 Fod, saa angribes Legemet af Centrifugalkraften

$$P = \frac{4\pi^2 r}{gt^2} \cdot V = \frac{1}{290} V,$$

og da nu denne Kraft under Ækvator virker lige modsat Tyngdekraften, saa formindskes den sidste desformedelst med $\frac{1}{290}$.

Paa en anden Parallelkreds virker Centrifugalkraften ikke lige modsat Jordens Tiltrækning, den forandrer imidlertid kun ganske ubetydeligt dens Retning, og den Svækkelse, som Tyngdekraften desformedelst lider, er næsten lig Centrifugalkraftens Projektion paa Jordradien eller $\frac{4\pi^2 r_I}{gt^2} \cdot V \cdot \cos\beta$, naar r_I betegner Parallelkredsens Radie og β dens geogr. Brede. Antages Jorden for en Kugle, saa har vi $r_I = r \cdot \cos\beta$ og Tyngdekraftens Svækkelse paa denne Parallelkreds udgjør da

$$\frac{4\pi^2 r}{gt^2} \cdot V \cdot \cos^2\beta .$$

Som Tyngdekraftens midlere Værdi ved Jordens Overflade anser man dens Værdi paa den 45de Bredegrad, hvor den meddeler et frit faldende Legeme Accelerationen $g = 31{,}25$ Fod.

Anm. Af Jordens daglige Bevægelse lader det sig ogsaa slutte, at den, om den end oprindelig har havt Kugleformen, ikke kan have

*) Den virkelige Akseomdrejningstid er 86164 Sek.

vedligeholdt samme, thi da Centrifugalkraften er stærkest under Ækvator, saa maatte der opstaa en Fremspringning paa dette Sted og en tilsvarende Fladtrykning ved Polerne. Man kunde indvende, at dersom Jorden oprindelig har været en fast Kugle, saa vilde dens Kohæsion have hindret den nævnte Formforandring; men denne Indvending synes ikke at kunne gjælde for en Masse af Jordens Størrelse og med dens Omdrejningshastighed, naar man betænker, hvorledes Tyngdens og Centrifugalkraftens Virkninger vokser med Massen d. e. efter Kubiktal, medens Kohæsionens Modstand vokser med Tversnittet og altsaa efter Kvadrattal.

§ 94.

Da Fysikerne ikke har ladet sig nøje med at bestemme Jordens Figur men ogsaa foretaget sig at udfinde dens Vægt, skal vi antyde et Par af de Veje, som de herunder har fulgt.

Man tænke sig en liden Kugle ophængt i en ubøjelig Traad, hvis Længde er l, og paavirket af Tiltrækningen af en større Kugle, hvis Radie er r og hvis Tæthed er δ, saaledes, at den større Kugles Centrum ligger i det gjennem Pendelens Endepunkt gaaende Horisontalplan og i Afstanden a fra dette Endepunkt. Jordens midlere Tæthed være d, dens midlere Radie R, og endelig være α Vertikalliniens Vinkel med den sig i Ligevægt befindende Pendel.

Betegner nu Q Værdien af Tiltrækningen mellem to Masseenheder, hvis Afstand er $=1$, og m den lille Kugles Masse, saa angriber den store Kugles Tiltrækning samme med Kraften $\frac{{}^4/_3\pi r^3\delta . m}{a^2} . Q$ paa Vægtarmen $l . \cos . \alpha$. Jordens Tiltrækning angriber den lille Kugle med Kraften ${}^4/_3\,\pi\, R\, d . m . Q$ paa Vægtarmen $l \sin . \alpha$.

I Ligevægtstilstanden maa begge disse Kræfters Momenter være lige store, og man faar altsaa

$$\frac{r^3\delta}{a^2} . \cos . \alpha = Rd . \sin . \alpha, \text{ følgelig } \tan g . \alpha = \frac{r^3\delta}{a^2 Rd} .$$

Kan man nu iagttage den lille Vinkel α, saa har man en Ligning, hvoraf d kan findes. Ved en saadan Iagttagelse, som Maskelyne gjorde i Nærheden af et i Skotland isoleret liggende Berg Shehallion, hvis midlere Tæthed og Afstand han havde kalkuleret, fandt han Jordens Tæthed at være 4 til 5 Gange saa stor som Vandets.

Ifølge et af Cawendish anstillet Forsøg, ved hvilket en given Kugles Tiltrækning frembragte Svingninger, hvis Varighed han kunde bestemme, er Jordens midlere Tæthed omtrent $5^1/_2$ Gang saa stor som Vandets, og efter denne Angivelse skulde Jordlegemet veje omtrent 61000 Trilioner Skpd.

§ 95.

En gjennem Aarhundreder fortsat opmærksom Jagttagelse af Himmellegemernes Bevægelser har ledet til den Antagelse, at deres Materie er underkastet de samme Love, som vi uden Undtagelse iagttager ved de os nærmest omgivende eller indenfor vor umiddelbare Erfaringskreds liggende Legemer.

Planeternes Bevægelser med Hensyn paa Jorden viser sig meget indviklede, men de aabenbarer en stor Simpelhed, naar man henfører dem til Solen. De følger tre efter deres Opdager Johannes Kepler († 1631) benævnte Love, hvilke vi her fremsætter idet vi betragter Planeterne som materielle Punkter:

1. Planeterne gjennemløber under deres Bevægelse om Solens Centrum plane Kurver, og de fra Solen udgaaende Vektorradier beskriver derunder Flader, som ere proportionerede med den til deres Beskrivelse medgaaede Tid.
2. Planeternes Baner ere Ellipser, hvori Solens Centrum danner det ene Brændpunkt.
3. Kvadraterne af de forskjellige Planeters Omløbstid forholder sig som Kuberne paa deres Baners store Halvakser.

Af den første Lov følger, at Planeterne har en Centralbevægelse om Solens Centrum, mod hvilket altsaa Centripetalkraften bestandig er rettet (§ 70).

Af den anden Lov følger, at den Centripetalkraft, som angriber en og samme Planet paa de forskjellige Punkter af dens Bane, forholder sig omvendt som dens Vektorradies Kvadrat (70, Anm.).

Af den tredie Lov følger, at den paa de forskjellige Planeter virkende Centripetalkraft forholder sig omvendt som Kvadraterne af deres Afstande fra Solcentret.

Disse Sætninger, som indeholder Loven for den almindelige Gravitation ere først beviste af Sir Isaac Newton († 1726). Forinden han fandt Loven, forudsaa han den formedelst Betragtninger, som vi her vil meddele istedetfor det strænge Bevis.

Planeterne beskriver Baner af forskjellig Excentricitet. Man tør derfor antage, at de Keplerske Love ogsaa vilde gjælde for Cirkelbaner, saamegetmere som de virkeligt gjennemløbne Ellipser har en meget ringe Excentricitet. Dette forudsat, lærer den første Lov som for, at den paa enhver Planet virkende Tiltrækningskraft bestandig er rettet mod Solcentret. Den anden Lov tilkjendegiver os derimod nu intet om Kraftens Afhængighed af Afstanden, men vel kan man faa Kraften udtrykt ved Planetens Omløbstid T og dens Banes Radie R. Betegner nemlig v Planetens Hastighed, saa følger det af Forudsætningen, at denne er uforanderlig (§ 18), og forstaar man nu ved p den paa Masseenheden virkende Centripetalkraft, saa har man $p = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$. Gaar vi endelig over til den 3die Lov og forstaar vi ved p og p_1 de paa to hvilkesomhelst Planeters Masseenheder virkende Centripetalkræfter, ved R og R_1 deres Afstande fra Solen, og ved T og T_1 deres Omløbstider, saa har vi

$$p : p_1 = \frac{R}{T^2} : \frac{R_1}{T_1{}^2},$$

og da nu $T^2 : T_1{}^2 = R^3 : R_1{}^3$,

saa følger $p : p_1 = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{R_1{}^2}$,

hvilket beviser, at den paa Masseenheden virkende Tiltrækning forholder sig omvendt som Kvadratet af Masseenhedens Afstand fra Solcentret.

Efterat vi nu har søgt at skaffe os en fuldkomnere Forestilling om den Kraft, som vi i det daglige Liv kalder Tyngden: efterat vi har seet, at dens Styrke forandres i samme Forhold for alle Legemer, alt som man fjerner dem fra eller nærmer dem til Jordens Middelpunkt, samt at de af den alene bevægede Legemers Retningslinier konvergerer mod dette Middelpunkt, — skal vi til Slutning bemærke, at dens Forandringer unddrager sig vor Erfaring paa det Sted, hvor vi bor, og at vi der kan betragte Tyngdekraften som uforanderlig og alle Lodlinier som parallele.

II.

Efterretninger

om

Kongsbergs Middel- og Real-Skole.

I. Tilbageblik. 1844—1855*).

Allerede flere Aar forinden den senest stedfundne Reform af det offentlige Skolevæsen her i Landet havde der for Kongsbergs ved kgl. Resolution af 10de Januar 1824 oprettede Middelskoles Vedkommende, ligesom for flere af de øvrige Skolers, der ikke bestaae ved egne Midler, været Spørgsmaal om dens Nedlæggelse eller forandrede Organisation. Efter den ved den nævnte Resolution approberede Plan skulde Skolen indrettes efter hvad der paa den Tid blev foredraget i de nederste Klasser af Christiania Kathedralskole. Forsaavidt Udgifterne ikke dækkedes ved Skolepengene i Forening med et fast aarligt Tilskud af 200 Spd. af Oplysningsvæsenets Fond, skulde Byen udrede det Manglende ved Tilskud af Kongsbergs saakaldte almindelige Skolekasse. Ved kgl. Resolution af 22de Januar 1838 forandredes dette Forhold imidlertid derhen, at Kongsberg By eller Skolekasse forpligtedes til et bestemt aarligt Bidrag af 300 Spd. til Middelskolen, hvorimod det Offentlige overtog ved Tilskud af Oplysningsvæsenets Fond at udrede, hvad der forøvrigt foruden Skolepengene behøvedes til dens Vedligeholdelse. Skolens ringe Discipelfrekvents i de nærmest foregaaende og paafølgende Aar, da denne til enkelte Tider gik ned endog til 7—8 Disciple, foranledigede allerede da Undersøgelser om, hvorvidt Skolen burde nedlægges som Middelskole og erstattes ved en Realskole, samt hvorvidt — hed det — i saa Tilfælde et teknisk Institut burde sættes i Forbindelse med Skolen. Denne Gang blev imidlertid Resultatet af disse Undersøgelser, at Skolen besluttedes fortsat uforandret som Middelskole, hvorimod dens Udgifter til Lærernes Lønninger efterhaanden, som Vakance indtraadte i Skolens Lærerposter, bleve reduce-

*) En Udsigt over Kongsbergs Middelskoles Historie fra dens Oprettelse indtil det i nærværende Efterretninger omhandlede Tidsrum er meddeelt i "Norske Universitets- og Skoleannaler" 2den Række 2det Bind Side 161 af den konstituerede Bestyrer af Skolen, Adjunkt J. A. Mohr.

rede. Ved kgl. Resolution af 11te August 1841 fastsattes Gagen for Skolens Adjunkt til 200 Spd. aarlig foruden fri Bolig, og efter den daværende Bestyrers, Overlærer Hansens dødelige Afgang 16de Marts 1842 blev ifølge kgl. Resolution af 28de Juni 1843 Overlærer- og Bestyrerposten kundgjort ledig med en aarlig Gage af 350 Spd. og fri Bolig. Ved disse Reduktioner i Lærernes Gager opnaaedes det saameget at indskrænke Skolens Udgifter, at disse, da der tillige nu viste sig nogen Stigen i Skolens Disciplantal, i de fleste Aar kunde bestrides alene ved Skolepengene og det faste aarlige Bidrag af Kommunen, medens Oplysningsvæsenets Fonds Tilskud i Aarene 1843 til 1851 i det Hele beløb sig til henved 260 Spd.

Som offentlig, af Staten bestyret Skole kunde dog ikke Middelskolen ansees sikret derved, at det efter de stedfundne Reduktioner i Lærernes Lønninger havde viist sig, at Oplysningsvæsenets Fonds Tilskud til den kun vilde blive ubetydeligt. Skolens Stilling kunde alene betragtes som midlertidig, og Staten kunde ikke vedblive at have under sin Opsigt og Bestyrelse en Skole, hvis Organisation var saa mangelfuld, som Kongsbergs Middelskole dengang var, ligesom ogsaa Byens Opofrelser for Skolen ikke stode i Forhold til dens Virksomhed og Stedets Trang til en Underviisningsanstalt, der tillige sørgede for den borgerlige eller reale Underviisning. Byen havde nemlig ingen Borger- eller Realskole. Middelskolen meddeelte kun lærd Underviisning, der besørgedes af to Lærere, Bestyreren og en Adjunkt, begge med 29 Underviisningstimer ugentlig. Skolen havde derhos kun to Klasser. Da Disciplene optoges ved deres fyldte 10de Aar, maatte Skolen enten opgive deres Underviisning 1—2 Aar forinden Konfirmationsalderen, eller ogsaa tillade, at de i en af Klasserne bleve siddende 3 eller undertiden endog 4 Aar.

At forandre Skolens Organisation saaledes, at dens Virksombed kunde udvides og blive mere stemmende med Stedets Tarv, maatte derfor fremdeles være Gjenstand for dens Bestyrelses Omsorg. Under den da i længere Tid forberedede Reform af Landets Underviisningsvæsen henstod ogsaa Spørgsmaalet om Kongsbergs Middelskoles Udvidelse og tidsmæssige Forandring uafgjort.

Det er bekjendt, hvorledes det er lykkets at iværksætte denne Reform, siden Storthinget i 1848 i Overeensstemmelse med den naadigste Proposition af 12te Febr. s. A. gik ind paa at tage sig af Realunderviisningens Fremme her i Landet ved at bevilge det Fornødne til at der ved Siden af den lærde Underviisning i de offentlige Skoler kunde optages en fuldstændig Cyklus af Realfag, samt hvorledes nu samtlige lærde Skoler, der ikke bestaae ved egne Midler, efterhaanden ere ombannede til forenede lærde og Realskoler eller Middel- og Realskoler, i hvilke Undervüsningen paa dens høiere Trin meddeles i særskilte parallele Latin- og Realklasser, medens den paa det lavere Trin er fælles for alle Skolens Disciple.

For Kongsbergs Skoles Vedkommende blev efter Foranstaltning af Departementet for Kirke- og Undervüsningsvæsenet ved sagkyndige Mænd udarbeidet en fuldstændig Plan til dens Forandring til en forenet Middel- og Realskole, efter hvilken Plan Skolen foruden Bestyreren skulde have 3 Adjunkter, 1 Hjælpelærer og 1 Timelærer, og dens Udgifter i det Hele ansloges til 2150 Spd. Da der til denne Plans Iværksættelse vilde udkræves af Kongsbergs Kommune et Tilskud til Skolen af mindst 700 Spd. aarlig, foreslog Skolens Forstanderskab af Hensyn til denne Kommunes indskrænkede Ressourcer i dets under 30te April 1849 afgivne Erklæring en noget forandret Plan til en Middel- og Realskole, hvorefter Skolens Udgifter i det Hele vilde beløbe sig til 1900 Spd. aarlig. Under de derpaa følgende Forhandlinger med Kongsbergs Byes Vedkommende blev det ved Kommunebestyrelsens Beslutning af 28de Oktober 1850 vedtaget, at fra den Tid, den bestaaende Middelskole maatte blive ombannet til en Middel- og Realskole i det Væsentligste overeensstemmende med den af Skolens Forstanderskab udarbeidede Plan, udreder Kommunen til den foreslaaede Skole 450 Spd. aarlig paa Betingelse af, at der af Oplysningsvæsenets Fonds Midler maatte blive bevilget den et Tilskud af 900 Spd., hvilke antoges at ville behøves foruden Kommunens Bidrag og de i Planen paaregnede Indtægter af Skolepengene. Disse sidste betingedes derhos fastsatte overeensstemmende med det af Skolens Forstanderskab fremsatte Forslag. Det Offentlige skulde fremdeles overtage Garantien for Skolen.

Departementet for Kirke- og Undervüsningsvæsenet, der fandt, at den af Skolens Forstanderskab udarbeidede Plan til dens Ombannelse i det Væsentligste sluttede sig saa nær til den af Departementet foreslaaede Plan, at der fra denne Side ikke antoges at nære noget afgjørende Betænkelighed ved at lade det Offentlige træde i Spidsen for en saaledes organiseret Skole, bevirkede, at i den kgl. Proposition, der forelagdes Storthinget i 1851 angaaende Tilskud til de offentlige Skoler af Oplysningsvæsenets Fonds Midler, 900 Spd. opførtes som Tilskud til en Middel- og Realskole paa Kongsberg. Efterat dette Tilskud var bevilget, blev det ved kgl. Resol. af 15de Septbr. 1851 bestemt: "At Kongsbergs Middelskole fra den Tid, som Departementet for Kirke- og Undervüsningsvæsenet nærmere bestemmer, bliver at om-danne til en forenet Middel- og Realskole overeensstemmende med den under 25de Novbr. 1848 udarbeidede Reorganisationsplan med de Modifikationer, som indeholdes i Skolens Forstanderskabs Forslag af 30te April 1849 eller som forøvrigt af førnævnte Departement maatte blive bifaldte".

Med Kirke-Departementets Samtykke blev derpaa den besluttede Ombannelse af Skolen til en forenet Middel- og Realskole paabegyndt Nytaar 1852 ved Oprettelsen af begge dens Fællesklasser samt af 1ste Latin- og 1ste Realklasse og er siden videre iværksat efterhaanden, som Disciplene have kunnet opflyttes i dens høiere Klasser. Fra Begyndelsen af Skoleaaret 1854—55 har Skolen havt alle sine Klasser.

Efter den forannævnte modificerede Plan for Skolen skulde Underviisningstimernes ugentlige Sum fordeles paa Rektor, 2 Adjunkter, 1 Hjælpelærer og 1 Timelærer, af hvilke Hjælpelæreren og de 2 Adjunkter hver skulde besørge indtil 30 Underviisningstimer om Ugen. Skolens Lærekræfter ere dog sednere noget forøgede, idet den ifølge kgl. Resol. af 7de Juli 1854 i Henhold til foregaaende Bevilling af Storthinget s. A. tillige har faaet en særskilt Lærer i Skrivning og Tegning.

For Budgetterminen 1854—57 ere Skolens aarlige Udgifter beregnede at ville udgjøre:

Bestyrerens aarlige Gage	600	Spd.
2 Adjunkter, hver 300 Spd.	600	—
Hjælpelæreren	250	—
Timelæreren	200	—
Skrive- og Tegnelæreren	48	—
Øvrige Udgifter, hvoriblandt Skolebygningens og Indventariets Vedligeholdelse . . .	250	—
	1950	Spd.

hvorimod Indtægterne ere anslaaede til:

Skolepenge omtrent	550	Spd.
Kongsberg Kommunes Tilskud	450	—
Oplysningsvæsenets Fonds Tilskud	950	—
	1950	Spd.

Skolepengene ere ifølge de mellem det Offentlige og Kommunen vedtagne Betingelser fastsatte saaledes:

i 1ste Fællesklasse	8	Spd.	aarlig
2den Fællesklasse	12	—	—
1ste Realklasse	12	—	—
2den Realklasse	18		—
1ste Latinklasse	25	—	—

2den Latinklasse	32 Spd.	ß aarlig	
Lys- og Brændepenge	2 —	72 -	—

Indtrædelsespengene ere som tidligere 4 Spd., men betales med det halve Beløb af dem, der optages i Fællesklasserne.

Det er antaget, at Skolen omtrentlig vil kunne paaregne et Antal af 35 Disciple.

Foruden det foranførte bevilgede Tilskud af 950 Spd. aarlig af Oplysningsvæsenets Fond til Bestridelse af Skolens ordinære Udgifter har den erholdt sin Deel af hvad der af Storthingene i 1851 og 1854 er bleven bevilget de offentlige lærde og Realskoler til Undervisning i Sang og Gymnastik, til Bogsamlinger samt til naturhistoriske og physikalske Samlinger. Heraf er i indeværende Budgettermin for Kongsbergs Middel- og Realskole beregnet til Sang- og Gymnastikundervisningen 80 Spd., til Bøgers Indkjøb 30 Spd. samt til Forøgelse af de naturhistoriske og physikalske Samlinger 10 Spd. aarlig.

For at kunne afgive det fornødne Lokale for den ombannede og udvidede Skole, tiltrængte Skolebygningen endeel Reparationer og Forandringer, ligesom noget nyt Inventarium maatte anskaffes. Omkostningerne ved de i den Hensigt i 1853—55 efterhaanden udførte Arbeider ere i Overeensstemmelse med den af Storthinget satte Betingelse for det Skolen bevilgede Tilskud af Oplysningsvæsenets Fond udredede af Kongsbergs Kommune og have beløbet sig til omtrent 580 Spd. Skolelokalet bestaaer nu foruden Rektors Familiebolig af 5 Læseværelser og 1 Sal, 1 Værelse til Opbevaring af Skolens Bibliothek samt 1 Værelse til de naturhistoriske Samlinger og physikalske Apparater, hvilket tillige benyttes som Læseværelse for 2den Realklasse. I en Sidebygning er indrettet Bolig for Skolens Pedel.

Skolens indre Organisation, Undervisningsgjenstandene og deres Fordeling i de enkelte Klasser samt hvad der i hvert Fag søges gjennemgaaet vil erfares, af det følgende Afsnit af disse Efterretninger, vedkommende Skolens Virksomhed i Skoleaaret 1855—56. Til den i det Foregaaende meddeelte Fremstilling af Middel- og Realskolens ydre Forhold tilføies her til Oplysning om Skolens Virksomhed i Tidsrummet 1844 — 55 endnu nogle Meddelelser om Lærerpersonalet og Discipelfrekventsen i dette Tidsrum.

Skolens Lærere have i Tidsrummet fra 1844 til 1855 været følgende:

J. H. Graff, Cand. mag. fra 1838, konstitueret Adjunkt ved Stavanger lærde og Borgerskole ved naadigst Resol. af 6te Juni 1840, Overlærer og Bestyrer af Kongsbergs Middelskole fra 31te Decbr. 1843, Rektor ved Kongsbergs Middel- og Realskole siden 6te August 1852.

J. A. Mohr, Cand. theol. fra 1835, konstitueret Adjunkt ved Kongsbergs Middelskole ved naadigst Resol. af 30te Novbr. 1841, fungerende midlertidig Bestyrer af Skolen siden Overlærer Hansens Død i Marts 1842 indtil Juli 1844 og beskikket til Sognepræst til Soledals Menighed i Juli 1845.

N. M. Harboe, Cand. theol. fra 1843, konstitueret Adjunkt ved Kongsbergs Middelskole ved naadigst Resol. af 21de Febr. 1846 og i Anledning af sin Ansættelse som Bestyrer af den borgerlige Realskole paa Moss entlediget ved naadigst Resol. af 16de Mai 1849.

Paa Grund af at Spørgsmaalet om Middelskolens Bestaaen endnu ikke var afgjort dengang, da Adjunkt Harboe erholdt sin Entledigelse, blev Skolens Adjunktpost indtil videre staaende ubesat, hvorimod ifølge Kirke-Departementets Resol. af 27de Septbr. 1850 en Timelærerpost med en aarlig Løn af 200 Spd. og fri Bolig blev kundgjort ledig ved Skolen.

A. J. Boye, Cand. theol. fra 1849, Timelærer ved Kongsbergs Middelskole fra 31te Decbr. 1850 og antaget som Hjælpelærer ved Kongsbergs Middel- og Realskole fra 31te Marts 1852.

P. J. Stub, Cand. mag. fra 1850, Adjunkt ved Kongsbergs Middel- og Realskole fra 10de Mai 1852 og Adjunkt ved Trondhjems lærde Skole fra 9de Juni 1854.

C. A. Bjerknes, Cand. mineralogiæ fra 1848 konstitueret som Adjunkt ved Kongsbergs Middel- og Realskole ved Interimsregjeringens Resol. af 1ste Januar 1853 og siden under 16de April s. A. naadigst udnævnt til dette Embede, hvorfra han under 10de Marts 1854 i Naade afskedigedes.

V. J. G. Saxild, Cand. mineralogiæ fra 1853, Adjunkt ved Kongsbergs Middel- og Realskole fra 7de Oktober 1854

M. J. Bugge, Cand. mag. fra 1853, Adjunkt ved Kongsbergs Middel- og Realskole fra 18de Novbr. 1854.

Guardein L. Stenstrup, antaget som Lærer i Skrivning og Tegning fra Januar 1852.

Organist A. Klewe, antaget som Lærer i Sang ved Skolen fra November 1854.

Saavel efter Adjunkt Harboes Entledigelse, indtil den ved Kirke-Departementets Resol. af 27de Septbr. 1850 som vakant fundgjorte Timelærerpost blev besat, som ogsaa efter Skolens Ombannelse, forinden den forenede Middel- og Realskoles Lærerposter kunde blive besatte, har Underviisningen været besørget ved midlertidig antagne Timelærere. Cand. theol. J. Laake, Bergkandidat C. A. Bjerknes, Hytteskriver N. Meidel, Cand. theol. K. Spenning, Cand. theol. M. Gade, Bergkandidat V. Saxild, Cand. theol. A. Andersen, Hytteskriver C. Andresen, Bergkandidat Rasch, Seminarist og Almuskolelærer E. Jensen samt Student J. Prahm have paa denne Maade i kortere eller længere Tid fungeret ved Skolen.

Discipelfrekventsen i det her omhandlede Tidsrum sees af følgende 2de Tabeller:

For Middelskolen fra 1843 til Udgangen af 1851.

Skoleaar.	Antal ved Skoleaarets Begyndelse.			Tilgang i Skoleaarets Løb.	Afgang i Løbet af Skoleaaret.	Antal ved Skoleaarets Slutning.
	Igjensiddende fra forr. Aar.	Nyantagne ved Aarets Begyndelse.	Tilsammen.			
1843—44	10	7	17	1	7	11
1844—45	11	0	11	1	1	11
1845—46	11	7	18	0	4	14
1846—47	14	1	15	1	4	12
1847—48	12	1	13	3	5	11
1848—49	11	4	15	0	2	13
1849—50	13	8	21	0	3	18
1850—51	18	1	19	1	7	13
1851, sidste Halvaar	13	5	18	2	1	19

For den forenede Middel- og Realskole.

Skoleaar.	Antal ved Skoleaarets Begyndelse.			Tilgang i Skoleaarets Løb.	Afgang i Løbet af Skoleaaret.	Antal ved Skoleaarets Slutning.
	Igjensiddende fra forr. Aar.	Nyantagne ved Aarets Begyndelse.	Tilsammen.			
1852, første Halvaar	19	16	35	0	2	33
1852—53	33	0	33	2	4	31
1853—54	31	4	35	1	6	30
1854—55	30	3	34	1	6	28

Ved Begyndelsen af Skoleaaret 1843—44 havde Middelskolen 10 Disciple; i de følgende 12 Aar har Skolen optaget 70 Disciple. I samme Tidsrum ere 52 Disciple udgaaede af Skolen.

Af disse have 15 absolveret Examen artium. De fleste have været privat dimitterede; 2 ere blevne dimitterede til Universitetet fra Christiania Kathedralskole Aaret, efterat de vare udgaaede fra Middelskolen.

1 af Skolens forhenværende Disciple, som havde fuldstændigen gjennemgaaet dens Kursus, blev i August 1854 optaget i Christiania Kathedralskoles 6te Klasse, og i August 1855 bleve 2 ligeledes optagne i Drammens lærde Skoles øverste Klasse.

II. Skoleefterretninger fra 1855—56.

Skolens Organisation.

Den Organisation, som Kongsbergs Middel- og Realskole har faaet ved den for Skolen ved kgl. Resol. af 15de Septbr. 1851 approberede Plan, er i sine Grundtræk den samme, som den, hvorefter de øvrige offentlige Skoler i den sednere Tid ere ombannede, til forenede lærde og Realskoler eller Middel- og Realskoler. Efter Planen for Kongsbergs Skole skal den have 2 Fællesklasser og 2 derpaa følgende og sideordnede Latin- og Realklasser. Hver Klasses Kursus er 2 aarigt. Disciplen kan optages i 8 Aars Alderen.

Undervisningsgjenstandene ere paa følgende Maade fordeelte paa Klasserne:

1ste Fællesklasse, for Disciple i Normalalderen 8 til 10 Aar. Underviisningsgjenstande: Modersmaalet, Skrivning, Tegning, Regning, Religion, Geographi, og Historie.

I denne Klasse optages Disciple, der kunne læse med Færdighed, skrive Sammenskrift og ved de første Tælleovelser ere komne saavidt, at de kunne lægge sammen og trække fra.

2den Fællesklasse, for 10 til 12 Aars Alderen. Til den foregaaende Klasses Underviisningsgjenstande kommer i første Aar Naturhistorie og Tydsk og i andet Aar tillige Fransk.

1ste Latinklasse, for Disciple i 12 til 14 Aars Alder, der skulle forberedes til Universitetet. I denne Klasse ophører Underviisningen i Skrivning og Tegning samt Naturhistorie, hvorimod Mathematik og Latin kommer til.

2den Latinklasse, for 14 til 16 Aars Alderen. I denne Klasse begynder Underviisningen i Græsk; derimod bortfalder Regning som særskilt Underviisningsfag.

1ste Realklasse, for Disciple i 12 til 14 Aars Alder. Denne Realklasses Disciple erholde særskilt Underviisning i Skrivning og Tegning, Naturhistorie og Engelsk, medens de i Modersmaalet, Regning, Religion, Geographi, Historie, Tydsk, Fransk og Mathematik have Underviisning med 1ste Latinklasses Disciple.

2den Realklasse, for Disciple i 14 til 16 Aars Alder. Til den foregaaende Realklasses Underviisningsfag kommer i denne Klasse Physik. I Modersmaalet, Religion, Geographi, Historie, Tydsk, Fransk og Mathematik er Underviisningen fælles med 2den Latinklasse.

Det Antal Timer, der i hver Klasse ugentlig anvendes til de forskjellige Underviisningsfag, sees af følgende Timefordelingstabel for Skoleaaret 1855—56:

	1ste Fællesfl.	2den Fællesfl.	1ste Realfl.	2den Realfl.	1ste Latinfl.	2den Latinfl.
Modersmaalet . .	9	5	3	2	3	2
Skrivning og Tegning	5	4	(3)	(3)		
Regning	5	4	2	(2)	2	
Religion	3	3	2	2	2	2
Geographi . . .	3	3	2	2	2	2
Historie	3	3	3	2	3	3
Naturhistorie . . .		2	(2)	(2)		
Tydsk		5	3	2	3	2
Fransk		*3	2	2	2	2
Mathemathik . . .			5	4	5	4

	1ste Fælleskl.	2den Fælleskl.	1ste Realkl.	2den Realkl.	1ste Latinkl.	2den Latinkl.
Engelsk			(3)	(3)		
Latin					8	8
Græsk						6
Physik				(4)		
	28	29 el. 32	30	30	30	31

( ) betegner særskilt Undervißning for Realklasserne.

* at Faget først indtræder i andet Aar og med særskilte Timer.

Efter at have gjennemgaaet Skolens fuldstændige Kursus vil Disciplen i Regelen være i en Alder af 16 Aar. Fra 2den Latinklasse vil han da kunne optages i en fuldstændig Skoles øverste Klasse for efter 1 eller 2 Aars fortsat Skoledannelse at dimiteres til Universitetet.

Det er Realskolens Formaal – foruden at bibringe sine Disciple de almindelige Skolekundskaber – tillige i de levende Sprog, Mathematiken, Naturvidenskaberne og Tegning at føre dem til det Trin af Dannelse, da de enten i det praktiske Liv eller i en eller anden Specialskole kunne fortsætte sin Uddannelse i en mere særegen Retning, afpasset efter Enhvers fremtidige Livsstilling. De Disciple, der have gjennemgaaet Skolens Realafdeling og bestemme sig for Handel, Skibsfart, Landbrug, Fabrikvæsen eller anden borgerlig Levevei, ville have erhvervet sig tilstrækkelige Forkundskaber for med Nytte at kunne optages i saadanne Specialskoler, som en polytekniſk Undervißningsanstalt, en Landbrugsskole, et Handelsinstitut o. s. v. Efter at have gjennemgaaet 1ste Realklasse eller i et halvt Aar frekventeret 2den Realklasse, ville de have gjennemgaaet, hvad der fordres til Optagelse paa Krigsskolen, men ville – som Forholdet mellem denne og Realskolen for Nærværende er ordnet – ikke direkte kunne dimiteres til den.

Lærerpersonalet.

Ved den i 1854 bevilgede Løn til en særskilt Skrive- og Tegnelærer i 6 Timer om Ugen opnaaedes det tillige, at den øvrige Timeundervißning i Skolen kunde henlægges til en egen Timelærerpost med en aarlig Løn af 200 Spd. Denne Post er i det forløbne Skoleaar bleven besat, idet Departementet for Kirke- og Undervißningsvæsenet under 29de Septbr. f. A. har antaget Cand. philosophiæ J. N. Prahm som Timelærer ved Skolen.

Under 23de Mai f. A. bifaldt Departementet, at Artillerilieutenant M. Gran antoges som Skolens Lærer i Gymnastik for Sommermaanederne Mai til September.

Da Skolens Hjælpelærer, Cand. theol. A. J. Boye havde erholdt Tilladelse til at være fraværende fra sin Post i en Tid af 6 Maaneder fra Begyndelsen af Sommerferierne f. A., for under et Ophold i Frankrig videre at uddanne sig i det franske Sprog, hvori han er Lærer ved Skolen, bleve hans Forretninger med Departementets Samtykke midlertidigen besørgede af Cand. theol. J. Schjørn.

Disciplantallet.

I det sidste Kvartal af forrige Skoleaar havde Skolen 31 Disciple. Af disse udmeldtes af Skolen strax efter den offentlige Examen 3 Disciple af 2den Latinklasse, hvoraf 2 bleve optagne i Drammens fuldstændige lærde Skoles øverste Latinklasse. Skolen havde saaledes 28 Disciple tilbage fra foregaaende Aar. Efter Sommerferierne i August f. A. optoges 9 nye Disciple, saa at ved Skoleaarets Begyndelse Skolen havde i Alt 37 Disciple, hvoraf

i 2den	Latinklasse	4	Disciple.
- 1ste	—	3	—
- 2den	Realklasse	3	—
- 1ste	—	13	—
- 2den	Fællesklasse	8	—
- 1ste	—	6	—

Af disse ere i Aarets Løb 4 Disciple udmeldte af Skolen, nemlig:

Septbr.	f. A.	1	Discipel	af 2den	Realkl.	for at gaae til Handelen,
—	—	1	—	af 1ste	—	paa Grund af Fraflyttelse.
Decbr.	—	1	—	af 2den	—	for i Christiania at forberede sig til Optagelse paa Krigsskolen,
Marts	d. A.	1	—	af 2den	—	for at gaae til Handelen.

Derimod ere i Aarets Løb 6 Disciple optagne i Skolen. Det høieste Antal af Disciple har været 40. I nærværende Øieblik har Skolen 39 Disciple, hvilke ere fordeelte saaledes:

i 2den	Latinklasse	5	Disciple.
- 1ste	—	4	—
- 2den	Realklasse	[illegible]	—
- 1ste	—	13	—
- 2den	Fællesklasse	8	—
- 1ste	—	9	—

Ved Skoleaarets Begyndelse havde 2den Realklasse 3 Disciple, hvoraf 2 vare fra foregaaende Aar og 1 opflyttet fra 1ste Realklasse. I Løbet af Skoleaaret ere udgaaede af Skolen saavel de 2 ældre Disciple af denne Klasse, som den sidst opflyttede, der var bestemt til Optagelse paa Krigsskolen, hvorfor Underviisningen i denne Klasse i Skoleaarets sidste Kvartal maatte indstilles.

Siden dens Oprettelse i Begyndelsen af Skoleaaret 1854—55 har 2den Realklasse i det Hele havt 5 Disciple.

Af Skolens Disciple i det forløbne Skoleaar have 8 været Sønner af udenbyesboende Forældre.

Underviisningen.

I Skoleaaret har Underviisningen paa følgende Maade været fordeelt mellem Skolens Lærere:

Rektor J. H. Graff har læst i 2den Latinkl. Latin, i 2de Latin- og Realkl. Historie, i 1ste Latin- og Realkl. Historie, i 2den Fælleskl. Norsk og i 1ste Fælleskl. Historie; tilsammen 22 Timer ugentlig.

Adjunkt V. J. G. Saxild: i 2den Latin- og Realkl. Mathematik, i 2den Realkl. Regning, geometrisk Tegning, Naturhistorie og Physik, i 1ste Latin- og Realkl. Mathematik og Regning, i 1ste Realkl. Naturhistorie og i 2den Fælleskl. Naturhistorie; 26 Timer ugentlig.

Adjunkt M. J. Bugge: i 2den Latin- og Realkl. Norsk og Tydsk, i 2den Latinkl. Græsk, i 1ste Latin- og Realkl. Norsk og Tydsk, i 1ste Latinkl. Latin og i 2den Fælleskl. Tydsk; 29 Timer ugentlig.

Hjælpelærer, Cand. theol. A. J. Boye: gjennem hele Skolen Religion og Fransk, desuden i 1ste Fælleskl. Norsk og Geographi; 29 Timer ugentlig.

Timelærer, Cand. philosophiæ J. N. Prahm: i 2den Realkl. Engelsk, i 1ste Latin- og Realkl. Geographie, i 1ste Realkl. Engelsk, i 2den Fælleskl. Regning, Geographi og Historie samt i 1st Fælleskl. Regning; 23 Timer ugentlig.

Guardein L. Steenstrup: Skrivning og Frihaandstegning; 6 Timer ugentlig.

Organist A. Klewe: Sang 2 Timer om Ugen.

Artilleri-Lieutenant M Gran: Gymnastik 4 Timer ugentlig i Sommermaanederne.

Opgave over hvad der i Skoleaaret er gjennemgaaet i de forskjellige Klasser:

1ste Fællesklasse.

Norsk (Boye). Læseøvelser efter Jensens Læsebog, hvoraf er gjennemgaaet 1ste og 2den Afdeling samt nogle andre udvalgte Stykker. Endeel lettere Digte ere lærte udenad. Forskjellen mellem Ordklasserne og de vigtigste Sætningsdele mundtlig forklaret af Læreren og indøvet ved Analyse. Retskrivningsøvelser deels ved Afskrivning efter Bog deels for Klassens ældre Disciple (Afd. a) ved Diktat.

Religion (Boye). Afd. a. Udvalgte bibelhistoriske Fortællinger af det gamle og nye Testamente efter Wexels Bibelhistorie; Katekismens 5 Parter med passende Exempler af Bibelhistorien efter Gislesens Katekismus. Afd. b. Udvalgte bibelhistoriske Fortællinger af det gamle Testamente efter Wexels Bibelhistorie,; af Katekismen de 3 første Parter. Begge Afdelinger nogle Psalmevers udenad.

Historie (Rektor). Afd. a. Af Nissens "Verdenshistoriens vigtigste Begivenheder" fra Begyndelsen til Borgerkrigene i Rom (Side 83). Afd. b. Grundtvigs historiske Børnelærdom, hvortil af Læreren er knyttet mundtlige Fortællinger.

Geographi (Boye). Afd. a. Efter Geelmuydens Geographi for Begyndere det Vigtigste af de europæiske Landes Geographi samt af de øvrige Verdensdele de vigtigste Bjerge, Floder, Indsøer, Grændser og Inddelinger fornemmelig ved Hjælp af Væggekartet. Afd. b. Ved Lærerens mundtlige Forklaring af Væggekarterne, tildeels ogsaa ved Benyttelse af den nævnte Lærebog en Oversigt over Jordklodens Lande og Have, af Europa dets vigtigste Bjerge, Floder o. s. v. samt Hovedstæderne, derefter Norges, Sveriges og Danmarks Geographi mere fuldstændigt.

Regning (Prahm). Indøvelse af Regnetabellerne, Øvelse i at læse og skrive Tal, de 4 Species i hele ubenævnte og benævnte Tal; Hovedregning.

Skrivning (Steenstrup). Øvelse i latinsk Skrift efter Forskrifter.

Tegning (Steenstrup). Elementære Øvelser efter Hetsch's Methode ("Grundtræk af Tegnekunsten til Brug ved Elementær-Underviisningen").

2den Fællesklasse.

Norsk (Rektor). Afd. a. Af M. C. Hansens Grammatik Lydlæren, Læren om Sætningen og Sætningsforbindelse, Ordklasserne, Formlæren samt Retskrivnings- og Interpunktionslæren. Afd. b. Det Samme mindre fuldstændigt. Grammatiken indøvet ved Analyse.

Af Jensens Læsebog er gjennemgaaet de 3 første Afdelinger til S. 129. Nogle Digte ere lærte udenad. Skriftlige Arbeider 1 Gang ugentlig, Afd. a. lettere Stileøvelser samt grammatikalske Øvelser efter Borgens Veiledning indtil 12te Lektion, Afd. b. Retskrivningsøvelser efter Diktat samt at gjengive en læst Fortælling.

Tydsk (Bugge). Afd. a. Smith Hjorth's Læsebog for Begyndere fra Side 92—180; derefter af P. Hjorth's større Læsebog omtr. 23 Sider; desuden Formlæren efter Autenrieths Grammatik for Begyndere. Afd. b. Smith Hjorth's Læsebog omtr. 40 Sider; af Grammatiken det Væsentligste af Formlæren.

Fransk (Boye). Afd. a. Borrings "manuel de langue française" 50 Side; desuden Brinchmann's Grammatik ud.

Religion (Boye). Afd. a. Af Pontoppidans Forklaring til 2den Part samt 2den Troesartikel og 3die Part, desuden 1ste og 3die Troesartikel samt 4de og 5te Part efter Katekismen; Afd. b. Af Forklaringen fra Begyndelsen til 3die Troesartikel. Begge Afdelinger Wexels Bibelhistorie fra Begyndelsen til "Anhang" Nogle Psalmer ere lærte udenad efter Wexels "Udvalg af christelige Psalmer".

Historie (Prahm). Afd. a. Af Nissens "Verdenshistoriens vigtigste Begivenheder" fra Begyndelsen til den store nordiske Krig S. 284; Afd. b. Samme Lærebog fra den første puniske Krig til Religionskrigene i Frankrig (S. 73—230).

Geographi (Prahm). Afd. a. Geelmuydens Geographi for Begyndere. Afd. b. Af samme Lærebog Europa og dets Lande; de øvrige 4 Verdensdele mindre fuldstændigt.

Naturhistorie (Saxild). Afd. a. Af Prosch's Lærebog i Naturhistorien "Dyreriget"; Afd. b. Samme Lærebog fra "Dyrerigets Inddeling" til "Krebsdyr".

Regning (Prahm). Afd. a. Efter Saxilds Regnebog gjennemgaaet og indøvet de forskjellige Regningsarter til og med "Procentregning"; Afd. b. De 4 Species, Brøken og enkelt Reguladetri. Begge Afdelinger fortsat Øvelse i Hovedregning.

Skrivning (Steenstrup). Øvelse i latinsk og gothisk Skrift efter Forskrifter.

Tegning (Steenstrup). Elementære Øvelser efter Hetsch's Methode samt Frihaandstegning efter Fortegninger deels med Blyant deels med sort og hvidt Kridt.

1ste Latinklasse.

Norsk (Bugge). M. C. Hansens Grammatik fuldstændig gjennemgaaet og repeteret; af Jensens Læsebog gjennemgaaet den sidste Halvdeel; 18 Digte lærte udenad; 3 Stile maanedlig, meest af fortællende og skildrende Indhold.

Tydsk (Bugge). Af P. Hjorth's tydske Læsebog 68 Sider og af Autenrieth's større Grammatik Formlæren; skriftlige Stileøvelser 2 Gange om Maaneden.

Fransk (Boye). Afd. a. Af Borrings "manuel" 40 Sider og af hans „études littéraires" 8 Sider; Afd. b. Af Borrings "manuel" 48 Sider. Desuden Repetition af Brinchmanns Grammatik samt af Borrings Grammatik de vigtigste Regler for Udtalen.

Latin (Bugge). Afd. a.*) De 3 sidste Bøger af Phædri Fabler og Ciceros 3 første katilinariske Taler; af Madvigs latinske Grammatik Syntaxen 2det Afsnit til Kap. 7 (§ 411); 1 Stiil ugentlig. Afd. b. Elementært Kursus: Borgens latinske Læsebog Side 17—53 og af Madvigs Grammatik det Vigtigste af Formlæren, verba verbalia af Ordbannelseslæren og af Syntaxen indtil § 288 (i Genitiv); desuden de 5 første Feltherrer af Cornelius Nepos.

Religion (Boye). Af Pontoppidans Forklaring 3die Troesartikel, 4de og 5te Part samt Repetition fra Begyndelsen til 2den Part; af Kurtz's Bibelhistorie fra 6te Afsnit (Jødernes Landflygtighed og Hjemkomst) til § 146 i det nye Testamentes Historie (Jesus tages tilfange). Nogle Psalmer efter Wexels "Udvalg".

Historie (Rektor). Afd. a og b. Af Nissens "Verdenshistoriens vigtigste Begivenheder" fra den nordamerikanske Frihedskamp til Enden (Side 302—395). Derefter Afd. a af Lassens Lærebog i Verdenshistorien 1ste Deel Oldtidens Historie fra Begyndelsen til S. 48 og Romerstatens Historie til de gracchiske Uroligheder (S. 133—171); Afd. b. Repetition af Nissens Lærebog fra Begyndelsen til Side 139 (Pavedømmet).

Geographi (Prahm). Af Geelmuydens Lærebog Europa og de europæiske Stater indtil Spanien.

Mathematik (Saxild). Afd. a. Holmboes Arithmetik fra §

---

*) 1 Discipel, der under Forældrenes midlertidige Ophold paa Kongsberg optoges i Oktober f. A. fra Trondhjems lærde Skoles 3die Klasse og igjen vil udgaae af Skolen ved Skoleaarets Slutning. Efter Forældrenes Ønske har hans Underviisning i Latin været indskrænket til 5 Timer ugentlig, for at han i de øvrige 3 Latintimer kunde deeltage i Underviisningen i Engelsk med 1ste Realklasse.

52 til 87 med Forbigaaelse af § 65 4de til 9de Tillæg, § 66—70, den i § 83 forekommende Opgave at bortskaffe et Rodtegn samt § 84; af Holmboes ved Odén udgivne Geometri fra § 46 til Enden med Forbigaaelse af § 113, § 120—125, § 138—141 samt Opløsningen af Opgaven i § 143.

Afd. b. Holmboes Arithmetik fra Begyndelsen til § 54 med Forbigaaelse af Kjædebrok og § 33 samt af Geometrien til § 53.

Begge Afdelinger ere 1 Time ugentlig tillige øvede i geometriske Konstruktioner og Beviisførelser.

Regning (Saxild). Efter Saxilds Regnebog Afd. a. Kjæderegelen, Rentesregning, Rabat-, Diskonto- og Terminregning (§ 61—75). Afd. b enkelt og sammensat Reguladetri, Procentregning, Kjæderegelen og simpel Rentesregning (§ 54—64).

2den Latinklasse.

Norsk (Bugge). Af Wergelands Læsebog 1ste Deel Indledningerne til de deri forekommende Digt- og Skriftarter tilligemed de fleste Exempler; Læsebogen ogsaa benyttet som Hjælpemiddel ved Øvelserne i mundtligt Foredrag med og uden Bog. Af Borgens Veiledning Afd. a de vigtigste Lektioner indtil Exkurserne, Afd. b indtil 33te Lektion. Maanedlig 2—3 Stile af lettere ræsonnerende eller historisk Indhold.

Tydsk (Bugge). Af P. Hjortбs tydske Læsebog 48 Sider samt Schillers Wilhelm Tell; af Autenrieths Grammatik Syntaxen samt Repetition af Formlæren; 2 Stile maanedlig.

Fransk (Boye). Af Borrings "études littéraires" flere prosaiske Læsestykker samt et Par poetiske, tilsammen 108 Sider; af Borrings Grammatik Formlæren og de vigtigere Regler af Syntaxen indtil: "Om Brugen af Hjælpeverber".

Latin (Rektor). Ciceros 4 Taler mod Katilina og Salust om den katilinariske Krig; desuden af Ovids Metamorphosis 2den Bog Vers 1—408 og 3die Bog Vers 1—252 og 511—733 samt Virgils Æneide 2den Bog. Af Madvigs Grammatik fra § 300—431 samt Repetition af de vigtigste Regler fra § 206—300. Latinsk Stiil eller Oversættelse 2 Gange om Ugen og Afd. a i den sidste Tid tillige nogle Extemporalstile paa Skolen.

Græsk (Bugge). Afd. a. Xenophons Cyropædi 1ste Bog samt af Homers Iliade 1ste, 3die og 6te Bog. Repetition af Tregders Formlære, desuden af Madvigs Syntax fra Medium til Infinitiv. Afd. b. Elementært Kursus: det Vigtigste af Tregders græske Formlære med Exempler af Langes græske Læsebog; desuden af

Xenophons Cyropædi 1ste Bog indtil 4de Kap. 18de Sekt.

Religion (Boye). Af Petri Lærebog 2den Deel: Læren (§ 165—302) og af Kurtz's Bibelhistorie fra 6te Afsnit (Jødernes Landsflygtighed og Hjemkomst) ud.

Historie (Rektor). Af Lassens Lærebog i Verdenshistorien 1ste Deel Middelalderens Historie indtil 2det Afsnit C, Tydskland under Hohenstauferne (S. 214—385) samt Fortsættelse af de nordiske Rigers Historie i Middelalderen indtil Kalmarunionens Ophævelse (S. 442—480). Desuden Grækernes og Romernes Mythologi fornemmelig efter Tregders Haandbog.

Geographi (Saxild). Af Ovelmuydens Lærebog Indledningen samt Europa og de europæiske Rigers Geographi indtil Nederlandene.

Mathematik (Saxild). Afd. a. Holmboes **Arithmetik** fra § 64 til § 88 og Afd. b samme Lærebog fra Begyndelsen til § 64 med Forbigaaelse af Kjædebrøk. Af **Geometrien** begge Afdelinger Holmboes ved Odén udgivne Lærebog fuldstændig gjennemgaaet og repeteret. Disciplene have stadigen været øvede i at løse mathematiske Opgaver, hvorhos Afd. a er veiledet i at behandle geometriske Problemer algebraisk.

1ste Realklasse.

I Norsk, Tydsk, Fransk, Religion, Historie, Geographi, Mathematik og Regning har Klassen gjennemgaaet det Samme, som er anført for 1ste Latinklasse. Desuden har 1ste Realklasse særskilt gjennemgaaet:

Engelsk (Prahm). Afd. a. Autenrieths "English Reader" Side 1—65 og Sammes engelske Grammatik indtil Syntaxis; Afd. b. "English made easy" gjennemgaaet til Enden. Stile 1 Gang ugentlig.

Naturhistorie (Saxild). Prosch's Lærebog "Planteriget" suppleret ved Uddrag af Printz's Botanik. Disciplene have været øvede i at bestemme de paa Skolen medbragte Planter, ligesom Læreren har foretaget med dem et Par Excursioner. Desuden er repeteret Rovdyrene efter Asbjørnsens Naturhistorie.

Skrivning (Steenstrup). Fortsatte Øvelser 1 Time ugentlig.

Tegning (Steenstrup). Øvelse i Frihaandstegning efter Fortegninger med sort og hvidt Kridt.

2den Realklasse.

Denne Klasse har havt Undervisning fælles med den tilsvarende 2den Latinklasse i Norsk, Tydsk, Fransk, Religion, Historie, Geographi samt Mathematik og i disse Fag gjennemgaaet det samme Pensum, som anført for sidstnævnte Klasse med Undtagelse af, hvad denne i en særskilt Historietime har læst af Grækernes og Romernes Mythologi. Desuden har 2den Realklasse gjennemgaaet *):

Engelsk (Prahm). Af Autenrieths "English Reader" 60 Sider samt nogle poetiske Stykker (S. 347—361); af Sammes engelske Grammatik fra de uregelmæssige Verber til Enden. Stile 1 Gang om Ugen.

Naturhistorie (Sarild). Afd. a. Botaniken efter Naturens Bog indtil Skjermplanter og Afd. b "Planteriget" efter Prosch's Lærebog. Bestemmelse af medbragte blomstrende Planter.

Physik (Sarild). Varmelæren og Elektriciteten efter et Diktat af Læreren. Det Gjennemgaaede indøvet ved Løsning af Opgaver.

Regning (Sarild). Afd. a. Efter Sarilds Regnebog fra Pengeberegningninger og Vexelregning indtil "Anhanget"; Afd. b efter samme Regnebog Procentberegning, Kjæderegelen, Rente-, Rabat-, Diskonto-, Termin- og Selskabsregning.

Geometrisk Tegning (Sarild). Fortsat Øvelse i den orthographiske Projektionstegning fornemmelig efter Raetzes Lærebog.

Frihaandstegning (Steenstrup). Fortsat Øvelse efter Fortegninger med Kridt.

Ved Underviisningen i Sang have de af Skolens Disciple, der

---

*) I Skoleaaret 1851—55 har denne Klasses Pensum i de for den særskilte Underviisningsfag været følgende:

Engelsk: Af Autenrieths "English Reader" omtr. 70 Sider samt nogle poetiske Stykker; af Sammes Grammatik fra Begyndelsen til Kap. 4 i Tillæg til Ordføiningslæren. Desuden Stile 1 Gang ugentlig.

Naturhistorie: Af Mineralrigets Naturhistorie Beskrivelse af de vigtigste enkelte Mineralier fra de salinske Ertsers Orden samt af de vigtigste Bjergarter og en kort Oversigt over Jordskorpens Bygning.

Physik: I første Halvaar Arndtsens Lærebog til § 137 med Forbigaaelse af Akustiken; i andet Halvaar Physikens mekaniske Deel tildeels efter et Diktat af Læreren, hvorhos Disciplene stadigen have udregnet Opgaver til Indøvelse af det Gjennemgaaede.

Regning: Efter Sarilds Regnebog fra Reguladetri til Læren om Pengeberegninger.

Geometrisk Tegning: Af Læren om Projektionstegning er forklaret Punkters og Liniers Projektion paa 3de retvinklede Planer, hvorpaa Disciplene ere øvede i Fremstilling af regulære Fladers og Legemers Projektioner paa saadanne Planer samt i Fremstilling af deres virkelige Størrelse ved Udfoldning.

Frihaandstegning: Fortsat Øvelse efter Fortegninger med sort og hvidt Kridt.

have Stemme og Gehør og kunne deeltage i denne Underviisning, været deelte i 2de Afdelinger, som hver have havt 1 Time om Ugen. Med Eleverne af den ældre Afdeling har været anstillet Træffeøvelser hvorhos 18 tostemmige Sange og Choraler ere indøvede. Eleverne af den yngre Afdeling have været øvede i Nodelæsning og Taktinddeling og have med Ledsagelse af Instrumentet indøvet 10 eenstemmige Sange og nogle af de meest brugelige Choraler.

Underviisningen i Gymnastik er atter begyndt i Mai Maaned d. A.

Skolens Bibliothek og Samlinger.

Bibliotheket, der ved Udgangen af 1854 talede 463 Numere, har i 1855 havt en Tilvæxt af 27 foruden Fortsættelser af forskjellige allerede tidligere modtagne og anskaffede Værker, saa at den hele Samling ved Udgangen af 1855 i Katalogen var opført under 493 Numere. Flere af Bøgerne ere modtagne ved Gave fra Universitetet og fra Departementet for Kirke- og Underviisningsvæsenet. Ligeledes har det kgl. Nordiske Oldskrift-Selskabs Sekretær, Prof. Rafn paa dette Selskabs Vegne tilsendt Skolens Bibliothek som Gave "Annaler for nordisk Oldkyndighed og Historie" for 1852 og 1853 samt "Antikvarisk Tidsskrift" for 1846—54 3 Bind. Til Skolens Samling af Programmer er i Aaret modtaget de her i Landet i 1855 saavelsom de i Danmark, Slesvig og Reykjavik i 1854 og 1855 udkomne Skoleprogrammer.

Af Storthinget i 1851 bleve de fornødne Midler bevilgede til Anskaffelse af passende Naturaliesamlinger og physikalske Apparater for de forenede lærde og Realskoler. Af disse Samlinger har denne Middel- og Realskole modtaget Samlingen af physikalske Instrumenter, hvilken efter Kirke-Departementets Foranstaltning tilsendtes Skolen i Febr. 1855. Samlingen er ordnet og opstillet og bestaaer af 49 forskjellige Instrumenter.

Skolen eier en Mineraliesamling, for største Delen bestaaende af Mineralier, den har modtaget ved Gaver af Sølvværks-Direktørerne Bøbert og Møller. Forskjellige Prøver af ikke-sølvholdige Mineralier fra de kongsbergske Gruber er modtaget til Samlingen ved velvillig Foranstaltning af Sølvværks-Direktionen. En Fortegnelse er optaget, hvorefter den oryktognostiske Deel af Samlingen bestaar af 433 Explr. og den geognostiske af 133, deels henhørende til Petrographien og Formationslæren deels til Forsteningslæren.

Uddrag af Skolens Regnskaber fra 1855.

A. Vedkommende den egentlige Skolekasse:

Indtægt.

1,	Beholdning fra f. A.	224	Spd.	24½	ß.
2,	Kommunens Bidrag	450	—	«	-
3,	Oplysningsvæsenets Fonds Tilskud	1030	—	«	-
4,	Af samme Fond som Gagetillæg	200	—	«	-
5,	Skolepenge, Lys- og Brændegenge samt Indtrædelsespenge	620	—	93	-
6,	Testimoniegebyhr	24	—	«	-
7,	Ifølge Revision af Regnsk. for f. A.	2	—	«	-
		2551	Spd.	27½	ß.

Udgift.

1,	Lærernes Lønninger, deri iberegnet det Rektor tilstaaede Gagetillæg					1893	Spd.	29	ß.
2,	Læreren i Sang	32	Spd.	60	ß.				
	Læreren i Gymnastik	20	—	«	-				
	Gymnastikapparater	35	—	80	-	88	—	20	-
3,	Regnskabsførerens Godtgjørelse					26	—	85	-
4,	Bibliotheket					25	—	97	-
5,	Brænde og Lys					32	—	76	-
6,	Forskjellige Udgifter					226	—	18	-
7,	Mod Refusion af Kommunen					21	—	75	-
8,	Beholdning					236	—	107½	-
						2551	Spd.	27½	ß.

B. Bibliotheket vedkommende:

Indtægt.

1,	Beholdning fra 1854	17	Spd.	30	ß.
2,	Dets aarlige Tilskud	30	—	«	-
		47	Spd.	30	ß.

Udgift.

1,	For Bøger og deres Indbindning	25	Spd.	97	ß.
2,	Beholdning	21	—	53	-
		47	Spd.	30	ß.

Legater eier Skolen ikke; heller ikke er der for Tiden Adgang til at erholde Fripladse ved denne Skole.

Tabel,

hvorefter den aarlige offentlige Examen i Kongsbergs Middel- og Realskole afholdes i Juli 1856.

	Formiddag.	Eftermiddag.
Onsdag den 2den Juli.	2den Latinklasse } Latinsk Stiil. 1ste Latinklasse } 1ste Realklasse } 2den Fællesklasse } Skrivning. 1ste Fællesklasse }	2den Latinklasse Latinsk Oversættelse og tydsk Stiil. 1ste Latinklasse } Tydsk og engelsk Stiil. 1ste Realklasse }
Thorsdag den 3die Juli.	2den Latinklasse } 1ste Latinklasse } Mathematik og Regning, skriftlig. 1ste Realklasse } 2den Fællesklasse Regning, skriftlig. 1ste Fællesklasse Regning. Prahm.	2den Latinklasse } 1ste Latinklasse } Norsk Stiil. 1ste Realklasse } 2den Fællesklasse } Retskrivning. 1ste Fællesklasse }
Fredag den 4de Juli.	2den Latinklasse Mathemathik. Sarild. 1ste Latinklasse } Religion. Boye. 1ste Realklasse } 2den Fællesklasse Norsk. Rektor.	
Løverdag den 5te Juli.	2den Latinklasse Græsk. Bugge. 1ste Latinklasse } Mathematik. Sarild 1ste Realklasse } 2den Fællesklasse Religion. Boye. 1ste Fællesklasse Historie. Rektor.	

Mandag den 7de Juli.	2den Latinklasse Historie. Rektor. 1ste Latinklasse } Norsk. Bugge. 1ste Realklasse } 2den Fællesklasse Regning. Prahm. 1ste Fællesklasse Religion. Boye.	2den Latinklasse Latin. Rektor. 1ste Realklasse Engelsk. Prahm.
Tirsdag den 8de Juli.	2den Latinklasse Geographi. Sarild. 1ste Latinklasse } Historie. Rektor. 1ste Realklasse } 2den Fællesklasse Historie. Prahm. 1ste Fællesklasse Norsk. Boye.	2den Latinklasse Religion. Boye. 1ste Latinklasse } Tydsk. Bugge. 1ste Realklasse } 2den Fællesklasse Naturhistorie. Sarild.
Onsdag den 9de Juli.	2den Latinklasse Fransk. Boye. 1ste Latinklasse } Geographi. Prahm. 1ste Realklasse } 2den Fællesklasse (a og b) Tydsk. Bugge. 2den Fællesklasse (a) Fransk. Boye.	2den Latinklasse Norsk (Kl. 4½). Bugge. 1ste Latinklasse Latin. Bugge. 1ste Realklasse Naturhistorie. Sarild. 1ste Fællesklasse Geographi. Boye.
Thorsdag den 10de Juli.	2den Latinklasse Tydsk. Bugge. 1ste Latinklasse } Fransk. Boye. 1ste Realklasse } 2den Fællesklasse Geographi. Prahm.	2den Latinklasse } 1ste Latinklasse } Kl. 3 Sang. Klewe. 1ste Realklasse } 2den Fællesklasse } Kl. 5 Gymnastik. Gran. 1ste Fællesklasse }

Examen begynder hver Formiddag Kl. 8 og hver Eftermiddag Kl. 3.

Udfaldet af Examen bekjendtgjøres Løverdagen den 12te Juli Kl. 10 Formiddag, da tillige de af Disciplene under Examen afgivne skriftlige Besvarelser samt deres Prøvearbeider i Tegning og Skrivning blive fremlagte.

Derefter indtræde Sommerferierne, der vedvare indtil den 11te August.

Til at overvære Skolens offentlige Examen, der afholdes efter foranstaaende Tabel, samt Bekjendtgjørelsen af dens Udfald har jeg den Ære paa Medlæreres og egne Vegne herved at indbyde Disciplenes Forældre og Foresatte samt Enhver Anden, der maatte interessere sig for Skolen.

Kongsberg i Juni 1856.

Joh. Graff.

Rettelser.

Side 3,	Linie 19	f. o.	Forandrtng	for Forandring.
— 15,	— 7	f. o.	bodles	for bodies.
— 18,	— 12	f. o.	Fød	for Fod.
— „	— 14	f. n.	Udtryttet	for Udtrykket.
— 30,	— 1	f. o.	en Del	for en liden Del.
— 66,	— 4	f. o.	Størresen	for Storrelsen.

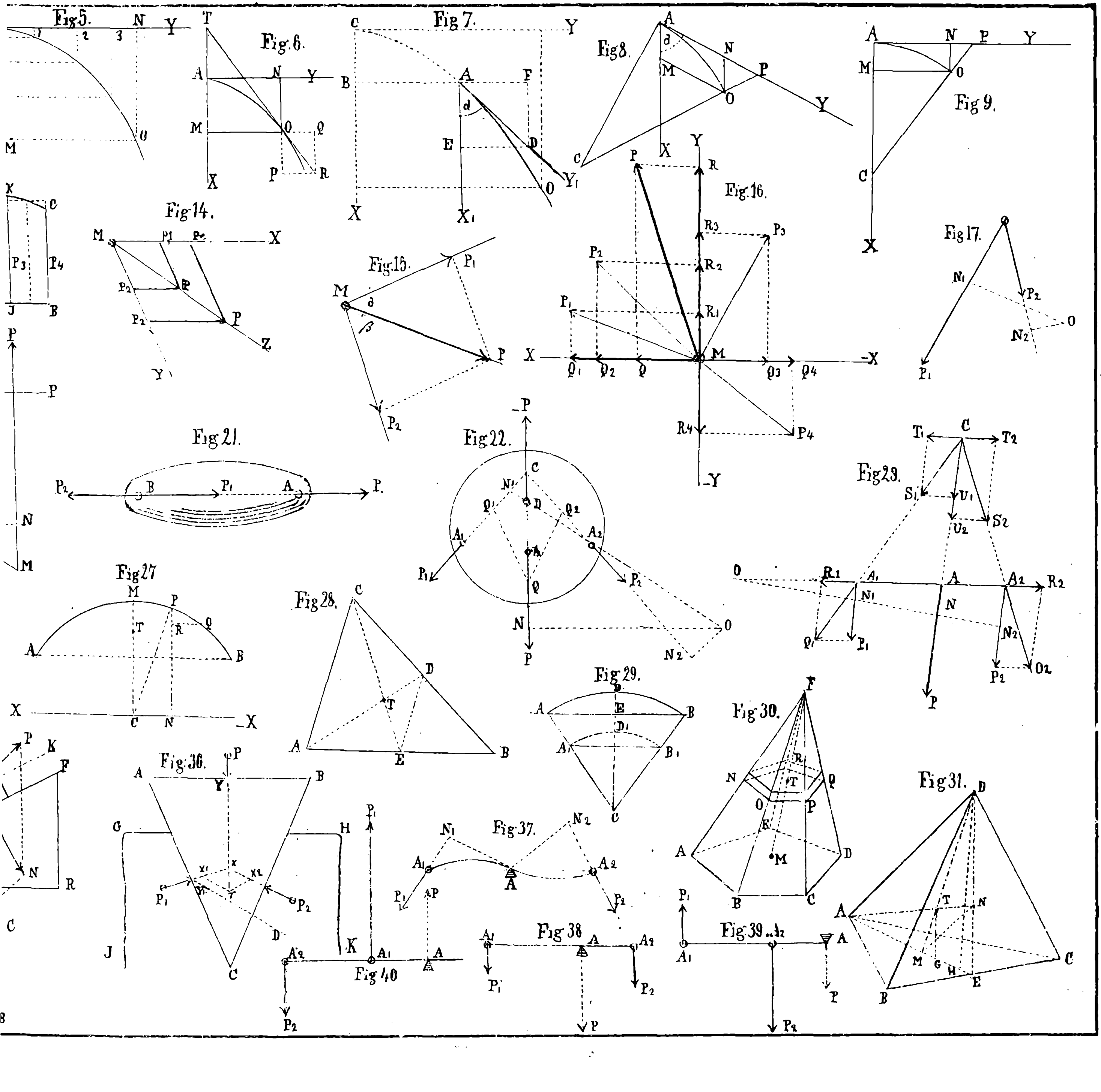
Fig 5.
Fig 6.
Fig 7.
Fig 8.
Fig 9.
Fig 14.
Fig 15.
Fig 16.
Fig 17.
Fig 21.
Fig 22.
Fig 23.
Fig 27
Fig 28.
Fig 29.
Fig 30.
Fig 31.
Fig 36.
Fig 37.
Fig 38
Fig 39
Fig 40

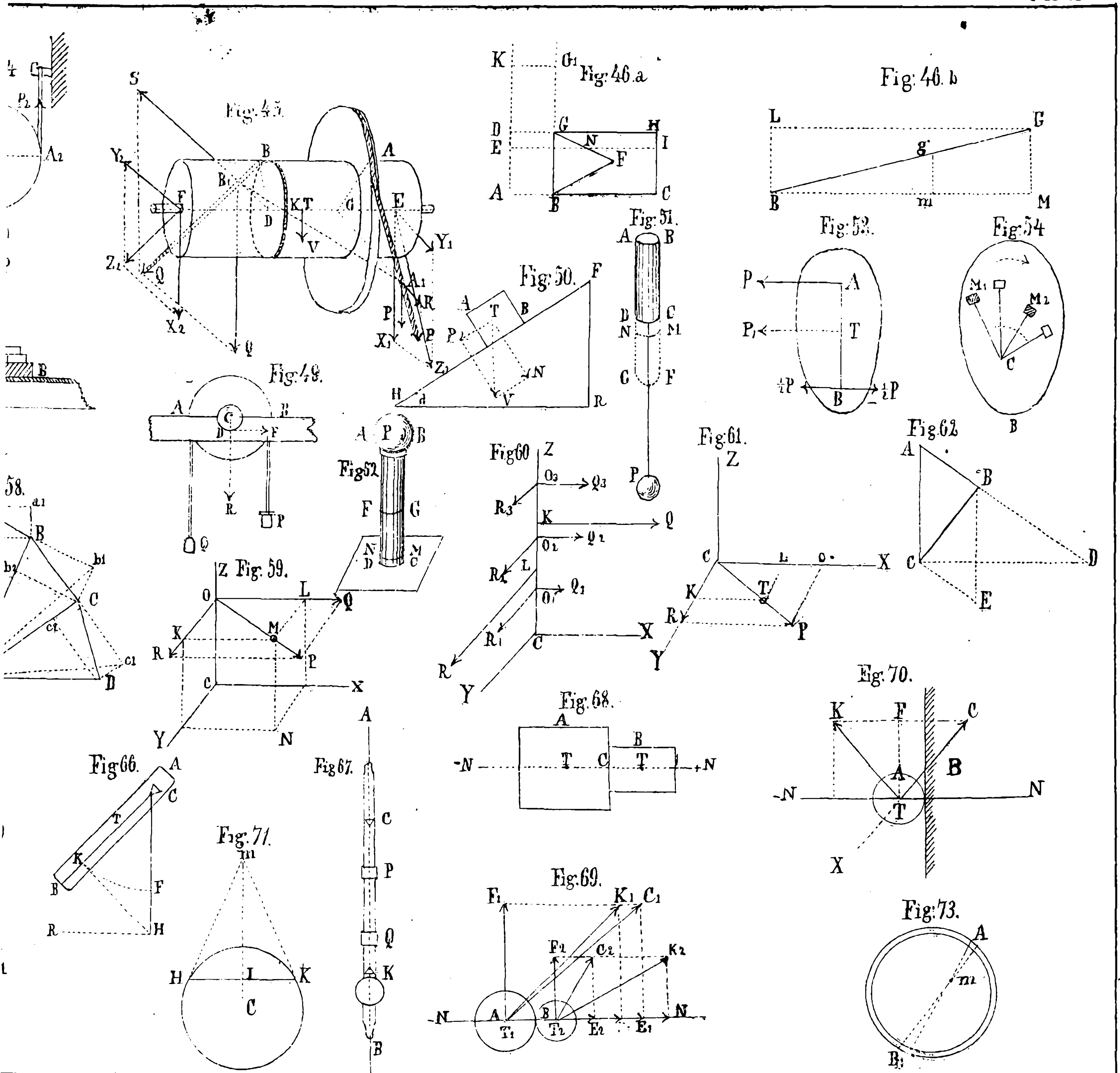
Fig. 45.
Fig. 46. a
Fig. 46. b
Fig. 48.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52
Fig. 53.
Fig. 54
58.
Fig. 59.
Fig. 60
Fig. 61.
Fig. 62
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 73.

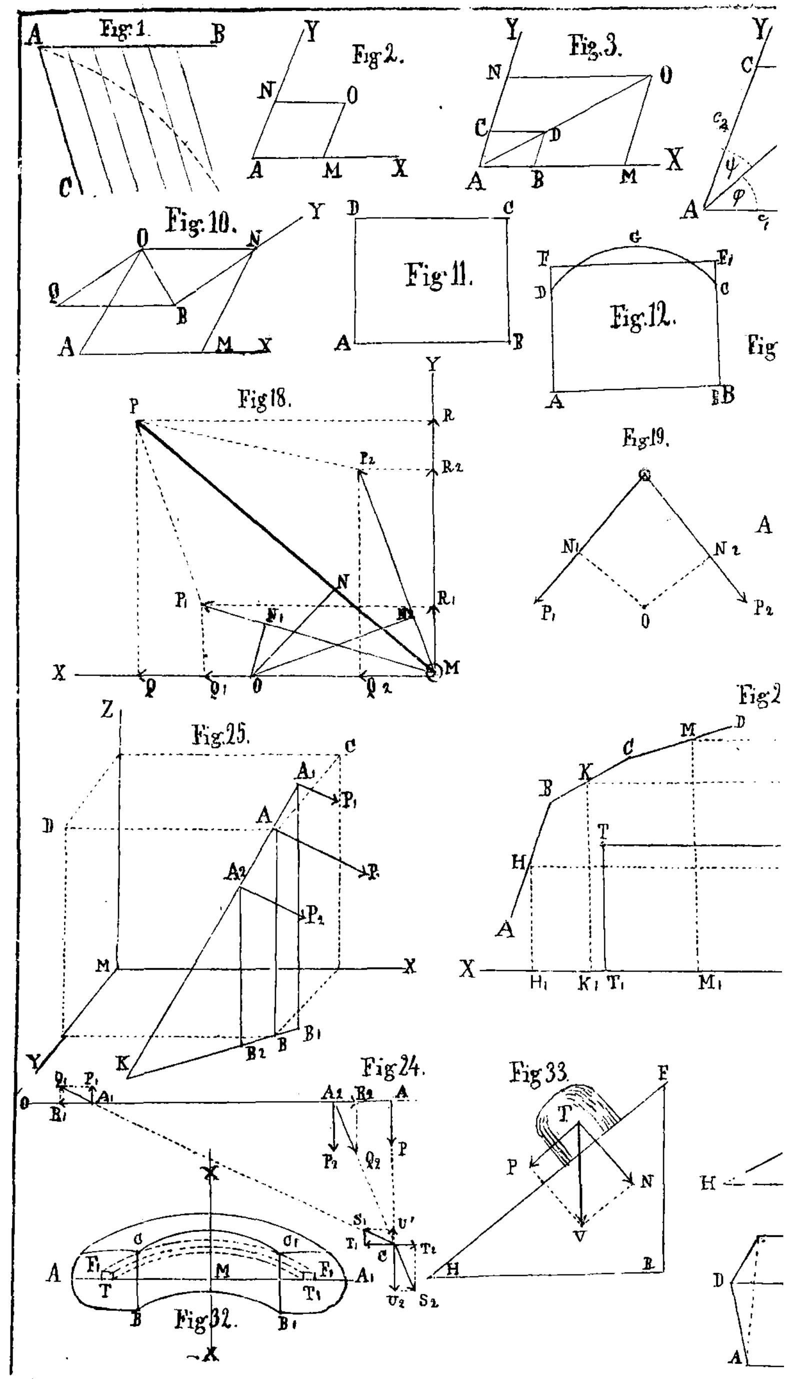
Fig 1.
Fig 2.
Fig 3.
Fig 10.
Fig 11.
Fig 12.
Fig 18.
Fig 19.
Fig 25.
Fig 24.
Fig 33.
Fig 32.