Programm

des

Königl. Domgymnasiums zu Magdeburg,

zu Ostern 1847

herausgegeben

vom

Director des Gymnasiums

Konsistorialrath D. K. Funk.

Inhalt: 1. Ueber die Analysis auf der Kugel. Von R. Gorgas.
2. Schulnachrichten über den Zeitraum von Michaelis 1845 bis Ostern 1847.

9.

Magdeburg, 1847.

bei W. Heinrichshofen.

Ueber die

Analysis auf der Kugel.

von

R. Gorgas,
Candidat des höheren Schulamts.

Einleitung.

Die Rechnung mit gekrümmten Coordinaten auf einer krummen Oberfläche ist eine erst neuerdings in Frankreich versuchte Modification der bisher gebräuchlichen Analysis; aus diesem Grunde läßt sich von ihrer Literatur nur Weniges sagen. Als einleitendes Werk über die analytische Entwickelung von Curvengleichungen auf der Kugeloberfläche insbesondere ist zu nennen: »Analysis auf der Kugel von Carl Dietrich 1843«, in welchem bis zu den Kegelschnitten die wichtigsten Verhältnisse von Punkten und Linien auf sphärischen Oberflächen abgehandelt werden, wobei als Coordinatenachsen zwei sich rechtwinklig schneidende Normalkreise zu Grunde gelegt worden sind.

Meine Absicht ist es nun, in vorliegender Abhandlung das genannte Werk zu erweitern, zugleich aber auch die ganze analytische Entwickelung aus einem andern Prinzipe herzuleiten, indem ich jede Curve auf der Kugeloberfläche als den Durchschnitt der letztern mit einer gegebenen Oberfläche betrachte und also von den räumlichen drei Coordinaten auf die Normalkreiscoordinaten den Uebergang mache.

Wie eng übrigens die Analysis auf der Kugel mit der auf der Ebene zusammenhange, ist theilweise schon von Andern dargethan worden, theils werden sich auch im Laufe der Entwickelung Beweise genug dafür finden. Eins soll noch angedeutet werden, was einen Vorzug der analytischen Sphärik vor der ebenen Analysis bedingt: daß nämlich selbst Kurven mehrfacher Krümmung durch zwei Coordinaten bestimmt werden können, die ein leichteres Eliminiren und Berechnen möglich machen, als die drei Coordinaten der Analysis im Raume.

Erstes Kapitel.

Vom Punkte auf der Kugel.

§. 1.

Bestimmt man einen Punkt **P** auf der mit dem Radius **r** construirten Kugel durch seine drei Raumcoordinaten **x, y, z**, bezogen auf ein rechtwinkliges Achsensystem im Centrum, und legt durch letzteres zwei Ebenen, deren eine durch das **x**, die andere durch das **y** des Punkts geht, so schneiden diese die Kugeloberfläche in zwei Normalkreisen, auf denen im Durchschnittspunkte jenes **P** zugleich liegt; es geht außerdem die eine durch die **X**=und die andere durch die **Y**=Achse der Raumcoordinaten. Den Bogen des ersten Normalkreises zwischen **P** und der **YZ**=Ebene, nenne man ξ, den andern Bogen zwischen **P** und der **XZ**=Ebene, zum zweiten Normalkreis gehörig, nenne man η, ferner den Bogen, in welchem eine durch die Achse der $\left\{\begin{matrix}\mathbf{Y}\text{ u. }\mathbf{Z}\\ \mathbf{X}\text{ u. }\mathbf{Z}\end{matrix}\right\}$ gelegte Ebene die Kugel schneidet, nenne man $\left\{\begin{matrix}\text{die }\eta\text{=Achse}\\ \text{die }\xi\text{=Achse}\end{matrix}\right\}$ des sphärischen Systems; der eine Punkt, in dem beide letztgenannten Achsen sich schneiden, heiße der A n f a n g s p u n k t der s p h ä r i s c h e n C o o r d i n a t e n. Ein auf beiden Achsenbogen senkrechter Normalkreis, dessen Pol der Anfangspunkt der sph. Coord. ist, werde der G r ä n z k r e i s genannt; die Normalentfernung des Punkts **P** vom Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten sei $= \delta$. Alsdann findet man folgende Gleichungen:

$$(1.)\ x = r \sin \xi,\ y = r \sin \eta,\ z = r \cos \delta.$$

und daraus: $$(2.)\ \sin^2 \xi + \sin^2 \eta = \sin^2 \delta.$$

Den Bogen auf der ξ=Achse vom Anfangspunkt bis zum Fußpunkte des Bogens η nenne man ξ', den auf der η=Achse ebenso bis zum Fußpunkte des Bogens ξ nenne man η', so ist

$$(3.)\ \frac{x}{z} = \tang \xi',\ \frac{y}{z} = \tang \eta'$$

daraus: $$(4.)\ \tang^2 \xi' + \tang^2 \eta' = \tang^2 \delta$$

und $$(5.)\ \sin \xi = \tang \xi' \cos \delta;\ \sin \eta = \tang \eta' \cos \delta.$$

§. 2.

Da aber die trigonometrischen Functionen eine Vieldeutigkeit hinsichtlich der zugehörigen B o g e n g r ö ß e involviren, wenn man nicht auf deren V o r z e i c h e n Rücksicht nimmt, so ist es nöthig, zu untersuchen, welche Lagen der Punkt **P** annimmt, je nachdem die Vorzeichen positiv oder negativ genommen werden. Die sphärische Oberfläche zerfällt aber durch die gehörige Erweiterung der 3 räumlichen Coordinatenebenen in acht Quartiere, welche so benannt werden sollen:

Rechts von der **YZ**=Ebene, oberhalb der **XZ**=Ebene auf der vordern Halbkugel liegt das e r s t e (**I.**) Quartier, auf der hintern Hälfte das z w e i t e (**II.**) Quartier. Links von der **YZ**=Ebene oberhalb der **XZ**=Ebene auf der $\left\{\begin{matrix}\text{hintern}\\ \text{vordern}\end{matrix}\right\}$ Kugelseite das $\left\{\begin{matrix}\text{d r i t t e}\\ \text{v i e r t e}\end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix}\textbf{III.}\\ \textbf{IV.}\end{matrix}\right\}$ Quartier, auf der Kugelhälfte aber, welche unter der **XZ**=Ebene liegt, liegen die Quartiere **1**. **2**. **3**. und **4**, polarisch den gleichnamigen entgegengesetzt.

Hieraus ergeben sich folgende Tabellen=Data:

Größe von				Vorzeichen von:				Lage
ξ zwischen	η zwischen	ξ' zwischen	η' zwischen	sin ξ	sin η	tang ξ'	tang η'	des Punkts P im
0°— 90°	0°— 90°	0°— 90°	0°— 90°	+	+	+	+	**I.** Quartier.
0°— 90°	0°— 90°	90°—180°	90°—180°	+	+	—	—	**II.** » »
270°—360°	0°— 90°	180°—270°	90°—180°	—	+	+	—	**III.** » »
270°—360°	0°— 90°	270°—360°	0°— 90°	—	+	—	+	**IV.** » »
180°—270°	270°—360°	180°—270°	180°—270°	—	—	+	+	**1** » »
180°—270°	270°—360°	270°—360°	270°—360°	—	—	—	—	**2** » »
90°—180°	270°—360°	0°— 90°	270°—360°	+	—	+	—	**3** » »
90°—180°	270°—360°	90°—180°	180°—270°	+	—	—	+	**4** » »

wobei zu bemerken, daß alle Coordinaten=Bogen nach derselben Richtung von **P** aus gerechnet werden, nach welcher sie im ersten Quartiere der Kugeloberfläche laufen.

Aus obiger Tabelle ersieht man

1) Daß alle Punkte, welche um den Kugeldiameter (polarisch) auseinanderliegen, in den Coordinaten ξ, ξ', η' um zwei Quadranten, in den Coordinaten η aber um drei Quadranten verschieden sind;

2) daß die Vorzeichen von **sin** ξ und **sin** η allein nicht hinreichend alle 8 Punkte von einander unterscheiden, daß vielmehr die Betrachtung der Vorzeichen von tang ξ' und tang η' zu diesem Zwecke nothwendig mit gehöre, und endlich

3) daß je zwei diametral auseinander liegende zusammengehörige Punkte (z. B. des **I.** und **1.** Quartiers) dasselbe Vorzeichen der tang ξ' und tang η', aber entgegengesetztes für die **sin** ξ und **sin** η haben.

§. 3.

Coordinatenverlegungen.

Verlegt man das System der 3 Coordinaten im Raume, ohne den Mittelpunkt desselben zu verändern, so sind folgende Fälle überhaupt möglich:

1.) Es dreht sich das System um den Winkel ω (vor= oder rückwärts) um die **Z**=Achse, so wird aus den alten Coordinaten **x**, **y**, **z** des Punkts **P** die neue Ternion **a**, **b**, **c**, wobei folgende Gleichungen Statt haben:

(1.) $z = c$;

(2.) $y = a \sin\omega \pm b \cos\omega$; (Das Vorzeichen $\pm$ bezieht sich auf die Drehung

(3.) $x = a \cos\omega \mp b \sin\omega$; vor= oder rückwärts)

Also die entsprechenden sphärischen Coordinatengleichungen:

(4.) $\sin\eta = \sin\alpha \sin\omega \pm \sin\beta \cos\omega$:

(5.) $\sin\xi = \sin\alpha \cos\omega \mp \sin\beta \sin\omega$;

(6.) $\tang \eta' = \tang \alpha' \sin\omega \pm \tang \beta' \cos\omega$;

(7.) $\tang \xi' = \tang \alpha' \cos\omega \mp \tang \beta' \sin\omega$;

wobei α, β, α', β' die entsprechenden sphärischen Coordinaten für ξ, η, ξ', η', bedeuten.

2) Oder es dreht sich das System der 3 Coordinaten xyz um die feste **X**=Achse, um den Winkel ω, so ist, wenn a, b, c die neuen Coordinaten darstellen:

(1.) $x = a$

(2.) $y = c \sin\omega \pm b \cos\omega$

(3.) $z = c \cos\omega \mp b \sin\omega$;

Und daraus die sphärischen Formeln:

(4.) $\sin\xi = \sin\alpha$;

(5.) $\sin\eta = \cos\Delta \sin\omega \pm \sin\beta \cos\omega$;

(6.) $\cos\delta = \cos\Delta \cos\omega \mp \sin\beta \sin\omega$;

(7.) $\tang \xi' = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\Delta \cos\omega \mp \sin\beta \sin\omega}$;

(8.) $\tang \eta' = \dfrac{\cos\Delta \sin\omega \pm \sin\beta \cos\omega}{\cos\Delta \cos\omega \mp \sin\beta \sin\omega}$;

wobei dem alten δ das neue Δ entspricht.

Durch Division mit $\cos\Delta$ im Zähler und Nenner von (7.) und (8.) wird

(9.) $\tang \xi' = \dfrac{\tang \alpha'}{\cos\omega \mp \tang \beta' \sin\omega}$;

(10.) $\tang \eta' = \dfrac{\sin\omega \pm \tang \beta' \cos\omega}{\cos\omega \mp \tang \beta' \sin\omega} = \tang (\omega \pm \beta')$.

3) Oder es dreht sich das System der xyz um die feste **Y**=Achse um den Winkel ω, so ist:

(1.) $y = b$;

(2.) $x = c \sin\omega \pm a \cosin\omega$;

(3.) $z = c \cosin\omega \mp a \sin\omega$;

Daraus hergeleitet für die Kugelcoordinaten:

(4.) $\sin\eta = \sin\beta$;

(5.) $\sin \xi = \cos \Delta \sin \omega \pm \sin \alpha \ \operatorname{cosin} \omega$;

(6.) $\cos \delta = \cos \Delta \cos \omega \mp \sin \alpha \sin \omega$;

(7.) $\operatorname{tang} \eta' = \dfrac{\sin \beta}{\cos \Delta \cos \omega \mp \sin \alpha \sin \omega}$;

(8.) $\operatorname{tang} \xi' = \dfrac{\cos \Delta \sin \omega \pm \sin \alpha \cos \omega}{\cos \Delta \cos \omega \mp \sin \alpha \sin \omega}$;

oder:

(9.) $\operatorname{tang} \eta' = \dfrac{\operatorname{tang} \beta'}{\cos \omega \mp \sin \omega \ \operatorname{tang} \alpha'}$;

(10.) $\operatorname{tang} \xi' = \dfrac{\sin \omega \pm \operatorname{tang} \alpha' \cos \omega}{\cos \omega \mp \sin \omega \operatorname{tang} \alpha'} = \operatorname{tang} (\omega \pm \alpha')$.

4) Geschehen zwei Drehungen verschiedener Achsen nach einander, so hat man nach 1) bis 3) die entsprechenden Formeln nach einander anzuwenden. Dadurch wird man in den Stand gesetzt, jedes beliebige sphärische Coordinatensystem rückwärts wiederum auf das zu reduciren, welches die einfachsten Gleichungen liefert, da man den Drehungswinkel so bestimmen kann, daß alle, die Einfachheit der Gleichung störenden Funktionen, sich dadurch aus der sphärischen Coordinatengleichung eliminiren lassen.

§. 4.

Polarcoordinaten.

Zieht man von dem Punkte P nach dem Anfangspunkte des sphärischen Coordinatensystems den Normalkreisbogen $= \delta$, so bildet er mit der Achse der Abscissenbogen den Winkel φ, dessen Größe zugleich mit der von δ den Punkt P der Lage nach vollkommen bestimmt; alsdann ist:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}(1.)\ \sin \eta = \sin \delta \sin \varphi \\ (2.)\ \sin \xi = \sin \delta \operatorname{cosin} \varphi\end{array}\right\} \text{daraus } \dfrac{\sin \eta}{\sin \xi} = \operatorname{tang} \varphi \ (3.); \\ \left.\begin{array}{l}(4.)\ \operatorname{tang} \eta' = \operatorname{tang} \delta \sin \varphi \\ (5.)\ \operatorname{tang} \xi' = \operatorname{tang} \delta \operatorname{cosin} \varphi\end{array}\right\} \text{daraus } \dfrac{\operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang} \xi'} = \operatorname{tang} \varphi \ (6.);\end{array}\right\} \text{daraus } \frac{\sin \eta}{\sin \xi} = \frac{\operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang} \xi'} \ (7.)$$

Reducirt man diese Formeln auf die Raumcoordinaten, so erhält man

(8.) $\dfrac{y}{\sqrt{r^2 - z^2}} = \pm \sin \varphi$;

(9.) $\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - z^2}} = \pm \operatorname{cosin} \varphi$;

(10.) $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tang} \varphi$;

welche Ausdrücke zugleich einen Kugelwinkel bestimmen, dessen Scheitel in dem sphärischen Coordinaten-Mittelpunkt, dessen einer Schenkel in der sphärischen Abscissenachse liegt, und dessen andrer Schenkel durch den Punkt x, y, z der Kugeloberfläche geht.

Zweites Kapitel.

Vom Normalkreise auf der Kugel.

§. 1.

Allgemeine Gleichungen.

Die Gleichung einer Ebne, die durch den Anfangspunct der Raumcoordinaten geht, ist (1.) $AX + BY + CZ = o$, sie gehe durch den Punkt x, y, z der Kugeloberfläche, für welchen (2.) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ist. Beide Gleichungen zusammen ergeben die Gleichung der Durchschnittscurve, eines größten Kugelkreises. Da nun aus (2.) [nach Cap. **I.** §. **1.** (3.)] die Gleichungen $\frac{x}{z} = \text{tang}\,\xi'$ und $\frac{y}{z} = \text{tang}\,\eta'$ sich ergeben, so ist, wenn wir letztere in (1.) einsetzen:

$$(3).\ A\,\text{tang}\,\xi' + B\,\text{tang}\,\eta' + C = o, \text{ woraus}$$

$$(4.)\ \frac{A}{C}\,\text{tang}\,\xi' + \frac{B}{C}\,\text{tang}\,\eta' + 1 = o.$$

Zur Bestimmung der Constanten, setzen wir in letzterer Gleichung $\text{tang}\,\xi' = o$, so ist $\text{tang}\,\eta' = -\frac{C}{B}$ (5.) setzen wir $\text{tang}\,\eta' = o$, so ist $\text{tang}\,\xi' = -\frac{C}{A}$ (6.); den aus (5.) sich ergebenden constanten Werth der sphärischer Ordinatentangente setze man $= \text{tang}\,n$, den aus (6.) resultirenden constanten Werth der sphärischen Abscissentangente $= \text{tang}\,m$, so wird aus (4.):

$$(7.)\ \frac{\text{tang}\,\xi'}{\text{tang}\,m} + \frac{\text{tang}\,\eta'}{\text{tang}\,n} = 1.$$ als Gleichung eines beliebigen Kugel-Normalkreises durch die $\Xi'\,H'$-Coordinaten.

Setzt man aber [nach Cap. I. §. **1.** (**1.**)] $x = r\sin\xi$, $y = r\sin\eta$, $z = r\,\text{cosin}\,\delta$ in (1.) ein, so wird

$$(8.)\ \frac{A}{C}\sin\xi + \frac{B}{C}\sin\eta + \cos\delta = o;$$

und nach Obigem:

$$(9.)\ \frac{\sin\xi}{\text{tang}\,m} + \frac{\sin\eta}{\text{tang}\,n} = \cos\delta;$$ als Gleichung desselben Normalkreises durch die $\Xi\,H$-Coordinaten.

Hierbei ist leicht zu entwickeln, daß $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$ der Bogen vom Coordinatenanfang auf der Kugeloberfläche an bis zum Durchschnitt des Normalkreises mit der $\left\{ \begin{matrix} \Xi \\ H \end{matrix} \right\}$-Achse des sphär. Systems sei.

Zusatz. Geht der Normalkreis durch den Anfangspunkt der Kugelcoordinaten, so ist

$\left\{\begin{matrix} m = o \\ n = o \end{matrix}\right\}$ durch welche besondere Werthe die Gleichungen (7.) und (9.) formlos werden. Die nähere Untersuchung dieses speciellen Falles muß also auf die Gleichungen $\tan m = \frac{-C}{A}$ und $\tan n = \frac{-C}{B}$ zurückgeleitet werden. Ist $\left\{\begin{matrix} \tan m \\ \tan n \end{matrix}\right\} = o$, so wird $C = o$, also die Gleichung (3.) geht über in:

$$(10.)\ A \tan \xi' + B \tan \eta' = o;$$

so wie die Gleichung (8.) in:

$$(11.)\ A \sin \xi + B \sin \eta = o;$$

Aus beiden letztern folgt: $\frac{-A}{B} = \frac{\tan \eta'}{\tan \xi'} = \frac{\sin \eta}{\sin \xi}$:

Nun ist [nach Cap. I. §. 4. (3.) u. (6.)] $\frac{\tan \eta'}{\tan \xi'} = \frac{\sin \eta}{\sin \xi} = \tan \varphi$;

also, in (10.) und (11.) eingesetzt, wird

$$(12.)\ \left\{\begin{matrix} \tan \eta' = \tan \xi' \tan \varphi; \\ \sin \eta = \sin \xi \tan \varphi; \end{matrix}\right\}$$ als Gleichungen eines durch den Anfangspunct der sphärischen Coordinaten gehenden Normalkreises, der mit der Abscissenachse den Winkel φ macht.

§. 2.

Andere Herleitung dieser Normalkreisgleichungen.

Eine Ellipse auf der XY-Ebne der Raumcoordinaten, deren Mittelpunct im Centrum der Kugel liegt, deren große Achse $= r$, deren kleine Achse $= b$ ist, hat als Gleichung

$$(1.)\ \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ also}$$

$$(2.)\ \frac{\tan^2 \xi'}{r^2} + \frac{\tan^2 \eta'}{b^2} + \frac{1}{z^2};$$ setze man nun $b = r \sin n$, so wird aus (2.)

$$(3.)\ \tan^2 \xi' + \frac{\tan^2 \eta'}{\sin n} = \frac{r^2}{z^2} = \frac{1}{\cos \delta} = 1 + \tan^2 \delta;$$

also, nach Cap. I. §. 1. (4.)

wird daraus: $\frac{\tan^2 \eta'}{\sin^2 n} - \tan^2 \eta' = 1$

oder: $\frac{\tan \eta'}{\tan n} = \pm 1$ (4.)

d. h. die Gleichung eines Normalkreisbogens, dessen $\tan m = \infty$, d. h. dessen $m = 90°$, dessen n aber $= \pm \tan \eta'$ ist. Der zugehörige Normalkreis geht also entweder auf der rechten oder linken Seite der Ordinatenachse auf der Kugeloberfläche durch die beiden Endpunkte der räumlichen Y-Achse. Daraus folgt:

1) Die Durchschnittscurven eines graden elliptischen Cylinders, — dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht, und dessen Erzeugungs-Ellipse mit der halben großen Achse = r construirt ist, — mit einer zu r gehörigen Kugeloberfläche sind zwei sich kreuzende Normalkreise, deren größter Bogenabstand zum Sinus die halbe kleine Ellipsenachse hat.

2) Die senkrechte Projection eines größten Kugelkreises, der auf der Projectionsebene nicht senkrecht steht, auch nicht mit ihr zusammenfällt, ist stets eine Ellipse, deren große Achse = 2r, deren halbe kleine Achse = dem Cosinus des Neigungswinkels der Normalkreisebne gegen die Projectionsebene, für den Radius = r ist.

3) Zwei zusammengehörige Kugelzweiecke haben stets dieselbe Ellipse als senkrechte Projectionscurve auf der Ebene des durch ihre Scheitel gelegten sie halbirenden Normalkreises.

§. 3.

a) Berechnung des zwischen den sphärischen Coordinatenachsen enthaltenen Stückes eines Normalkreises:

Gesetzt der durch die Gleichung $\frac{\text{tang}\ \xi'}{\text{tang m}} + \frac{\text{tang}\ \eta'}{\text{tang n}} = 1$ gegebene Normalkreis habe das Stück D zwischen beiden sphärischen Achsen, so ist

$$(1.)\quad \cos D = \cos m \cdot \cos n$$

also: $$\frac{1}{1 + \text{tang}^2 D} = \frac{1}{(1 + \text{tang}^2 m)(1 + \text{tang}^2 n)};$$ oder:

$$(2.)\quad \text{tang}^2 D = \text{tang}^2 m\ \text{tang}^2 n \left(1 + \frac{1}{\text{tang}^2 m} + \frac{1}{\text{tang}^2 n}\right)$$

Zusatz. Ist daher $D = 90^\circ$, so muß tang m oder tang n unendlich groß werden, d. h. entweder auch $m = 90^\circ$ oder $n = 90^\circ$, oder endlich beides zugleich.

b) Berechnung des auf dem Stücke D vom Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten construirten senkrechten Normalkreisbogens Δ.

Der senkrechte Normalkreisbogen muß das Minimum aller Entfernungen sein, welche durch größte Kreise vom Anfangspunkte der Kugelcoordinaten aus bis zu dem durch die Gleichung (1.) in a) gegebenen Normalkreise dargestellt werden, und die man allgemein durch δ bezeichnet hatte. Nun war $\text{tang}^2 \delta = \text{tang}^2 \xi' + \text{tang}^2 \eta'$: [nach Cap. I. §. 1.(4.)] Differentiiren wir, um das Minimum zu finden, diese Gleichung, so ist:

$$(3.)\quad \text{tang}\ \delta . d\,(\text{tang}\ \delta) = \text{tang}\ \xi' . d\,(\text{tang}\ \xi') + \text{tang}\ \eta' . d\,(\text{tang}\ \eta');$$

Für $\delta = \Delta$ muß also $d\,(\text{tang}\ \delta) = o$ sein, folglich

$$(4.)\quad \text{tang}\ \xi' . d\,(\text{tang}\ \xi') + \text{tang}\ \eta'\ d\,(\text{tang}\ \eta') = o;$$

Nun ist aber die Differentialgleichung des Normalkreises im Allgemeinen:

(5.) $\frac{d\ (\text{tang}\ \xi')}{\text{tang m}} + \frac{d\ (\text{tang}\ \eta')}{\text{tang n}} = o$; daraus, durch Elimination der Differentiale, resultirt:

(6.) $\text{tang n tang}\ \eta' = \text{tang m tang}\ \xi'$ als Gleichung des dem Coordinaten-Centrum nächsten Punktes.

Setzt man diese speciellen Werthe von $\text{tang}\ \xi'$ und $\text{tang}\ \eta'$ in die Gleichung $\text{tang}^2\ \varDelta = \text{tang}^2\ \xi' + \text{tang}^2\ \eta'$ ein, so ist die gesuchte Gleichung:

(7.) $\text{tang}^2\ \varDelta = \frac{\text{tang}^2\ \text{m tang}^2\ \text{n}}{\text{tang}^2\ \text{m} + \text{tang}^2\ \text{n}}$ für die kleinste Entfernung vom Coordinaten-Centrum.

§. 4.

Ueber die Winkel, die der gegebene Normalkreis mit den sphärischen Coordinatenachsen macht.

Der durch die Gleichung $\frac{\text{tang}\ \xi'}{\text{tang m}} + \frac{\text{tang}\ \eta'}{\text{tang n}} = 1$ gegebene Normalkreis schneide die sphärische Abscissenachse unter dem Winkel θ, die Ordinatenachse unter dem Winkel ψ, so ist $\sin \varDelta : \sin \theta = \sin \text{m} : 1$ (1.), und $\sin \varDelta : \sin \psi = \sin \text{n} : 1$ (2.)

Nun ist [nach II. §. 2. (7.)] $\pm \sin \varDelta = \frac{\text{tang m tang n}}{\sqrt{\text{tang}^2\ \text{m} + \text{tang}^2\ \text{n} + \text{tang}^2\ \text{m tang}^2\ \text{n}}}$, (3.)

Also [aus (1.) und (3.)]:

$$\pm \sin \theta = \frac{\text{tang n} \sqrt{1 + \text{tang}^2\ \text{m}}}{\sqrt{\text{tang}^2\ \text{m} + \text{tang}^2\ \text{n} + \text{tang}^2\ \text{m tang}^2\ \text{n}}}; \ (4.)$$

$$\text{und} \pm \sin \psi = \frac{\text{tang m} \sqrt{1 + \text{tang}^2\ \text{n}}}{\sqrt{\text{tang}^2\ \text{m} + \text{tang}^2\ \text{n} + \text{tang}^2\ \text{m tang}^2\ \text{n}}}; \ (5.)$$

Nach einer bekannten sphärischen Formel ist aber auch:

$$(6.)\ \text{tang}\ \theta = \frac{\text{tang n}}{\sin \text{m}} = \pm \frac{\text{tang n} \sqrt{1 + \text{tang}^2\ \text{m}}}{\text{tang m}} \ \text{und:}$$

$$(7.)\ \text{tang}\ \psi = \frac{\text{tang m}}{\sin \text{n}} = \pm \frac{\text{tang m} \sqrt{1 + \text{tang}^2\ \text{n}}}{\text{tang n}};$$

Da nun nach Vorigem [§. 3 (2.)] $\text{tang D} = \pm \sqrt{\text{tang}^2\ \text{m} + \text{tang}^2 \text{n} + \text{tang}^2\ \text{m tang}^2\ \text{n}}$, so ist, wegen (4.) und (5.), ferner:

$$\pm \sin \theta = \frac{\text{tang n} \sqrt{1 + \text{tang}^2\ \text{m}}}{\text{tang D}} \ (8.);$$

$$\text{und} \pm \sin \psi = \frac{\text{tang m} \sqrt{1 + \text{tang}^2\ \text{n}}}{\text{tang D}} \ (9.).$$

§. 5.

Der Normalkreisbogen, der durch zwei feste Punkte geht, deren sphärische Coordinaten $\left\{\begin{matrix}\alpha' & \beta' & \alpha & \beta \\ \xi' & \eta' & \xi & \eta\end{matrix}\right\}$ sind.

Die allgemeine Gleichung des Normalkreises sei

$$(1.)\quad \frac{\operatorname{tang} \Xi'}{\operatorname{tang} m} + \frac{\operatorname{tang} H'}{\operatorname{tang} n} = 1$$

so muß

$$(2.)\quad \left.\begin{aligned} \frac{\operatorname{tang} \alpha'}{\operatorname{tang} m} + \frac{\operatorname{tang} \beta'}{\operatorname{tang} n} = 1 \\ \frac{\operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} m} + \frac{\operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang} n} = 1 \end{aligned}\right\} \text{zugleich sein, also}$$

$$(3.)\quad \operatorname{tang} m = \frac{\operatorname{tang} \alpha' \operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta' \operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta'} \text{ und}$$

$$(4.)\quad \operatorname{tang} n = \frac{\operatorname{tang} \alpha' \operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta' \operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \xi'};$$

also in (1.) dies eingesetzt:

$$1 = \frac{\operatorname{tang} \Xi' (\operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta') + \operatorname{tang} H' (\operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \xi')}{\operatorname{tang} \alpha' \operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta' \operatorname{tang} \xi'}; \quad (5.)$$

als Gleichung eines Normalkreises, der durch zwei feste Punkte geht.

Zusatz 1. Liegen also drei Punkte $\left\{\begin{matrix}\xi' & \eta' \\ \alpha' & \beta' \\ \varrho' & \sigma'\end{matrix}\right\}$ in einem Normalkreise, so muß:

$$(6.)\quad 1 = \frac{\operatorname{tang} \varrho' (\operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta') + \operatorname{tang} \sigma' (\operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \xi')}{\operatorname{tang} \alpha' \operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta' \operatorname{tang} \xi'} \text{ sein.}$$

Zusatz 2. Aus (3.) und (4.) folgt, daß

$$(7.)\quad \frac{\operatorname{tang} m}{\operatorname{tang} n} = \frac{\operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta'} \text{ sei.}$$

Liegen also drei Punkte in demselben Normalkreise, so ist für dieselben auch:

$$(8.)\quad \frac{\operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta'} = \frac{\operatorname{tang} \varrho' - \operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \sigma'} = \frac{\operatorname{tang} \varrho' - \operatorname{tang} \alpha'}{\operatorname{tang} \beta' - \operatorname{tang} \sigma'}.$$

§. 6.

Die Entfernung zweier festen Punkte auf der Kugeloberfläche.

Das Stück des durch 2 Punkte $\left\{\begin{matrix}\alpha' & \beta' \\ \xi' & \eta'\end{matrix}\right\}$ gehenden Normalkreises zwischen diesen Punkten sei $= \mathbf{R}$, so ist, wenn man die dazu gehörige gradlinige Sehne $= \mathbf{S}$ nennt, nach der Analysis im Raume:

(1.) $S = 2 r \sin \frac{R}{2} = \pm \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, wenn $\left\{\begin{matrix} x, y, z \\ a, b, c \end{matrix}\right\}$ die Coordinaten von $\left\{\begin{matrix} \xi' & \eta' \\ \alpha' & \beta' \end{matrix}\right\}$ sind; also:

(2.) $2 - 2\cos R = (\sin\xi - \sin\alpha)^2 + (\sin\eta - \sin\beta)^2 + (\cos\delta - \cos\delta')^2$ [wo δ die Entfernung des Punkts $\xi\ \eta$, δ' die Entfernung des Punkts $\alpha\ \beta$ vom sphärischen Coordinaten-Centrum bezeichnet.]

Nun ist aber $\left\{\begin{matrix} \sin\xi = \cos\delta \operatorname{tang}\xi' \\ \sin\alpha = \cos\delta \operatorname{tang}\alpha' \end{matrix}\right\}$ rc.; also:

$2 - 2\cos R = \cos^2\delta' (1 + \operatorname{tang}^2\alpha' + \operatorname{tang}^2\beta') + \cos^2\delta (1 + \operatorname{tang}^2\xi' + \operatorname{tang}^2\eta')$
$- 2\cos\delta\cos\delta' (\operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\xi' + \operatorname{tang}\beta' \operatorname{tang}\eta' + 1)$,

woraus sich herleiten läßt:

(3.) $\cos R = \cos\delta\cos\delta' (1 + \operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\xi' + \operatorname{tang}\beta' \operatorname{tang}\eta')$; oder:

$$(4.)\quad \cos R = \frac{1 + \operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\xi' + \operatorname{tang}\beta' \operatorname{tang}\eta'}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha' + \operatorname{tang}^2\beta'}\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\xi' + \operatorname{tang}^2\eta'}}$$

$$(5.)\quad \sin^2 R = \frac{(\operatorname{tang}\xi' - \operatorname{tang}\alpha')^2 + (\operatorname{tang}\eta' - \operatorname{tang}\beta')^2 + (\operatorname{tang}\eta' \operatorname{tang}\alpha' - \operatorname{tang}\xi' \operatorname{tang}\beta')^2}{(1 + \operatorname{tang}^2\alpha' + \operatorname{tang}^2\beta')(1 + \operatorname{tang}^2\xi' + \operatorname{tang}^2\eta')};$$

Zusatz 1. Ist $R = 90^\circ$, mithin $\cos R = o$, so ist demgemäß [nach (3.)]:

(6.) $1 + \operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\xi' + \operatorname{tang}\beta' \operatorname{tang}\eta' = o$;

welche Gleichung also zwischen jedem Paare von Punkten besteht, die auf der Kugel um 90° auseinander liegen.

Zusatz 2. Ist $\left\{\begin{matrix} \alpha' = o \\ \beta' = o \end{matrix}\right\}$, so liegt R mit dem einen Endpunkte im Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten: alsdann ist $\sin^2 R = \frac{\operatorname{tang}^2\xi' + \operatorname{tang}^2\eta'}{1 + \operatorname{tang}^2\xi' + \operatorname{tang}^2\eta'} = \sin^2\delta$, also dann $R = \delta$ oder $R = 180 - \delta$; wie nach der Annahme zu erwarten war.

§. 7.

Der Winkel, den zwei Normalkreise bilden.

Zieht man in einer beliebigen Richtung von dem Mittelpunkte der Kugel zwei Radien, deren Gleichungen sind:

(1.) $\left\{\begin{matrix} x = Mz \\ y = Nz \end{matrix}\right\}$ und

(2.) $\left\{\begin{matrix} x' = M' z' \\ y' = N' z' \end{matrix}\right\}$, so treffen diese die Kugel in den beiden Punkten, deren sphärische Gleichungen sind (3.) $\left\{\begin{matrix} \operatorname{tang}\xi' = M \\ \operatorname{tang}\eta' = N \end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix} \operatorname{tang}\alpha' = M' \\ \operatorname{tang}\beta' = N' \end{matrix}\right\}$ (4.)

Diese letztern Punkte haben, als ihre Normalentfernung, zwischen sich den Bogen **V**, der zugleich das Maaß für den von den beiden Radien gebildeten Centriwinkel v ist.

Nach **II.** §. 6. (4.) ist also:

$$(5.)\ \cos V = \cos v = \frac{1 + M\,M' + N\,N'}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}\,\sqrt{1 + M'^2 + N'^2}};$$

bestimmt man nun einen dritten Punkt auf der Kugel so, daß er von jedem der Punkte in (3.) und (4.) um 90° entfernt ist, [nach **II.** §. 6. (6.)] so bilden die 2 Verbindungs-Normalbogen zwischen ihm und den beiden ersten Punkten mit einander einen sphärischen Winkel v', dessen Maaß ebenfalls $V = v$ ist; also auch für diesen sphärischen Winkel v' muß

$$(6.)\ \cos v' = \cos V = \frac{1 + M\,M' + N\,N'}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}\,\sqrt{1 + M'^2 + N'^2}}\ \text{sein.}$$

Um nun M, N, M', N', durch Ausdrücke dieser Winkel einschließenden Normalkreise zu bestimmen, muß man den Scheitelpunkt des sphärischen Winkels finden, der von ξ', η' und α', β' um 90° entfernt sein soll. Es ist aber, wenn seine Kugelcoordinaten t', u' sind:

$$(7.)\ \left\{\begin{array}{l} 1 + M \tang t' + N \tang u' = o \\ 1 + M' \tang t' + N' \tang u' = o \end{array}\right\}\ \text{nach II. §. 6. (4.)}$$

$$\text{also } \tang t' = \frac{N' - N}{M'N - MN'}\ (8.)\ \text{und } \tang u' = \frac{M - M'}{M'N - M\,N'}\ (9.)$$

Nun ist aber auch:

$$(10.)\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\tang t'}{\tang m} + \dfrac{\tang u'}{\tang n} = 1 \\[2ex] \dfrac{\tang t'}{\tang m'} + \dfrac{\tang u'}{\tang n'} = 1; \end{array}\right\}$$

als Gleichungen der beiden Normalkreise, die (als Schenkel des sphärischen Winkels) von t', u' ausgehen, folglich muß [nach (7.) und (10.)]:

$$(11.)\ \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{\tang m} = M;\ -\dfrac{1}{\tang m'} = M'; \\[2ex] -\dfrac{1}{\tang n} = N;\ -\dfrac{1}{\tang n'} = N'; \end{array}\right\}$$

sein, so daß also [mit Hülfe von (8.) und (9.)] endlich gefunden wird:

$$(12.)\ \cos v' = \frac{1 + \dfrac{1}{\tang m \tang m'} + \dfrac{1}{\tang n \tang n'}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\tang^2 m} + \dfrac{1}{\tang^2 n}}\ \sqrt{1 + \dfrac{1}{\tang^2 m'} + \dfrac{1}{\tang^2 n'}}};$$

und (13.)

$$\left\{\begin{array}{l} \tang t' = \dfrac{\dfrac{1}{\tang n} - \dfrac{1}{\tang n'}}{\dfrac{1}{\tang m' \tang n} - \dfrac{1}{\tang m \tang n'}} = \tang m \tang m'\ \dfrac{\tang n' - \tang n}{\tang m \tang n' - \tang n \tang m'} \\[4ex] \tang u' = \dfrac{\dfrac{1}{\tang m'} - \dfrac{1}{\tang m}}{\dfrac{1}{\tang m' \tang n} - \dfrac{1}{\tang m \tang n'}} = \tang n \tang n'\ \dfrac{\tang m - \tang m'}{\tang m \tang n' - \tang n \tang m}, \end{array}\right.$$

wobei also t' und u' die sphärischen Coordinaten des Winkelscheitels, $\left\{ \begin{matrix} m \text{ u. } n \\ m' \text{ u. } n' \end{matrix} \right\}$ die Stücken der Coordinaten-Achsen bis zum Coordinaten-Centrum sind, welche die Schenkel darauf abschneiden.

§. 8.

Zusätze.

Zusatz 1. Die beiden unter (13.) aufgestellten Gleichungen geben zugleich die Bestimmung des Durchschnittspunktes zweier gegebener Normalkreise

$$\left\{ \begin{matrix} \dfrac{\tan \xi'}{\tan m} + \dfrac{\tan \eta'}{\tan n} = 1 \\ \dfrac{\tan \alpha'}{\tan m'} + \dfrac{\tan \beta'}{\tan n'} = 1 \end{matrix} \right\}$$ untereinander an.

Zusatz 2. Sind also zwei in Zusatz 1. bezeichnete Normalkreise auf einander senkrecht, so muß $\cos v' = o$, also

$$(14.)\quad 0 = 1 + \frac{1}{\tan m \tan m'} + \frac{1}{\tan n \tan n'}$$ sein.

Zusatz 3. Wenn zwei Normalkreise **II.** und **III**, der $\left\{ \begin{matrix} \text{erste} \\ \text{andere} \end{matrix} \right\}$ mit den Achsenabschnitten $\left\{ \begin{matrix} m' & n' \\ m'' & n'' \end{matrix} \right\}$ auf demselben Normalkreise **I** senkrecht stehen, so ist:

$$\left\{ \begin{matrix} \dfrac{1}{\tan m \tan m'} + \dfrac{1}{\tan n \tan n'} + 1 = 0 \\ \dfrac{1}{\tan m \tan m''} + \dfrac{1}{\tan n \tan n''} + 1 = 0 \end{matrix} \right\}$$

folglich auch $\dfrac{\tan m'' - \tan m'}{\tan m \tan m' \tan m''} + \dfrac{\tan n'' - \tan n'}{\tan n \tan n' \tan n''} = o$ (15.)

Der Durchschnittspunkt von den Normalkreisen **II.** und **III.** sei durch die sphärischen Coordinaten a', b', gegeben, so ist, [nach (13.)]:

$$\tan a' = \frac{\tan m' \tan m'' (\tan n'' - \tan n')}{\tan m' \tan n'' - \tan m'' \tan n'}$$

$$\tan b' = \frac{-\tan n' \tan n'' (\tan m'' - \tan m')}{\tan m' \tan n'' - \tan m'' \tan n'}$$

also ist, [dies in (15.) eingesetzt]:

$$\frac{\tan a'}{\tan n} = \frac{\tan b'}{\tan m} \quad (16.)$$

Diese Gleichung zwischen a' und b' ist aber nicht abhängig von den Abschnitten der einzelnen Normalkreise **II** und **III.** rc., sondern richtet sich allein nach der Lage des Normalkreises **I.**

Sie gilt daher für alle Durchschnittspunkte a″, b″ ꝛc. zwischen ähnlichen Normalkreisen wie **II.** und **III**, folglich auch für den einen, der durch das Coordinaten-Centrum auf der Kugel geht. Dieser aber bildet mit der sphärischen Abscissenachse einen Winkel φ, der durch die Gleichung [Cap. **II.** §. 1. (12.)] $\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang} H'}{\operatorname{tang} \Xi'}$ bestimmt wird. Schneidet dieser den Kreis **I.** in dem Punkte, dessen sphärische Coordinaten ξ' η' sind, so ist [nach Cap. **II.** §. 3. (6.)] $\frac{\operatorname{tang}\xi'}{\operatorname{tang} n} = \frac{\operatorname{tang}\eta'}{\operatorname{tang} m}$

Folglich ist $\frac{\operatorname{tang} n}{\operatorname{tang} m} = \frac{\operatorname{tang} a'}{\operatorname{tang} b'} = \frac{\operatorname{tang} a''}{\operatorname{tang} b''}$ ꝛc. $= \frac{\operatorname{tang}\xi'}{\operatorname{tang}\eta'}$; d. h. Alle die Puukte a′, b′, a″, b″, ꝛc. ξ' η' liegen auf demselben Normalkreise, der durch das Coordinaten-Centrum geht, und auf **I.** senkrecht steht. Nach Voraussetzung lagen aber die Punkte a′ b′, a″ b″ ꝛc. auch auf den übrigen Normalkreisen **II.** und **III.** ꝛc., die nicht durch das Coordinaten-Centrum auf der Kugel gehn: folglich fallen, um den Widerspruch zu lösen, alle Punkte a′ b′, a″ b″ ꝛc. in den einen a′ b′ zusammen, d. h. alle auf dem Normalkreise **I.** senkrechten Normalkreise schneiden sich in demselben Punkte, dessen Gleichung in (16.) angegeben ist.

Zusatz **4.** Wenn die Normalkreise II. und III. auf dem Normalkreise I. senkrecht stehen, und zwischen sich den Bogen Δ des letztern haben, so ist nach bekannter Formel:

$$(17.)\quad \cos S = \cos S' \cos \Delta;$$

wobei S und S′ die Größe der Bogen II. und III. von I. an bis zu ihrem Durchschnittspunkte bezeichnet. Nun ist aber auch

$$(18.)\quad \cos S' = \cos S \cos \Delta;$$

beide Gleichungen (17.) und (18.) können aber, bei der beliebigen Größe von Δ, nur dann zugleich bestehen, wenn zugleich $\left\{\begin{matrix}\cos S = o \\ \cos S' = o\end{matrix}\right\}$, also $S = S' \left\{\begin{matrix}= 90^\circ \\ = 270^\circ\end{matrix}\right\}$ ist. Daher schneiden sich zwei auf einem dritten senkrechten Normalkreise in zwei entgegengesetzten Punkten der Kugel, die zu dem Normalkreise, auf dem jene senkrecht sind, als Pole gehören.

§. 9.

Verhältniß eines Normalkreises zu seinen Polen a′ b′ und a″ b″.

Wenn die Gleichung eines Normalkreises allgemein diese ist:

$$(1.)\quad \frac{\operatorname{tang}\Xi'}{\operatorname{tang} m} + \frac{\operatorname{tang} H'}{\operatorname{tang} n}$$ so ist jeder seiner Pole durch die Gleichungen gegeben:

$$(2.)\quad \left\{\begin{matrix} 1 + \operatorname{tang} a' \operatorname{tang}\Xi' + \operatorname{tang} b' \operatorname{tang} H'; \\ 1 + \operatorname{tang} a'' \operatorname{tang}\Xi' + \operatorname{tang} b'' \operatorname{tang} H'; \end{matrix}\right.$$

Denn nach Cap. II. §. 6. (6.) sind die unter (2.) angegebenen Gleichungen solchen Punkten eigen, die um 90° von einander abstehen, was auch die Eigenthümlichkeit des Pols ausmacht.

Also ist, durch Vergleichung von (1.) und (2.)

$$(3.)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{tang } a' = \dfrac{-1}{\text{tang } m}; \; \text{tang } b' = \dfrac{-1}{\text{tang } n}; & \text{also } a' = 90^\circ + m \\ & a'' = 270^\circ + m \\ \text{tang } a'' = \dfrac{-1}{\text{tang } m}; \; \text{tang } b'' = \dfrac{-1}{\text{tang } n}; & b' = 90^\circ + n \\ & b'' = 270^\circ + n \end{array}\right\}$$

Diese Gleichungen ergeben sich auch aus Cap. **II**, §. 7. (11.), wo zu zwei Punkten ein 3ter, von jedem um 90° abstehender gesucht wurde; derselbe Fall ist hier nur allgemeiner, für alle Punkte eines Normalkreises, aufgefaßt.

Hat man nun noch einen zweiten Normalkreis

$$(4.)\quad \frac{\text{tang } U'}{\text{tang } m'} + \frac{\text{tang } V'}{\text{tang } n'} = 1$$

und dessen Pole sind α' β' und α'' β'', so ist auch für diesen

$$\text{tang } \alpha' = \frac{-1}{\text{tang } m'}; \; \text{tang } \beta' = \frac{-1}{\text{tang } n'};$$

$$\text{tang } \alpha'' = \frac{-1}{\text{tang } m'}; \; \text{tang } \beta'' = \frac{-1}{\text{tang } n'};$$

Nun ist der Winkel v' zwischen den beiden Normalkreisen bestimmt durch

$$\cos v' = \frac{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\text{tang } m \text{ tang } m'} + \dfrac{1}{\text{tang } n \text{ tang } n'}}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\text{tang}^2 m} + \dfrac{1}{\text{tang}^2 n}} \sqrt{1 + \dfrac{1}{\text{tang}^2 m'} + \dfrac{1}{\text{tang}^2 n'}}};$$

[nach Cap. II. §. 7. (12.)] also ist auch:

$$\cos v' = \frac{1 + \text{tang } a' \text{ tang } \alpha' + \text{tang } b' \text{ tang } \beta'}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 a' + \text{tang}^2 b'} \sqrt{1 + \text{tang}^2 \alpha' + \text{tang}^2 \beta'}};$$

Diese Formel ist aber [nach Cap. II. §. 6. (4.)] zugleich der Ausdruck für cos R, wenn R die Entfernung von a′ b′ und α' β' angiebt. Daraus folgt:

Die Bogenentfernung zweier gleichartiger Pole ist zugleich auch das Maaß für die Größe des von den beiden zugehörigen Normalkreisen gebildeten Winkels; und umgekehrt.

§. 10.

Perspectivische Projectionen vom Kugel-Centrum aus auf eine Tangentenebene.

Die hier entwickelten Gleichungen des Normalkreises, der Senkrechten, des Winkels auf der Kugel u. s. w. lassen sich auch noch durch ein anderes Projectionsverfahren aus der Raum-Analysis herleiten, nämlich durch Projectionsstrahlen vom Mittelpunkt der Kugel nach einer Tangentenebene, welche an den Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten, (also an das Ende der räumlichen Z-Achse) gelegt wird. Durchläuft nämlich das Ende des durch das Kugel-Centrum gelegten Projectionsstrahls (den wir Leitstrahl nennen wollen) auf der Ebne eine Gerade, so schneidet er die Kugeloberfläche in einem zugehörigen größten Kreise, dessen Gleichung mit der der Geraden im Zusammenhange stehen muß.

Geht ein Leitstrahl durch der Punkt $x'\ y'\ z'$ der mit der XY-Ebene parallel laufenden Tangentenebene, so ist, wegen des Abstands r (Kugelradius) beider Ebenen, das z' jenes Punktes stets constant, nämlich $= r$, so daß alle Linien der Tangentenebene nur durch $x'\ y'$ ausgedrückt zu werden brauchen. Zu dem Punkte $x'\ y'\ z'$ gehört also auf der Kugel ein zweiter $x\ y\ z$, durch folgende Gleichungen zu bestimmen:

(1.) $y' = \frac{y}{\cos\ \delta}$ und (2.) $x' = \frac{x}{\cos\ \delta}$, wenn δ die alte Bedeutung behält, den Bogenabstand des Punkts $x\ y\ z$ der Kugeloberfläche von dem Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten (zugleich dem Berührungspunkte zwischen Ebne und Kugel) zu bezeichnen. Da aber $y = r \sin \eta$ und $x = r \sin \xi$ war, so ist [nach I. §. 1. (1.) und (5.)]

(3.) $x' = r\ \text{tang}\ \xi'$ und (4.) $y' = r\ \text{tang}\ \eta'$; durch welche beiden Gleichungen die Verwandtschaft der projicirten ebnen Figur mit ihren Kugelprojectionen leicht zur Darstellung zu bringen ist. Durch diese Art der Ableitung der sphärischen Figuren aus den ebnen gewinnt man außer an der Leichtigkeit des Uebergangs in die entsprechenden Gleichungen auch daran, daß man nun jede sphärische Formel leicht in die entsprechende ebne reduciren kann, indem man den Kugelradius $= \infty$ annimmt, d. h. die Kugeloberfläche mit der Tangentenebene vertauscht.

So sind z. B. die Formeln

$\frac{\text{tang}\ \xi'}{\text{tang}\ m} + \frac{\text{tang}\ \eta'}{\text{tang}\ n} = 1$ und $\frac{x'}{m'} + \frac{y'}{n'} = 1$ auf diese Weise unter sich verwandt, denn man braucht nur $\left\{ \begin{array}{l} y' = r\ \text{tang}\ \eta' \text{ und } n' = r\ \text{tang}\ n \\ x' = r\ \text{tang}\ \xi' \text{ und } m' = r\ \text{tang}\ m \end{array} \right\}$ zu setzen, um eine in die andere übergehn zu lassen.

§. 11.

Senkrechte Bogenentfernung eines Punkts auf der Kugel von einem gegebenen Normalkreise.

Es sei der Normalkreis durch die Gleichung gegeben,

(1.) $\frac{\text{tang}\ \xi'}{\text{tang}\ m} + \frac{\text{tang}\ \eta'}{\text{tang}\ n} = 1$

wenn der Fußpunkt des senkrechten Bogens $\xi'\ \eta'$ ist; der Ausgangspunkt des letztern sei $\alpha'\ \beta'$, dann ist, wenn die Achsenabschnitte desselben m' und n' sind, [nach Cap. II. §. 7. (14.)]

$$(2.)\quad \frac{1}{\tan m \tan m'} + \frac{1}{\tan n \tan n'} + 1 = o$$ wegen der senkrechten Lage;

die Punkte $\xi'\ \eta'$ und $\alpha'\ \beta'$ sind untereinander verbunden, daher ist [nach Cap. II. §. 5. (3.) und (4.)]

$$(3.)\quad \begin{cases} \tan m' = \dfrac{\tan \alpha' \tan \eta' - \tan \beta' \tan \xi'}{\tan \eta' - \tan \beta'} \\[2ex] \tan n' = \dfrac{\tan \alpha' \tan \eta' - \tan \beta' \tan \xi'}{\tan \alpha' - \tan \xi'} \end{cases};$$

und [nach Cap. II. §. 6. (5.)]:

$$(4.)\ \sin R = \sqrt{\frac{(\tan \xi' - \tan \alpha')^2 + (\tan \eta' - \tan \beta')^2 + (\tan \eta' \tan \alpha' - \tan \beta' \tan \xi')^2}{(1 + \tan^2 \alpha' + \tan^2 \beta')(1 + \tan^2 \xi' + \tan^2 \eta')}};$$

wenn R die Entfernung von $\alpha'\ \beta'$ und $\xi'\ \eta'$ bedeutet: also aus (3.) und (4.), wenn wir, zur Abkürzung, $(\tan \eta' \tan \alpha' - \tan \beta' \tan \xi')^2 = Z^2$ nennen:

$$(5.)\ \sin R = \frac{Z}{\sqrt{(1+\tan^2\alpha' + \tan^2\beta')(1+\tan^2\xi' + \tan^2\eta')}}\sqrt{\left(\frac{1}{\tan m'}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tan n'}\right)^2 + 1};$$

Nun ist aber aus (2.) und (3.)

$$(6.)\ Z = -\left[\frac{\tan \eta' - \tan \beta'}{\tan m} + \frac{\tan \alpha' - \tan \xi'}{\tan n}\right].$$

Dies in (5.) eingesetzt, erhält man eine, durch die Coordinaten der beiden Punkte und die Achsenabschnitte der beiden Linien ausgedrückte Gleichung, die die senkrechte Entfernung des Punkts $\alpha'\ \beta'$ von der Linie (1.) ausdrückt.

Drittes Kapitel.

Von den Kurven zweiten Grades auf der Kugel.

I. Der Kreis.

§. 1.

Ueber die Herleitung der Gleichung aus sphärischen Formeln.

Die Formel für die Entfernung zweier festen Punkte auf der Kugel ist [nach Cap. II. §. 6.]

$$\cos R = \frac{1 + \tan \alpha' \tan \xi' + \tan \beta' \tan \eta'}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha' + \tan^2 \beta'}\ \sqrt{1 + \tan^2 \xi' + \tan^2 \eta'}};$$

daraus (1.) $\tan^2 R$

$$= \frac{(\tan \xi' - \tan \alpha')^2 + (\tan \eta' - \tan \beta')^2 + (\tan \eta' \tan \alpha' - \tan \xi' \tan \beta')^2}{(1 + \tan \alpha' \tan \xi' + \tan \beta' \tan \eta')^2};$$

nimmt man nun den Punkt $\alpha'\ \beta'$ als fest an, während der Punkt $\xi'\ \eta'$ sich um denselben in stets gleicher Entfernung $= R$ herumbewegt, so beschreibt letzterer auf der Kugel einen Kreis mit dem Bogen R als Radius und obige Gleichungen sind daher zugleich die des Kreises.

Zusatz a.) Wird $R = 90°$, so ist $\left\{ \begin{array}{l} \cos R = o \\ \tan R = \infty \end{array} \right\}$, also wird

(2.) $1 + \tan \alpha' \tan \xi' + \tan \beta' \tan \eta' = o$;

als Gleichung eines Normalkreises, dessen Pol $\alpha'\ \beta'$ ist. [s. Cap. **II.** §. 9.]

b) Wird $R = 180 - r$, so ist $180° - R = r$

(3.) $$\cos R = -\cos r = \frac{1 + \tan \alpha' \tan \xi' + \tan \eta' \tan \beta'}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha' + \tan^2 \beta'}\ \sqrt{1 + \tan \xi' + \tan \eta'}};$$

Erhebt man aber diese Formel auf das Quadrat, so verschwindet das negative Zeichen und man erhält eine der frühern identische Kreisformel. Das negative Cosinuszeichen bei **r** deutet aber darauf hin, daß dieser Kreis dem früher durch R bestimmten diametral entgegenliege [cf. Cap. I. §. 2. 3.)], daß also zweier diametral-conjugirten Kugelkreise Bogenhalbmesser sich wie Supplemente verhalten, wenn man beide aus demselben Centrum construirt.

c) Wird $\left\{ \begin{array}{l} \alpha' = o \\ \beta' = o \end{array} \right\}$, d. h. liegt der Mittelpunkt des Kugelkreises im Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten, so wird: [nach Cap. **II.** §. 1. (2.) und (**4.**)]

(4.) $\tan^2 R = \tan^2 \xi' + \tan^2 \eta'$ und

(5.) $\sin^2 R = \sin^2 \xi + \sin^2 \eta$, die Gleichung des zugehörigen Kreises, ausgedrückt durch die $\left\{ \begin{array}{l} \Xi',\ H', \\ \Xi,\ H, \end{array} \right\}$ Coordinaten.

§. 2.

Herleitung der Kreisgleichung mit Hülfe der senkrechten Projection.

a.) Hat man im Mittelpunkte der Kugel das [in Cap **II.** §. 1. (cf. Cap. **I.** §. 1.) erwähnte] räumliche 3-achsige Coordinatensystem, und beschreibt auf einer Achsenebne, z. B. auf der **XY**-Ebne vom Centrum der Coordinaten aus einen Kreis mit dem Radius **R**, so ist

(1.) $R^2 = x^2 + y^2$. Da aber bei der senkrechten Projection dieses Kreises auf die Oberfläche der Kugel, $R = r \sin \varphi$, und $x = r \sin \xi$, $y = r \sin \eta$ wird [Cap. **I.** §. 1.), so ist

(2.) $\sin^2 \varphi = \sin^2 \xi + \sin^2 \eta$, woraus folgt [nach §. 1. Zusatz c) (5.)]:

daß ein gerader Cylinder, dessen Basis ein Kreis ist, die Kugeloberfläche in einem Kugelkreise schneiden müsse, wenn die Achse des Cylinders durch das Kugelcentrum geht.

b.) Nehmen wir an, der Kugelkreis sei mit dem Radius R auf der sphärischen Y-Achse so beschrieben, daß seine Peripherie durch den Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten geht, so wird, wenn die Coordinaten des Mittelpunkts sind $\left\{ \begin{matrix} \alpha' = 0 \\ \beta' = b' \end{matrix} \right\}$, auch $R = b'$, folglich ist [nach Cap. III. §. 1. (1.)]

$$\tan^2 b' = \frac{\tan^2 \xi' + (\tan \eta' - \tan b')^2 + \tan^2 \xi' \tan^2 b'}{(1 + \tan b' \tan \eta')^2}$$

Wendet man darauf die Formeln an: $\tan b' = \frac{b}{c}$, $\tan \xi' = \frac{x}{z}$, $\tan \eta' = \frac{y}{z}$, [wo b, c, x, y, z die räumlichen Coordinaten derselben Punkte auf der Kugel bedeuten], so erhält man:

$$(1.)\quad \frac{b^2}{c^2} = \frac{x^2 (b^2 + c^2) + (cy - bz)^2}{(cz + by)^2} = \frac{r^2 x^2 + (cy - bz)^2}{(cz + by)^2};$$

löst man diese Gleichung auf, so erhält man endlich:

$$(2.)\quad b^2 y^2 + c^2 z^2 + 2\,bcyz = c^2 r^2 = (by + cz)^2$$

also: (3.) $by + cz = cr$, d. h. die Gleichung einer geraden Linie auf der YZ-Ebene: legt man durch dieselbe eine Ebne, welche zugleich durch den Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten geht, so schneidet diese die Kugeloberfläche in jenem Kreise, dessen Gleichung oben angeführt worden ist.

Entwickeln wir aber die Gleichung (3.) nur für x und z, so erhält man

$$(4.)\quad x^2 + \frac{r^2}{b^2} z^2 - \frac{2\,c^2\,r}{b^2} z + \frac{r^2 (c^2 - b^2)}{b^2} = o,$$ als die allgemeinste Gleichung einer Ellipse in der XZ-Ebne, deren große Achse in der Richtung der räumlichen Absciffenachse, nicht aber mit dieser zusammenfällt, und deren Mittelpunkt außerhalb des Anfangspunktes der räumlichen Coordinaten ist, deren kleine Achse endlich auf der Z-Achse liegt und im Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten endet.

Daraus folgt, daß ein elliptischer Cylinder, dessen Basis obige Ellipse in der xz-Ebene ist, wenn er auf dieser Ebene senkrecht steht, die Kugeloberfläche in einem Kugelkreise schneidet.

Aehnlich wird die Gleichung (3.) für x, y entwickelt, eine andre Ellipsen-Gleichung zwischen diesen Coordinaten von der Form:

$$(5.)\quad x^2 + \frac{r^2}{c^2} y^2 - \frac{2\,br}{c} y = o,$$ zu einer Ellipse gehörig, deren Mittelpunkt ebenfalls nicht im Coordinaten-Centrum des räumlichen Systems liegt, deren eine Achse aber (die kleine) mit einem ihrer Endpunkte in dieses Centrum fällt und zugleich mit der Y-Achse der geraden Coordinaten coincidirt, während die große Achse der X-Achse desselben Systems parallel

läuft. Auch ein durch diese Ellipse gehender grader Cylinder schneidet die Kugeloberfläche in einem Kugelkreise.

Man kann also im Allgemeinen sagen:

Jeder Kugelkreis hat zur senkrechten Projection

aa) entweder eine gerade Linie,

bb) oder einen Kreis, [cf. (a)]

cc) oder eine Ellipse [cf. (b.) und (c.)].

§. 3.

Herleitung der Kreisgleichung aus der perspectivischen Projection.

Nach dem im Cap. II. §. 10. angedeuteten Verfahren erhält man die Gleichung eines beliebigen Kugelkreises auch als perspectivische Projection eines auf einer Tangentenebne aus deren Berührungspunkte (als dem Centrum) construirten Kreises. Dessen Gleichung ist nämlich

(1.) $x^2 + y^2 = \varrho^2$; da nun $x = r \tang \xi'$, $y = r \tang \eta'$, $\varrho = r \tang R$, so wird die Gleichung (1.) zu der folgenden:

(2.) $\tang^2 \xi' + \tang^2 \eta' = \tang^2 R$.

Daraus folgt:

Jeder sphärische Kreis kann als Durchschnittscurve der Kugelfläche mit einem graden Kegel angesehen werden, dessen Spitze im Centrum der Kugel liegt, dessen kreisförmige Grundfläche aber in ihrem Mittelpunkte die Kugel berührt.

Da aber auch Kegel mit elliptischer Basis kreisförmige Durchschnittscurven mit besonders geneigten Ebnen ergeben können, so können diese auch in solchen Fällen auf der Kugeloberfläche sphärische Kreise abgränzen, wenn nämlich die Ebne jedes Kreisschnitts mit der eben erwähnten Kegelschnitt-Ebne zusammenfällt. Wir wollen zeigen, wie auch dies aus den analytischen Entwickelungen leicht folgt.

Gesetzt, auf der Tangentenebene, welche die auf der Kugeloberfläche zu projicirende Figur enthält, sei eine Ellipse verzeichnet, deren Coordinatencentrum im Berührungspunkte der Ebne mit der Kugel liegt, und die Y-Achse sei in der YZ-Ebne des räumlichen Coordinatensystems gelegen, so ist die Gleichung dieser Ellipse im Allgemeinen:

(3.) $a^2 x^2 = 2 ab^2 y - b^2 y^2$;

wäre die Projection dieser Ellipse ein Kugelkreis, so müßte dieser folgende Gleichung haben:

$$(4.)\ \tang^2 R = \frac{\tang^2 \xi' + (\tang \eta' - \tang R)^2 + \tang^2 \xi' \tang^2 R'}{(1 + \tang R \tang \eta')^2}$$

[cf. Cap. III. §. 1. (1.); worin die Coordinaten des Centrums $\left\{ \begin{matrix} \alpha' = o \\ \beta' = R \end{matrix} \right\}$ gesetzt werden müssen.

Entwickeln wir die Gleichung (4.) in derselben Form, wie (3.), so ergeben sich, nachdem $\left\{\begin{array}{l} x = r \tan \xi' \\ y = r \tan \eta' \end{array}\right\}$ gesetzt worden ist, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} (5.) & a = \dfrac{r \tan R}{1 - \tan^2 R} \\ \text{und} \quad (6.) & \dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{1}{1 - \tan^2 R} \end{array}\right\} \text{ also } (7.) \quad b = \frac{r \tan R}{\sqrt{1 - \tan^2 R}};$$

werden diese Bedingungen durch die Gleichungen der Ellipsenelemente erfüllt, so ist die Projection einer solchen Ellipse auf der Tangentenebne ebenfalls ein Kugelkreis:

§. 4.

Die Tangente an den Kugelkreis.

Der größern Einfachheit wegen nehmen wir an, der Mittelpunkt des mit dem Bogenradius R beschriebenen Kugelkreises liege im Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten; so wird seine Gleichung [nach Cap. III. §. 1. (4.)]

$$(1.) \quad \tan^2 R = \tan^2 \xi' + \tan^2 \eta';$$

Ein Normalkreis gehe durch den speciellen Punkt $\xi'\ \eta'$ dieses Kreises, so ist seine Gleichung:

$$(2.) \quad \frac{\tan \xi'}{\tan m} + \frac{\tan \eta'}{\tan n} = 1$$

Aus beiden Gleichungen eliminire man $\tan \eta'$, so erhält man die quadratische Gleichung für $\tan \xi'$

$$(3.) \quad o = \tan^2 \xi' - \frac{2 \tan m \tan^2 n}{\tan^2 m + \tan^2 n} \tan \xi' + \frac{\tan^2 m (\tan^2 n - \tan^2 R)}{\tan^2 m + \tan^2 n}$$

mit der Lösung:

$$(4.) \quad \tan \xi' =$$

$$\frac{\tan m \tan^2 n}{\tan^2 m + \tan^2 n} \pm \sqrt{\frac{\tan^2 m \tan^4 n - \tan^2 m (\tan^2 n - \tan^2 R)(\tan^2 m + \tan^2 n)}{(\tan^2 m + \tan^2 n)^2}}$$

der doppelte Werth für $\tan \xi'$, der durch das doppelte Vorzeichen der Wurzel bedingt wird, deutet auf einen zwiefachen Punkt der Gemeinschaft zwischen Normalkreis und Kugelkreis, d. h. beide schneiden sich im Allgemeinen in zwei Punkten; soll aber das Schneiden in ein Berühren übergehn, so muß dieser Doppelwerth von $\tan \xi'$ zu einem einfachen werden, d. h. die Wurzel mit $\pm$ muß $= 0$ werden. Daraus entspringt also folgende Relation im Fall der Berührung zwischen m, n und R:

$$(5.) \quad \tan^2 R = \frac{\tan^2 m \tan^2 n}{\tan^2 m + \tan^2 n};$$

Diese Gleichung ist aber [nach Cap. II. §. 3. (7.)] die der kleinsten Entfernung des Anfangspunkts der sphärischen Coordinaten von der Linie (2.), d. h. die Gleichung der Senkrechten auf letzterer, woraus gefolgert werden darf:

daß die Tangentenlinie in ξ' η' an den mit R construirten Kugelkreis, senkrecht auf dem nach ξ' η' gezogenen Kreisradius steht.

In dem Falle der Berührung wird aber ferner:

$$(6.)\ \mathrm{tang}\ \xi' = \frac{\mathrm{tang\ m\ tang^2\ n}}{\mathrm{tang^2\ m + tang^2\ n}};$$

$$(7.)\ \mathrm{tang}\ \eta' = \frac{\mathrm{tang^2\ m\ tang\ n}}{\mathrm{tang^2\ m + tang^2\ n}};$$

als Gleichungen zur Bestimmung des Berührungspunkts.

Es ist nur noch übrig, die Gleichung des berührenden Normalkreises für den Punkt ξ' η' zu finden: nun ist aber:

$$(8.)\ \frac{\mathrm{tang}\ \Xi' - \mathrm{tang}\ \xi'}{\mathrm{tang\ m}} + \frac{\mathrm{tang}\ H' - \mathrm{tang}\ \eta'}{\mathrm{tang\ n}} = 0$$

die Gleichung des durch ξ' η' gehenden Normalkreises.

Nach (6.) und (7.) wird ferner:

$$(9.)\ \mathrm{tang}\ \xi'\ \mathrm{tang\ m} = \mathrm{tang}\ \eta'\ \mathrm{tang\ n}$$

daher: (10.) $\mathrm{tang}\ \Xi'\ \mathrm{tang}\ \xi' + \mathrm{tang}\ H'\ \mathrm{tang}\ \eta' = \mathrm{tang^2\ R}$ die gesuchte Tangentengleichung für den Kreis, dessen Centrum in dem Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten liegt.

§. 5.

Herleitnng der Tangentengleichung aus der perspectivischen Projection.

Die Bedingungen seien dieselben, als in §. 3. Auf der Tangentenebne sei ein Kreis verzeichnet, dessen Gleichung

(1.) $x^2 + y^2 = r^2$ ist. Die zugehörige Tangente werde bestimmt durch

(2.) $Xx + Yy = r^2$. Der Kreis hat als Projection auf der Kugel den durch die Gleichung

(3.) $\mathrm{tang^2}\ \xi' + \mathrm{tang^2}\ \eta' = \mathrm{tang^2\ R}$ bestimmten: Legt man nun durch die Tangente in (2.) und das Kugelcentrum eine Ebne, so schneidet diese die Kugeloberfläche in einem Normalkreise, der für den Kugelkreis (3.) zur Tangente werden muß. Reducirt man also die Gleichung (2.) auf die Projectionsgleichung, so erhält man als Tangentengleichung für den Kugelkreis:

(4.) $\mathrm{tang}\ \Xi'\ \mathrm{tang}\ \xi' + \mathrm{tang}\ H'\ \mathrm{tang}\ \eta' = \mathrm{tang^2\ R}$;

ganz wie in §. 4. (10.) entwickelt worden war. Die übrigen Gleichungen in §. 4. haben also auch ihre vollkommen entsprechenden auf der Tangentenebne, z. B.

(5.) entspricht: $r^2 = \frac{m^2\ n^2}{m^2 + n^2}$;

$$\left.\begin{matrix}(6.)\\(7.)\end{matrix}\right\}\text{ entspricht: }\left.\begin{aligned} x &= \frac{mn^2}{m^2+n^2}\\ y &= \frac{m^2\,n}{m^2+n^2}\end{aligned}\right\}\text{ daraus } xm = yn;\ [\text{entsprechend } (9.)]$$

wenn x, y die räumlichen Coordinaten des Berührungspunkts sind.

Anmerkung. Es bedarf sicher nur einer Andeutung, daß das perspectivische Projiciren auf der Kugel der beste Weg sei, zugleich die Verwandtschaft von ebner und sphärischer Analysis, so wie überhaupt von Ebne und Kugeloberfläche ins klare Licht zu stellen; in der That braucht man nur den Kugelradius als unendlich groß anzunehmen, um zu bewirken, daß Tangentenebne und Kugeloberfläche völlig ineinander fallen, d. h., daß die sphärischen Formeln sämmtlich in die entsprechendender ebnen Analysis übergehn.

§. 6.

Der Pol einer Tangente.

Nach Cap. II. §. 9. (3.) ist zu einem Normalkreise, dessen Gleichung $\frac{\tang \xi'}{\tang m} + \frac{\tang \eta'}{\tang n} = 1$ lautet, als Pol der Punkt (eigentlich ein Paar) a′ b′ so zu bestimmen, daß

$$(1.)\ \tang a' = \frac{-1}{\tang m} \text{ und}$$

$$(2.)\ \tang b' = \frac{-1}{\tang n} \text{ ist;}$$

Folglich hat die Kreistangente wegen ihrer Gleichung

$$(3.)\quad \frac{\tang \xi'}{\tang^2 R}\tang \Xi' + \frac{\tang \eta'}{\tang^2 R}\tang H' = 1$$

als Pol den Punkt a′ b′, dessen sphärische Coordinaten durch die Gleichung

$$(4.)\ \left\{\begin{aligned}\tang a' &= \frac{-\tang \xi'}{\tang^2 R}\\ \tang b' &= \frac{-\tang \eta'}{\tang^2 R}\end{aligned}\right\}\text{ gegeben sind.}$$

Daraus entsteht:

$$(5.)\ \tang^2 a' + \tang^2 b' = \tang^2 \varrho = \frac{1}{\tang^2 R};$$

d. h. rückt eine Kugelkreis-Tangente an ihrem Kreise continuirlich fort, so beschreibt ihr Pol einen Kreis, dessen Radius-Tangente den reciproken Werth der des gegebnen Halbmessers hat, d. h. dessen Radius das Complement zum gegebnen ausmacht, und dessen Centrum mit dem des gegebnen Kreises zusammenfällt.

Anmerkung. Ist also $R = 45^\circ$, so ist auch $\varrho = 45^\circ$, d. h. beide Kreise fallen alsdann völlig in einander.

Bemerkung.

Wegen Mangel an Raum sind die folgenden Abschnitte II. III. IV., welche von den merkwürdigsten Eigenschaften der Kugel-Kegelschnitte handeln, hier nicht mit aufgenommen worden, und muß ihnen daher in einem der folgenden Programme der Platz angewiesen werden.

Chronik des Gymnasiums

den Zeitraum von Michaelis 1845 bis Ostern 1847 umfassend.

I. Der Unterricht.

Uebersicht der Lectionen im

A. Wintersemester 184⁵/₆.
B. Sommersemester 1846.
C. Wintersemester 184⁶/₇.

Die Cursus sind in allen Disciplinen: in Prima und Secunda zweijährig, in Ober- und Unter-Tertia einjährig, in Ober- und Unter-Quarta, Ober- und Unter-Quinta halbjährig, in Sexta einjährig. Die Ausnahmen werden unten angezeigt.

I. Latein.

1. Prima. A. Cicero de Officiis II. III. Terent. Phormio. 3 St. Horat. 6 Satiren (privatim 11 Oden und 6 Episteln) 2. St. B. Tacit. Agricola (privatim 3 Reden von Cicero) 2 St. Horat. Epist I, 15 — 20. Stellen aus Virgils Georg. I. (privat. einzelne Horaz. Oden) 3 St. C Cicero Tuscul. I. ganz, II. zum Theil (privat. V.) 2 St. Stellen a. Virgils Georg. II. Horat.: 24 Oden a. Buch I. u. III. Epist. II, 1. 3 St. — A. B. C. Stilübungen — prosaische und metrische; mündliche Unterredungen, Disputirübungen mit den Geübteren, und Extemporalien mit der ganzen Klasse, 3 St.: Prof. Wiggert. (Ordinarius). Stil- und Disputirübungen mit den minder Geübten, 2 St. O. L. Ditfurt. C. Ausgewählte Stellen aus Quintilian. de inst. or., besonders zu Sprechübungen. 1 St. Der Director. B. für die älteren Primaner: Einleitung in die Kunst-Archäologie der Griechen und Römer, mit Benutzung von Kupferwerken, Münzen und Gemmenabdrücken: 1 St. Prof. Wiggert.

2. Secunda. A. Livius XXIII. (privat.: Cic. p. Arch.) Virg. Aen. V, 666 bis VI, 336. B. Cicero pro Roscio Amerino Cap. 1 — 23. (priv. Liv. IX.) Aen. VI, 337 —678. C. Cic. p. Rosc. Am. 23 bis zu Ende (priv. C. p. leg. M.) Aen. VI, 679 — VII. c. 200: A. B. C. Schriftliche prosaische und metrische Uebungen und mündliche Unterredungen, besonders über gehaltene kurze Vorträge aus der Mythologie und den römischen Antiquitäten 3 St. Prof. Dr. Sucro. (Ordinarius.)

3. Obertertia. A. Caes. Bell. civ. II. III, 1 — 40. Ovid. Metamorph. VII mit einigen Auslassungen. B und C. Aus Friedemanns kl. Cic. Chrestomathie 80 Seiten. B. aus Jacobs Blumenlese. Abth. 1 ausgewählte Stücke. C. Ovid. Metam. VIII, 183 — 885. — 5 St. Prof. Wiggert. (Ordinarius). A u. B. Curtius III. IV. 1 — 4. 2 St. Lehrer Dr. Crusius. A. B u. C. Schriftliche prosaische

und leichte metrische Uebungen; Grammatik nach Zumpt; Memorirübungen aus Cäsar, Cicero u. Ovid. 3 St. Prof. Wiggert.

4. Untertertia. A. Caesar Bell. gall. I. II. Ovid. Metam. I, 416 bis zu Ende, m. Auswahl. B. Caes. Bell. G. III. IV. Jacobs Blumenlese Seite 1 — 53. C. Caes. Bell. G. V. VI, 1 — 30, Ovid. Metam. II. mit Ausw. 6 St. A. B u. C Schriftliche prosaische und leichte metrische Uebungen, Grammatik nach Zumpt. 4 St. Oberlehrer Ditfurt (Ordinarius).

5. Oberquarta. A. Cornel. Nep. Datames — Atticus. B u. C. Corn. Nep. Praef. Themist. Alcib. Dion. Epamin. Pelop. Agesil. Eum. Phoc. Timol. Cato, Attic. 5 St. A. B. C. Schriftliche Uebungen, Vocabeln, Grammatik nach Zumpt: 5 St. O.-L. Sauppe. (Ordinarius).

6. Unt.-Quarta A. noch mit Oberquarta zu Einer Klasse — Quarta — vereinigt. B. u. C. Wiederholung der leichteren Abschnitte aus Cornel. Themist. u. Alcibiad. ferner dessen Miltiad., Aristides, Pausan., Lysand., Conon, Jphicr. 4 St. Schriftliche Uebungen und Grammatik n. Zumpt. 3 St. Prof. Pax (Ordinarius). Mündliche Uebungen und Vocabeln. 3 St. Lehrer Dr. Crusius.

7. O.-Quinta. Ausgewählte Stücke aus Ellendt's Lesebuch. A. Prof. Pax (Ordinarius) 3 St. Lehrer Dr. Crusius 2 St. B. Sch.-A.-Kand. Schönstedt (Ordinarius). 5 St. C. Lehrer Kraspe r (Ordinarius) 5 St. Schriftliche und mündliche Uebungen, Vocabeln u. Grammatik nach Zumpt. 5 St. A. Prof. Pax 4 St. Lehrer Dr. Crusius 1 St. B. Kand. Schönstedt 3 St. Sch.-A.-Kandid. Dr. Berthold 2 St. C. Lehrer Kraspe r 5 St.

8. U.-Quinta. A. B. C. Ausgewählte Stücke aus Ellendts Lesebuch 5 St. Schriftliche Uebungen, Vocabeln und Grammatik nach Zumpt. 5 St. Lehrer Hase. (Ordinarius).

9. Sexta. A. B. C. Grammatik nach Zumpt. Uebersetzen der leichtesten Stücke a. Ellendts Lesebuch, Vocabeln, 9 St. Lehrer Meyer. (Ordinarius.)

II. Griechisch.

1. Prima. A. Platons Apologie des Sokrates. B. Thukydides B. 3. (B. 8 privatim). C. Demosthenes erste philipp. u. die 3 olynthischen Reden (1 privatim). A. B. C. Grammatik nach Rost und schriftliche Uebungen. Zusammen 4 St. Der Director. A Ilias II. Sophokles Elektra v. 926 — 1385. (einige Bücher d. Il. priv.) B. Schluß der Elektra und Ilias III. und IV, 1 — 84. (Anfang des Philoktet priv.) C. Ilias IV, 85 bis z. E. u. V. (Einige Bücher privat.) 2 St. Prof. Dr. Sucro.

2. Secunda. A. Xenophons Memorabilien I, 1 — 5. Odyssee III. u. IV. (priv.) B. Xenophon I, 6 — II, 3. Odyss. VI. u. VII. (priv. VIII.) C. Xenoph. II, 4 — III, 4. Odyss. IX. u. XI. (priv. X.). A. B. C. Grammatik n. Rost, u. schriftliche Uebungen. Zus. 6 St. Prof. Wolf.

3. O.-Tertia. Abschnitte aus Ditfurts Chrestom. Xenoph.. Grammatik n. Rost, schriftliche Uebungen. A u. B. 3 St. Lehrer Kraspe r. C. 4 St. Kand. Schönstedt. Einübung der homerischen Formenlehre an Stellen der Odyssee. Memoriren des Gelesenen. 2 St. A. Lehrer Kraspe r. B. Kand. Dr. Berthold. C. Kand. Schönstedt.

4. U.-Tertia. A. B. C. Abschnitte aus Ditfurts Chrestom. Xenoph. 4 St. Grammatik von Rost, und schriftliche Uebungen: 2 St. Ober-Lehrer Ditfurt.

5. O.-Quarta. A. Anfangsgründe der Grammatik bis Verba auf μι, Uebungen im Lesen und im Verstehen leichter vorgesprochener Sätze, Vocabeln: B. C. Grammatik bis (einschließlich) Verba auf μι, Vocabeln, Lesestücke a. Jacobs Elem. B. 6 St. A u. B. Lehrer Hase. C. Kand. Schönstedt.

6. U.-Quarta. A. noch mit Oberquarta vereinigt. B. u. C. Formenlehre bis zu den Pronomin. Vocabeln. Uebungen wie 5 A. 5 St. Lehrer Dr. Crusius.

III. Deutsch.

1. Prima. A. B. C. Recension aufgegebener Aufsätze, mit Vergleichung von Musterstellen; extemporane Uebungen im Erfinden, Prüfen, Ordnen und Darstellen von Gedanken, Uebungen im Declamiren und im freien Vortrage. — Einführung in das historische Studium der Sprache durch eine Uebersicht über die bisherigen Leistungen darin, und durch Einzelnes aus der Formenlehre. — Literatur: A. (Nach kurzer Wiederholung der ältern Zeiten). Vom 15ten Jahrhundert bis auf die schlesischen Dichter. B. Von da bis um 1750. C. Fortsetzung: hauptsächlich verweilt bei Klopstock, Lessing und Herder — Zus. 2 St. Prof. Wiggert.

(In einer außerordentlichen Stunde für die, welche dazu besondre Neigung hatten, und bei denen nicht wesentliche Lücken in andern nöthigeren Kenntnissen die Theilnahme unrathsam machten, weitere Anweisung zur Erkenntniß der älteren deutschen Sprachdenkmäler, mit Benutzung von F. W. Reimnitz Leitfaden. A. Derselbe.)

2. Secunda. A. B. C. Recension der Aufsätze, mit Vergleichung von Musterstellen. Uebungen im Declamiren und Interpretiren. Anleitung zur wissenschaftlichen Meditation, Disponir- und logische Vorübungen. 2 St. Kand. Schönstedt.

3. O.-Tertia. Wie Secunda. 2 St. A. B. Lehrer Kraspe r. C. Kand. Schönstedt.

4. U.-Tertia. A. B. C. Recension der Aufsätze. Uebungen im Declamiren, im Meditiren u. s. w. 2 St. Lehrer Dr. Crusius.

5. O.-Quarta. A. B. C. Recension der Aufsätze, mit Hinweisung auf die Grammatik. Uebungen im Declamiren, im Wiedergeben historischer Vorträge. 2 St. Ob.-L. Sauppe.

6. U.-Quarta. A. noch mit Oberquarta vereinigt. B. u. C. wie dort. 2 St. Prof. Par.

7. O.-Quinta. Recension der schriftlichen Aufsätze. Grammatik. Uebungen im Vorlesen, Declamiren, Wiedererzählen. 2 St. A. Lehrer Dr. Crusius. B. Kand. Dr. Berthold. C. Lehrer Kraspe r.

8. U.-Quinta. Wie Oberquinta. A. B. C. 4 St. Lehrer Hase.

9. Sexta. Grammatik, Satzbildung. Leichte schriftliche Aufsätze. Lese- u. Gedächtniß-Uebungen. A. B. C. 4 St. Lehrer Meyer.

IV. Französisch.

1. Prima. A. B. C. Stilistische Uebungen. Gelesen wurde: A. l'Avare von Molière. B. Ideler-Nolte, die Abschnitte a. Boileau. C. de Ségur, Napoléon l. 1 — 4.

2. Secunda. A. B. C. Grammatik und Stilübungen, nach Hirzel, und n. Wolfart's Thèmes français. Gelesen: Abschnitte in Ideler-Nolte. A. aus Guibert, Berquin, Condorcet. B. a. Bailly, Florian, Barthélemy. C. a. Marmontel, La Harpe, Mercier.

3. O.-Tertia. Grammatik und schriftliche Uebungen, nach Wolfarts Thèmes français. A. Th. 185 — 203. B. 35 — 53 (priv. 1 — 34.) C. 54 — 90

4. U.-Tertia. wie Obertertia. A. Th. 1 — 34. B. 35 — 46, u. die regul. u. irregul. Verba nach Wolfarts »Formen« und dessen Tableau synoptique des formes simples de la conjug. franç. C. Th. 46 — 69.

In jeder Klasse wöchentlich 2 St. O. L. Wolfart.

V. Hebräisch.

1. Prima. A. B. C. Lectüre ausgewählter Abschnitte aus den historischen und poetischen

Büchern A. Testaments. Grammatik von Gesenius. Schriftliche Uebersetzungen ins Hebräische und Analysen hebr. Texte.

2. Secunda. A. B. C. Elementar= und Formenlehre nebst dem Wichtigsten der Syntax. Lectüre leichter Abschnitte a. d. A. Test. Uebersetzungen ins Hebräische.

In jeder Klasse wöchentlich 2 St. Der Director.

VI. Religion.

1. Prima. A u. B. Einleitung in die Schriften des A. u. N. Testaments und Lectüre ausgewählter Stellen des letzteren im Grundtexte. C. Geschichte der christlichen Religion und Kirche. 2 St. Der Director.
2. Secunda. A. Beschluß der Sittenlehre. B. u. C. Glaubenslehre. Lectüre leichter Stellen des N. Test. 2 St. Prof. Dr. Sucro.
3. O.-Tertia. A. Glaubenslehre. B. Allgemeine — C. Specielle Sittenlehre. 2 St. O. L. Wolfart.
4. U.-Tertia. Wie Obertertia.
5. O.-Quarta. } A. u. C. Sittenlehre. B. Glaubenslehre. 2 Stund. { O. L. Sauppe.
6. U.-Quarta. } A. u. C. Sittenlehre. B. Glaubenslehre. 2 Stund. { L. Dr. Crusius.
7. O.-Quinta. A. u. C. Bibelkunde N. Test. Erklärung ausgewählter Stellen. Das 2te und 3te Hauptstück des Luth. Katech. B. Bibelkunde A. T. Erklärung ausgewählter Stellen. 2 St. A. u. C. Lehrer Dr. Crusius. B. Kand. Dr. Berthold.
8. U.-Quinta. A. u. C. die drei ersten Hauptstücke. des Luth. Katech. B. Das Leben Jesu. 2 St. Lehrer Hase.
9. Sexta. A. Biblische Geschichte N. Testaments und kurze Geschichte des Christenthums. Ein Theil des ersten Hauptstücks des Luth. Katech. B. Bibl. Geschichte A. Testam. Andrer Theil des ersten Hauptstücks L. K. C. wie A. 2 St. L. Meyer.

VII Philosophische Propädeutik.

Prima. A. Aus der Psychologie: Theorie der sinnlichen Empfindungen und Wahrnehmungen und der Vorstellungscombinationen. Wiederholungen aus der Logik. B. Repetitionen der unter A bezeichneten Gegenstände a. d. Psychologie. Fortsetzung der letzteren. Die Lehre von den Seelenthätigkeiten als Strebungen und Gefühle. C. Wiederholung der Lehre von den intellectuellen Gebilden. Einleitung in die reine Logik. 2 St. Prof. Pax.

VIII. Mathematik. (Lehrbuch: Matthias Leitfaden, bearb. v. Hennige.)

1. Prima. A. Binomischer Lehrsatz. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die wichtigsten Sätze der ebnen Trigonometrie. B. Repetition d. binom. Lehrs. — Lehre von den Gleichungen. C. Die wichtigsten Abschnitte der synthet. und analyt. Geometrie. A. B. C. Schriftliche geometrische Aufgaben. A. u. B. 4 St. C. 3 St. Kand. Gorgas.
2. Secunda. A. u. C. Planimetrie: Berechnung des Inhalts ebener Figuren. Die Stereometrie. B. Arithmetik. Die Lehre von den Potenzen mit ganzen Exponenten; die Anwendung der Potenzlehre auf Zahlensysteme, auf Decimalbrüche, auf Quadrat= und Kubikzahlen, die Ausziehung der Quadrat= und Kubikwurzel. Die Rechnung in Wurzelgrößen, die arithmetische Proportion, die Lehre von den Logarithmen und ihr Gebrauch. Zuletzt Wiederholung der Stereometrie. 4 St. Prof. Wolf.
3. O.-Tertia. A. u. C Wiederholung der Planimetrie bis (incl.) zur Lehre vom Kreise. Sodann die Anwendung der geometrischen Proportion auf ebne Figuren. B. Die vier Rechnungs-Operationen in allgemeinen Größen, die Lehre vom Maße der Zahlen,

die Theorie der gemeinen Brüche, die Rechnung in Potenzen und in Decimalbrüchen; Berechnung der Quadrat- und Kubikzahl; Ausziehung der Quadrat- u. Kubik-Wurzel. 3 St. Kand. Gorgas.

4. U.-Tertia. A. u. C. wie 3 B. — B. Planimetrie bis zur Kreislehre (incl.) A. u. B. 3 St. Kand. Gorgas. C. Lehrer Krasper.

5. O.-Quarta. A. Einleitung in die allgemeine Arithmetik. B. Einleitung in die Planimetrie nebst den leichtesten Lehrsätzen und Aufgaben. C. Wie A. und B. 3 St. Kand. Gorgas.

IX. Arithmetik.

6. U.-Quarta. A. noch mit Oberquarta vereinigt. B. u. C. Die Decimalbrüche, zusammengesetzte Regel de tri, Zins- und Gesellschaftsrechnung. 3 St. Lehrer Weise.

7. O.-Quinta. A. B. C. Die Proportionslehre und Kettenregel. Die einfache Regel de tri m. directen und indirecten Verhältnissen. 4 St. Derselbe.

8. U.-Quinta. A. B. C. Die Bruchrechnung. 4 St. Derselbe.

9. Sexta. A. B. C. Die vier Species mit gleich und ungleich benannten Zahlen. 4 St. Derselbe.

X. Geschichte und Geographie.

(Lehrbücher: Schmidt's Grundriß. Sucro's Leitfaden.)

1. Prima. A. Germanische Vorgeschichte. Allgemeine Geschichte der Völker und Staaten des Mittelalters bis gegen das 11. Jahrhundert, mit Berücksichtigung der geographischen Verhältnisse. B. Geschichte des Mittelalters in der Periode der Kreuzzüge und bis zum Verfalle mittelalt. Zustände. Geographische Erläuterungen zu diesen Zeiträumen. C. Fortsetzung der allgemeinen Geschichte des Mittelalters. Specialgeschichte des Preuß.-Brandenburgischen Staates seit dessen Entstehung bis zu den ersten Hohenzollerschen Regenten. Einzelne Partien a. d. Geschichte des italienischen und deutschen Städtewesens und der Sittengeschichte des M. A. überhaupt. 2 St. Prof. Pax.

2. Secunda. A. Geschichte der Griechen, Macedonier und Macedonischen Reiche, Wiederholung der Geographie von Australien und Afrika. B. Geschichte der Karthager und Römer bis zu Ende des 3. punischen Krieges. Wiederholung der Geographie v. Amerika. C. Geschichte der Römer vom Anfange der Gracchischen Unruhen bis zum Untergange des oströmischen Reichs. Wiederholung der Geographie von Deutschland, besonders dem preußischen Staate, von Dänemark und der Schweiz. 3 St. Prof. Wolf.

3. O.-Tertia. A. Geographie von Großbritannien, Skandinavien, Rußland, Oestreich außerhalb Deutschland und der Schweiz. Mittlere Geschichte. B. Außereuropäische Geographie. Neue Geschichte. C. Oro- und Hydrographie Deutschlands. Neueste Geschichte seit 1740. 3 St. A. B. Kand. Schönstedt. C. O. L. Wolfart.

4. U.-Tertia. Wie 3. — A. B. C. O. L. Wolfart.

5. O.-Quarta. A. und C. Mittlere und neuere Geschichte, besonders Brandenburgische. Geographie des Schauplatzes derselben. B. Alte Geschichte. Neue Geographie des Schauplatzes derselben m. Bezug auf das Alterthum. 2 St. A. B. C. O. L. Sauppe.

6. U.-Quarta. A. noch mit Oberquarta vereinigt. B. und C. wie Oberquarta. 2 St. Lehrer Dr. Crusius.

7. O.-Quinta. A. Neue Geschichte. Außereuropäische Geographie. B. Mittlere Geschichte. Geographie von Europa. C wie A. 3 St. A. Lehrer Dr. Crusius. B. O. L. Wolfart u. Kand. Schönstedt. C. O. L. Wolfart.

8. U.-Quinta. A. die wichtigsten Länder Europas. Zweite Hälfte der alten Geschichte. B. die übrigen Erdtheile. Erste Hälfte der alten Geschichte. C wie A. 2 St.
A u. B. Lehrer Weise. C. Lehrer Hase.
9. Sexta. A u. C. Geographie von Deutschland, insbesondere der preußischen Monarchie. Hauptbegebenheiten der mittlern und neueren Geschichte. B. Einleitung zur Geschichte und Geographie. Uebersicht von Europa. Hauptbegebenheiten der A. Geschichte. 2 St. Lehrer Weise.

XI. Physik.

1. Prima. A. Optik u. Farbenlehre. B. Hydrostatik, Aërostatik, Lehre von der Wärme. C. Lehre vom Galvanismus, Magnetismus und Elektromagnetismus. 2 St. Kd. Gorgas.
2. Secunda. A. Einleitung in d. Physik. Statik und Mechanik fester Körper. B. Hydrostatik und Hydrodynamik. C wie A. 1 St. Derselbe.

XII. Naturbeschreibung.

3. O.-Tertia. A. Anthropologie. B. Mineralogie. C. Zoologie. 2 St. A. Lehrer Krasper. B. C. Kand. Gorgas.
4. U.-Tertia. wie Obertertia.
5. O.-Quarta. A. B. C. Botanik. 2 St. Kand. Dr. Burghardt. B. Lehrer Krasper. C. Kand. Gorgas.
6. U.-Quarta. A. mit Oberquarta vereinigt. B. u. C. wie Oberquarta. A. Kand. Dr. Burghardt. B. u. C. Lehrer Krasper.
7. O.-Quinta. A. Mineralogie. B. Botanik. C. Mineralogie. 2 St. A. Kand. Dr. Burghardt. B. u. C. Lehrer Krasper.
8. U.-Quinta. A. u. C. Zoologie. B. Botanik. 2 St. Lehrer Weise.
9. Sexta. wie Unterquinta.

XIII. Zeichnen.

1. Schüler aus Prima, Secunda, Ober- und Untertertia, die freiwillig dieser Kunst noch Zeit widmen wollen, erhielten wöchentlich 1 St.
2. Ober-Quarta. 2 St.
3. Unter-Quarta. 1 St.
4. Ober-Quinta. 1 St.
5. Unter-Quinta. 1 St.
6. Sexta. 1 St.

Den gesammten Unterricht ertheilte Prof. Pax.

XIV. Gesang.

1. Freiwillige und fähige Theilnehmer aus den 4 ersten Klassen wurden unterrichtet wöchentlich in 1 St.
2. Ober-Quarta. 1 St.
3. Unter-Quarta 1 St.
4. Ober-Quinta. 1 St
5. Unter-Quinta. 2 St.
6. Sexta. 2 St.

Den gesammten Unterricht ertheilte Chor- u. Musikdirector Wachsmann.

XV. Kalligraphie.

1. Ober-Quarta 1 St.
2. Unter-Quarta. 2 St.
3. Ober-Quinta. 3 St.
4. Unter-Quinta. 3 St.
5. Sexta. 3 St.

In sämmtlichen Klassen unterrichtete der Schreiblehrer Domcustos Brandt.

Auch in der Stenographie wurde versuchsweise der Unterricht für solche, die dazu Lust hatten, fortgesetzt. (Vgl. Programm von 1845.) In ihr unterwies nämlich wöchentlich in einer Stunde Herr Intendantur-Secretair Lamlé aus uneigennütziger Liebe zur Sache im Winter $18\frac{45}{46}$ eine Anzahl Secundaner, im Sommer 1846 Ober-Tertianer, und im Winter $18\frac{46}{47}$ Unter-Tertianer; ja er widmete sogar im letzten Halbjahr außerdem noch eine wöchentliche Stunde einigen aus Secunda und Ober-Tertia, die sich noch mehr Fertigkeit erwerben wollten. Während Herr Lamlé bei der General-Synode in Berlin beschäftigt war, hatte der städtische Lehrer Herr Stäcker die Güte ihn zu vertreten.

2. Das Lehrerpersonale.

Im Lehrerpersonale ist hinsichtlich der festangestellten Lehrer eine Veränderung nicht vorgekommen. Auch haben die beiden Herren Schulamts-Kandidaten Schönstedt und Gorgas ihre im Programme von 1845 bereits anerkannte verdienstliche Thätigkeit an der Anstalt fortgesetzt.

Der dort gleichfalls erwähnte Herr Schulamts-Kandidat Dr. Burghardt behielt nach Beendigung seines Probejahrs noch einige Lectionen, folgte aber Ostern v. J. einem Rufe an das Pädagogium zu Putbus. Michaelis 1845 traten abermals zwei Kandidaten des höheren Schulamts, die Herrn Dr. Karl Adolf Berthold aus Barby und Friedrich Koch aus Magdeburg, ihr Probejahr an. Der erstere fand mit Beendigung desselben eine Anstellung als Hülfslehrer am Gymnasium zu Stendal. Dem letzteren war es, nach Beendigung der ersten Monate, in welchen seine Thätigkeit vorschriftsmäßig nur auf Hospitiren in den verschiedenen Klassen beschränkt war, nur kurze Zeit vergönnt, der Anstalt, die ihn selbst gebildet hatte, sich durch eignen Unterricht dankbar zu zeigen, indem er bald nach Weihnachten an einem Brustleiden erkrankte, das ungeachtet der angewandten eigenen Vorsicht und ärztlichen Sorgfalt, und bei der liebevollsten elterlichen und geschwisterlichen Pflege, doch, nach einer ohne Erfolg gebrauchten Badekur, zu unserem innigen Schmerze am 16. Juni 1846 seinen frühen Tod herbeiführte.

3. Die übrigen äußeren und inneren Verhältnisse des Gymnasiums.

Die Gymnasial-Bibliothek ist theils aus den Fonds der Anstalt, durch die mit dem ehrerbietigsten Danke zu erkennende Geneigtheit des Königl. Hochlöbl. Provinzial-Schulkollegiums, theils durch einige von des Herrn Ministers der Unterrichtsangelegenheiten Exc. uns huldreichst übersandte Geschenke vermehrt worden. Die letzteren waren folgende:

Prof. Dr. Gerhardts archäologische Zeitung. Jahrgang 1845.

Prof. Dr. Förstemanns 2 Schriften: Lutherdenkmale, und: Luthers Tod und Begräbniß.

Corpus Reformatorum. Vol. XIII.

Außerdem erhielten wir auch am 18. Februar 1846 durch die Huld des Herrn Ministers zur unentgeltlichen Vertheilung an fleißige und würdige Schüler der beiden ersten Klassen 20 Exemplare der von Herrn Director Dr. August zu Berlin herausgegebenen **Acta Lutheri etc.**

Herr Staatsrath Dr. K. Morgenstern aus Dorpat, einer der ältesten noch lebenden vormaligen Schüler unsers Gymnasiums, schenkte bei seiner Anwesenheit in seiner Vaterstadt im Sommer 1846, mehrere seiner kleineren Schriften, die der Bibliothek noch fehlten. Die Buchhandlung Schwetschke u. Sohn in Halle übersandte einige ihrer philolog. Verlagsartikel.

Für diese Gaben unsern Dank!

Auf die Vermehrung der Schülerbibliothek, sowie des physikalischen Apparats und des naturhistorischen Cabinets wurde gleichfalls, soweit die Fonds reichten, Bedacht genommen.

Die in dem Zeitraume, welchen diese Nachrichten umfassen, von den vorgesetzten Hohen Behörden mehreren Lehrern, und selbst wiederholt, huldvollst bewilligten Gratificationen sind von den Betheiligten mit den Gefühlen des lebhaftesten und ehrfurchtsvollsten Dankes erkannt worden.

Erlaß des Schulgeldes erhielten im Wintersemester 18$\frac{45}{46}$: 41 Schüler, im Sommersemester 1846: 37 Schüler, im Wintersemester 18$\frac{46}{47}$: 34 Schüler.

Aus der Funkschen Stiftung wurden an Unterstützungen vertheilt:

zu Michaelis 1845: 62 Thlr. — sgr. — Pf. Gold und 121 Thlr. 22 sgr. 7 Pf. Cour. an 2 Abiturienten und 13 Schüler;

zu Ostern 1846: 67 Thlr. 2 sgr. 6 Pf. Gold und 121 Thlr. 22 sgr. 7 Pf. Cour. an 3 Abiturienten und 12 Schüler.

zu Michaelis 1846: 49 Thlr. Gold und 138 Thlr. 7 sgr. 5 Pf. Cour. an 2 Abitur. u. 14 Schüler.

Von Anordnungen der Hohen vorgesetzten Behörden sind hier zu erwähnen, daß die öffentlichen Prüfungen künftig nicht mehr zu Michaelis, sondern jedesmal zu Ostern Statt finden sollen (Rescript vom 2. October 1845); Erläuterungen zu einigen Bestimmungen des Abiturientenprüfungsreglements (Rescr. v. 5. Mai 1846); und die gestattete Beibehaltung der bisher eingeführten lateinischen und griechischen Grammatiken (Rescr. v. 14. desselb. M. u. J.).

Frequenz.

Die Schülerzahl betrug:

zu Anfang des Wintersemesters 18$\frac{45}{46}$: 412.
» » » Sommersemesters 1846: 423.
» » » Wintersemesters 18$\frac{46}{47}$: 410.
und beträgt am Schlusse desselben: 405.

Zur Universität gingen mit dem Zeugniß der Reife:

Ostern 1846: Karl van Bergen a. Burg.
Albert Bühling a. Magdeburg.
Herman Deegen a. Egeln.
Rudolf Dehnicke a. Ozorkow im Königr. Polen.
Wilhelm Joffroy a. Danzig.
Otto Krause a. Brumby b. Calbe a. d. Saale.
Hans Scheringer a. Magdeburg.

Michaelis 1846: Adolf Fischer a. Dannigkow b. Gommern.
Robert Fritze a. Magdeburg.
Christian Koch a. Schakensleben.
Friedrich Wilda a. Graudenz.

Am 16. März d. J. sind für reif erklärt worden:

Friedrich Heinrich Julius Böttcher a. Magdeburg.
Anton Felix Damm a. Magdeburg.
Karl Friedrich Albert Danckwortt a. Magdeburg.
Friedrich Heinrich Deißner a. Magdeburg.
Karl Theodor Heidman a. Magdeburg.
Ernst Wilhelm Möller a. Erfurt [Magdeburg].
Friedrich Wilhelm von Pieschel a. Magdeburg.
Heinrich Rathmann a. Unna in Westphalen [Magdeburg].

Aufgaben
zu den freien Arbeiten der drei obern Klassen von Michaelis 1846 bis Ostern 1847.

I. in lateinischer Sprache.

1. in Prima.

a. für die obere Abtheilung (Prof. Wiggert.)

Winter 18 45/46.

1. De Furii Camilli in patriam meritis (nachdem die Abiturienten zu Michaelis 1845 darüber geschrieben hatten.) 2. Romani quibus artibus populos subactos in potestate et dicione tenuerunt? 3. Civitatum Graecarum, quum in potestate populi Rom. essent, quae conditio fuit? 4. Valetudinis cura cur est adolescentibus commendanda? (epist.) 5. Usque adeone scire tuum nihil est, nisi te scire hoc sciat alter? (epist.) 6. Concordia res parvas crescere, discordia maximas dilabi insignioribus antiquitatis exemplis demonstratur. (Abitur. zu Ostern 1846.)

Sommer 1846.

1. Kritischer Versuch im Ergänzen und Berichtigen entstellter kleiner Gedichte neuerer Latinisten, mit Angabe der Gründe. 2. Aristides milites ante pugnam Plataeensem adhortari fingitur. 3. Philippus Macedo et Napoleo inter se comparantur. 4. Quibus artibus usus C. Jul. Caesar maximam Galliarum partem imperio populi Rom. subjecit? (Abitur.) Zu Uebungen im Sprechen wurden Wiederholungen aus der alten Gesch. benutzt.

Winter 18 46/47.

1. Mores Agricolae secundum Tacitum adumbrantur. (Nach Lesung des Agricola von Tacitus.) 2. Gracchi fratres ab adversariorum accusationibus defenduntur. 3. J. Caesar Alexandro Philippi filio virtutibus fuit superior. 4. Otto I. jure Magnus appellatur. 5. Recte Socrates mortem effugere noluit. 2 — 5 zugleich zu Disputationen benutzt.) 6. Quibus rebus paullatim mutata est forma reipublicae Atheniensis? (Abit.)

b. Für die untere Abtheilung (Oberlehrer Ditfurt.)

Winter 18 45/46.

Zu freien Arbeiten:

1. De rebus gestis Agesilai (nach Xenoph. u. Corn. Nep.) 2. De bello Mithridatico primo. 3. De fide quatenus amicis sit praestanda. 4. Concio C. Sempronii apud pop. R. post cladem Cannens. habita.

Zu Disputirübungen:

1. Paupertas virtutis magistra. 2. Mentiri nonnunquam est boni viri. 3. Amici scelus magistratui indicare debemus. 4. In frumenti caritate licetne ei, qui primus advehit, cives de adventu aliarum navium frumentariarum celare? (Cic. Off. III. §. 50 seqq.) 5. Non licet civitati quemquam necare. 6. Aedium venditor debetne vitia narrare, an licet celare emptorem? (Cic. Off. III. §. 54 sqq.)

Zu mündlicher Erzählung:
de rebus Romanorum.

Sommer 1846.

Zu freien Arbeiten:

1. De rebus gestis M. Furii Camilli. (Liv. V. VI. VII. 1.) 2. De expeditione Siciliensi Atheniensium. 3. Cur consulendum cuique est suae existimationi?

Zu Disputirübungen:

1. Vita urbana melior est quam rustica. 2. In vita quotidiana firma memoria potior est quam iudicii acumen. 3. Nullo modo in bello hostium urbem incendere aut excidere licet. 4. Licetne civi, cuius frater ab hoste occisus sit, quum nec miles et inermis esset, ulcisci illum, qui occidit? 5. Licetne civitatibus in scelere vindicando adhibere crudelitatem? 6. Divitiae civitatibus prosunt.

Zu gemeinschaftlicher Erfindung:

De gloria.

Zu mündlicher Erzählung:

1. De rebus Punicis. 2. De rebus Karthaginiensium. 3. De rebus Graecorum.

Winter 18 46/47.

Zu freien Arbeiten:

1. De rebus a Caesare in Aegypto gestis (bell. Alexandr.) 2. Vita Traiani imperatoris. 3. De constantia.

Zu Disputirübungen:

1. Si patriam prodere conabitur pater, silebitne filius? (Cic. Off. III. §. 90.) 2. Utrum homo profusus magis vituperandus an tenax? 3. Estne interdum, ut ulcisci iniurias debeamus? 4. In liberis rebus publicis bonus orator plus prodesse civitati potest, quam vel optimus belli dux. 5. Sumptus qui pace in exercitum fiunt, toti populo haud mediocri emolumento sunt. 6. Si verus amicus simul et bonus frater in eo sint, ut flumine hauriantur, utrum prius servare conabere? 7. Caecitas an surditas gravius malum?

Zu gemeinschaftlicher Erfindung:

De levitate animi.

Zu mündlicher Erzählung:

De rebus Assyriorum. De rebus Persarum.

2. Ober-Secunda. (Prof. Dr. Sucro.)

1. Lycurgus res Lacedaemoniorum novis legibus atque institutis auxit, novaque morum disciplina stabilivit. 2. Acestae (Segestae s. Egestae) Siciliae urbis origo secundum ea, quae Virgilius in Aen. V. 604 — 758 habet, breviter enarratur. 3. Palinurum, Lucaniae promontorium, unde nomen ceperit, Virgilio in Aeneidis V. 835 sqq. et VI. 337 — 383 duce breviter enarratur. 4. Tribunatus plebeji apud Romanos quaenam caussa et origo fuerit, exponitur. 5. Elysii ex Virg. Aen. 637 — 678 adumbratio. 6. M. At. Regulus res Romanorum clade fregit, pietate ac fide auxit.

II. in deutscher Sprache.

1. in Prima. (Professor Wiggert.)

Winter 18 45/46.

1. (Für die Neueingetretenen:) Welche deutschen Klassiker haben mich bis jetzt am meisten angezogen? und warum? 2. Aussaat und Ernte als Bild des menschlichen Lebens. 3. Lobrede auf Columbus. 4. Welche Vortheile gewährt das schriftliche Uebersetzen aus fremden Sprachen? 5. Aurora Musis amica. 6. Was ist in Gellerts (oder nach freier Wahl: eines andern Dichters aus der ersten Hälfte oder der Mitte des 18ten Jahrhunderts) Sprache jetzt veraltet? (lexic. u. gramm.)

Sommer 1846.

1. Uebung in der Kritik an einem (den Schülern unbekannten) absichtlich dazu verstümmelten und durch falsche Lesearten entstellten Gedichte. 2. u. 3. Beschreibung eines Gemäldes der Kunstausstellung. (Es ist ein historisches zu wählen, oder, wenn sich jemand im Humoristischen versuchen will, ein sogenanntes Genrebild. — Nachdem das Wesen der Beschreibung durchgesprochen und an Mustern von Winkelmann, G. Forster, Göthe u. a. erläutert war.) 4. Charakteristik der Jungfrau von Orleans nach Schiller. 5. Schillers Glocke nach Plan und Inhalt entwickelt. (oder: Eine schwere Jugendzeit ein rauher Frühling.) 6. Thema nach freier Wahl.

Winter $18\frac{46}{47}$.

1. Ueber den hohen Werth unablässiger Thätigkeit. 2. Hoffnung ist ein fester Stab und Geduld ein Reisekleid, da man mit durch Welt und Grab wandert in die Ewigkeit. 3. Nicht das viele Wissen thut's, sondern wissen etwas Guts. 4 u. 5. Thema nach freier Wahl, mit (erfolgreicher) Aufforderung zu dichterischen Versuchen. 6. Ueber den Einfluß des Studiums der Wissenschaften auf den Charakter.

2. in Secunda. (Kandidat Schönstedt.)

Winter $18\frac{45}{46}$.

1. Gespräch zwischen Scipio und Hannibal vor der Schlacht bei Zama. 2. Gedanken am Grabe des Columbus. 3. Sei hochbeseligt oder leide, Das Herz bedarf ein andres Herz; Getheilte Freud' ist doppelt Freude, getheilter Schmerz ist halber Schmerz. 4. Werth der Jugendjahre. 5. Laßt uns besser werden, gleich wird's besser sein. 6. Betrachtungen beim Anblick einer zerstörten Ritterburg. 7. Der Sonntag auf dem Lande. 8. Schilderung eines Schiffbruchs. 9. Schilderung der Aussicht von einem hohen Berge. 10. Vorzüge des Stadt- und Landlebens. Gespräch. 11. Das unverhoffte Wiedersehen. Gespräch oder Erzählung. 12. Der Abschied. Gespräch. 13. Concordia parvae res crescunt, discordia maximae dilabuntur. Rede. 14. Charakteristik der alten Geschichte. 15. Betrachtungen beim Anblick des gestirnten Himmels. 16. Gefahren des Reichthums. 17. Gefahren der Armuth. 18. Freies Thema.

Sommer 1846.

1. Die Vorzüge des Schulunterrichts verglichen mit denen des Privatunterrichts für die sittliche und wissenschaftliche Bildung des Menschen. 2. Ist es wahrscheinlich, daß Alexander der Große die Römer besiegt haben würde, wenn er nach Italien gegangen wäre? (vergl. Liv. IX, 17 — 19). 3. Zu welchen Betrachtungen giebt die römische Geschichte Veranlassung? 4. Der Charakter Cicero's. 5. Arbeit ist des Blutes Balsam, Arbeit ist der Tugend Quell. 6. Ueber die Zeit, nach Schiller's Spruch des Confucius. 7. Warum ist es gut, daß wir die Zukunft nicht vorher wissen? 8. Charakterschilderung eines Neugierigen. 9. Charakterschilderung eines Prahlers. 10. Trost bei unverschuldeten Leiden. 11. Orandum est, ut sit mens sana in corpore sano. 12. Parallelle zwischen Sulla und Cäsar. 13. Freies Thema.

Winter $18\frac{46}{47}$.

1. Folgen der Erfindung der Buchdruckerkunst. 2. Folgen der Entdeckung Amerikas. 3. Wen nennt man mit Recht glücklich? 4. Der Unzufriedene. Charakterschilderung. 5. Der Launische. Charakterschilderung. 6. Der Eigensinnige. Charakterschilderung. 7. Gedanken an der Gruft Friedrichs des Großen. 8. Rückblick auf die Kinderjahre. 9. Ist für Europa ein Zurücksinken in Barbarei zu fürchten? 20. Gedanken eines Franzosen bei der Nachricht von Napoleons Unglück in Rußland. 11. Gedanken eines Deutschen bei der Nachricht von der Völkerschlacht bei Leipzig. 12. Brief eines preußischen Officiers aus Paris nach dem Einrücken der Verbündeten in die französische Hauptstadt. 13. Freies Thema.

3. Ober-Tertia.

(Winter $18\frac{45}{46}$. Lehrer Krasper.)

1. Der Abfall des Ambiorix und Kativolkus. Nach Caes. b. g. V., 26 seqq. 2. Meine Vorsätze für das bevorstehende Winterhalbjahr. Brief. 3. Die Bürgschaft. Nach Schiller's Ballade. 4. Schilderung des Sonnenaufgangs (zu einer beliebig zu wählenden Jahreszeit). 5. Xenoph. Memorab. I. 4. und 6. Xenoph. Memorab. II., 2. Übersetzungen in der Klasse. 7. Das Weihnachtsfest. 8. Betrachtungen beim Beginn des neuen Jahres. 9. Schwert und Feder. Dialog. 10. Über die Ursachen der Vaterlandsliebe. 11. Über die Selbstsucht oder den Egoismus.

Sommer 1846. (Lehrer Krasper.)

1. Der wiederkehrende Frühling. Brief. 2. Unsere diesjährige Gemäldeausstellung. Brief. 3. Das Turnen. 4. Der unzufriedene Landmann. Ein Mährchen. 5. Die große Rübe. Erzählung. 6. Lebensbeschreibung des Hannibal. Nach Cornel. Nep. 7. Charakteristik des Hannibal. 8. Meine Hundstagsferien. 9. Der Ring des Polykrates von Schiller. a) Kurze Inhaltsangabe. b) Anlage des Ganzen. c. Benutzung der Quellen und Abweichungen von denselben. d. Grundidee der Ballade. 10. Die Kraniche des Ibykus. Ebenso behandelt. Beiden Arbeiten war eine ausführliche Interpretation der zwei Balladen in der Klasse vorhergegangen. 11. Schwere Ähren neigen sich. Chrie.

Winter $18\frac{46}{47}$. (Kandidat Schönstedt.)

1. Folgen der Mäßigkeit. Briefform. 2. Folgen des Müßiggangs. Briefform. 3. Über die Nothwendigkeit einer weisen Benutzung der Zeit. 4. Selbstbetrachtungen am Neujahrsmorgen. 5. Gedanken am Grabe Luthers. 6. Gedanken auf dem Schlachtfelde von Waterloo. 7. Die mannigfaltigen Beschäftigungen der Menschen von einem Thurme aus betrachtet. 8. Jeder ist seines Glückes Schmied. 9. Die Gastfreundschaft der Alten verglichen mit der Gastfreundschaft der neuern Zeit. 10. Freuden des Winters. 11. Schilderung einer Winterlandschaft. 12. Wie die Aussaat, so die Erndte. Erzählung. 13. Lust und Liebe zum Dinge macht Müh' und Arbeit geringe. 14. Sich selbst besiegen ist der schönste Sieg. 15. Briefliche Mittheilungen an einen Freund über neue Lebensverhältnisse, in welche der Schreibende getreten ist. 16. Glückwunschschreiben zu der günstigen Gestaltung der Lebensverhältnisse eines Freundes. 17. Nur Beharren führt zum Ziel. 18. Über das Schädliche der Gewöhnung an überflüssige Bedürfnisse. 19. Trostschreiben an einen Freund, der mit seinem Schicksale unzufrieden ist. 20. Werth der Jugendzeit. 21. Freies Thema.

4. in Unter-Tertia. (Lehrer Dr. Crusius.)

Winter $18\frac{45}{46}$.

1. Eine Herbstlandschaft (Schilderung). 2. Gedanken beim Anblick des Doms zu Magdeburg. 3. Edle Rache. Erzählung nach Seume's Gedicht: der Wilde. 4. Leiden eines naßkalten und stürmischen Decembertages. 5. Gedanken eines Jünglings beim Beginn des neuen Jahres. 6. Warum muß das Studium der deutschen Sprache uns ganz besonders am Herzen liegen? (Brief.) 7. Gedanken am 18. Februar 1846. 8. Schilderung eines schönen Tages im März. (In der Klasse gearbeitet.) 9. Müßiggang lehrt viel Böses. Jes. Sir. 33, 29. (Abhandlung).

Sommer 1846.

1. Schilderung eines schönen Aprilabends. 2. Schilderung eines unfreundlichen Tages im Mai. 3. Inhalt und Sinn des Gedichtes von Schiller: Die Theilung der Erde. 4. Gedanken an einem offenen Grabe. 5. Selbstgespräch am Morgen eines Geburtstages. (In der Klasse gearbeitet). 6. Warum lernen wir Griechisch? (Brief an einen jüngern Bruder). 7. Unrecht schlägt seinen eigenen Herrn. (Abhandlung).

Winter $18\frac{46}{47}$.

1. Schilderung eines veränderlichen Oktobertages. 2. Beschreibung meiner Arbeitsstube. 3. Der 6. November. (Aus meinem Tagebuche.) 4. Die Sage von Tantalus und ihr Sinn. 5. Philemon und Baucis. (Erzählung, nach gegebenen Grundzügen). 6. Gedanken beim Anblick eines zugefrornen Stromes. 7. Der leichtsinnige Schüler (Charakterschilderung). 8. Wodurch können wir uns gegen die Eltern dankbar beweisen? (Brief an einen jüngern Bruder). 9. Schilderung eines unfreundlichen Tages im März. (In der Klasse gearbeitet.) 10. Die Biene, eine Lehrerinn der Jugend. (Abhandlung.)

Verzeichniß der Schüler des Domgymnasiums zu Magdeburg, zur öffentlichen Prüfung Ostern 1847. [405.]

Diejenigen, deren Geburtsort nicht angegeben ist, sind aus Magdeburg gebürtig. In [ ] steht der jetzige Wohnort der Eltern, falls dieser nicht mit dem Geburtsorte des Schülers derselbe ist; M. bedeutet dabei Magdeburg.

Prima (30.)

Die mit † bezeichneten sind bei der Prüfung am 16. März d. J. für reif zur Universität erklärt worden.

Wilhelm Arndt a. Kirchdorf b. Greifswald.
Friedrich Bochdanetzky.
†Friedrich Bötticher.
Gustav Bötticher.
Adolf Brandt.
Bruno Brieger a. Halle.
Herman Cäsar a. Wülfingerode [Sülldorf].
Otto Costenoble.
†Felix Damm.
†Albert Danckwortt.
†Heinrich Deißner.
Otto Dienemann a. Güsen [Schartau].
Friedrich Döbber a. Hakeborn.
Julius Dreyer.
Friedrich von Gerlach a. Berlin.
†Theodor Heidman.
Reinhold Heyn.
Ferdinand Hildebrandt.
Wilhelm Huth.
Hugo Keßler.
†Wilhelm Möller a. Erfurt [M.]
†Wilhelm von Pieschel.
†Heinrich Rathmann a. Unna [M.]
Hermann Rudolphi a. Schwerz b. Halle [Dammendorf b. Halle].
Eduard Schilde a. Erfurt [M.]
Ferdinand Schreyer.
Franz Sintenis.
Fedor Sucro.
Adolf Thiele.
Louis von Uklanski.

Secunda (54.)

Die zur obern Abtheilung dieser Klasse gehörigen Schüler sind mit * bezeichnet.

Theodor Braune a. Winningen.
Gustav Brecht a. Gr. Quenstedt [Ochtmersleben].
Friedrich Bruns a. Kloster Neuendorf b. Gardelegen.
Gustav Bunge a. Micheln.
Albrecht Cuno a. Dodendorf.
Bernhard Decker a. Schönebeck.
Karl Döring a. Sandau.
Albert Fischer * a. Ziesar [Hohendodeleben].
Karl Fritzsche * a. Barleben.
Jakob von Gerlach a. Kläden b. Stendal [M.]
Fritz Gewe * a. Gr.-Holzhausen in d. Altmark.
Simon Grape a. Barleben.
Bernhard Grosse a. Erfurt [M.]
Theodor Hachtmann a. Anhalt b. Pleß [Barby].
Walther Händler a. Altenweddingen.
Karl Hauptmann a. Tarthun.
Moritz Hermann * a. Schönebeck.
Max Hirsch a. Halberstadt [M.]
Theodor Humbert a. Berlin [M.]
Karl Jänsch a. Mühlhausen [Schönebeck].
Karl Janicke.
Friedrich Knobbe a. Bahrendorf [M.]
Ferdinand Koch a. Parey.
Karl Kortum a. Hakeborn [Schwaneberg].
Louis Lagemann * a. Gr. Wanzleben.
Hugo Langenstras aus Schönebeck [Plötzky].
Otto Lehmann a. Stendal [M.]
Ludwig Leithoff. *
Julius Liepelt.
Albert Lücke. *
Ernst Meyer * a. Letzlingen [Kloster Neuendorf].
Karl Müller a. Samswegen.
Heinrich Pfanne a. Gommern.
Heinrich Rathmann * a. Klein-Lübs [Wasserleben].
Rudolf Reinsch a. Ratibor [M.]
Ferdinand Rudolphi a. Dammendor b. Halle.
Heinrich Rustenbach * a. Nordgermersleben.
Wilhelm Scheffer.
Ernst Scheringer.
Emil Schlunck * a. Schönebeck.
Hermann Schmidt* a. Dähre [Hohendodeleben].
Hermann Schmidt * a. Borne.
Ernst Schmidt a. Genthin [Burg].
Albert Sieger a. Egeln.
Karl Siegfried.
Gustav Teubner. *
Emil Torges a. Mühlhausen [M.]
Fritz von Trzebiatowski a. Torgau [M.]
Wilhelm Uterwedde a. Wolmirstedt.
Richard Voigtel. *
Otto Volgenau a. Kaltenhof b. Perleberg.
Theodor Wagner * a. Bleckendorf.
Theodor Walkenhorst.
Hermann Zabel a. Schönebeck.

Ober-Tertia (29.)

Karl Braun a. Schermke.
Karl Fischer.
Otto Friese a. Quedlinburg [Buckau].
Eduard Fritze a. Scharteuke [M.]
Gustav Grothe a. Berlin [M.]
Wilhelm Hellwig.
Albert Jacoby.
Otto Korn a. Remkersleben.
Max Lange.
Oskar Laue [Kähnert b. Burg].
Gustav Leithoff.
Adelbert Lichtenberg a. Seehausen b. M.
Louis Mehlhose a. Dönstedt [Böddensell]
Louis Meyer a. Gr. Oschersleben.
Gustav Münch a. Nordhausen [M.]
Wilhelm Münde a. Schönebeck.
Heinrich Otto a. Schwaneberg.
Johannes Rathmann [Krakau].
Theodor Reinecke a. Gr. Salze.
Julius Reinecke.
Ludwig Roch.
Albrecht Scharrer.
Karl Schmücker a. Loburg.
Hermann Schulze a. Salzwedel [M.]
August Schwarzlose a. Ziesar.
Louis Thiele a. Salzwedel [M.]
Lebrecht Uhlich a. Pömmelte [M.]
Eduard Weniger a. Neuhaldensleben.
Theodor Zollmann.

Unter-Tertia (44.)

Julius Bauermeister a. Loitsche.
Adolf Brüggemann.
Philipp Coqui a. Gr. Germersleben [M.]
Rudolf Cuno a. Dodendorf.
Guido Curitz.
Max Damm.
Wilhelm Dorendorf a. Gardelegen.
Hermann Fischer a. Ziesar [Hohen-Dodeleben].
Paul Francke a. Gr. Wanzleben.
Hugo Fromme a. Bensdorf b. Genthin [Genthin.]
Gustav Güssow } a. Kloster Gröningen
Ernst Güssow } [Egeln.]
Ernst Hermann a. Schönebeck.
Hugo Holstein.
Gustav Jäckel.
Karl Kalkow a. Calbe a. d. S.
Emil Knüppel.
Otto Koch.
Felix Krüger } a. Colbitz [M.]
Moritz Krüger }
Ernst Kühne a. Saarmund [M.]
Friedrich Kuhnert.
Max Lamlé a. Coblenz [M.]
Theodor Lemke.
Konrad Listemann.
Reinhold Meinecke.
Ernst Meyer.
Wilhelm Meyer.
Friedrich Michaëlis.
Emil Müller a. Samswegen.
Hermann Muths a. Erfurt.
Karl Oppermann a. Gr. Ammensleben [Stemmern.]
Eduard Rathmann a. Unna [M.]
Friedrich Reißner a. Osterwieck.
Wilhelm Rohde a. Egeln.
Wilhelm Roterberg a. Salbke.
Philipp Scheringer.
Richard Silberschlag.
Theodor Tuchen a. Staßfurth.
Eduard Varges a. Berlin.
Karl Wetter a. Genthin [Sudenburg.]
Karl Wiebelitz a. Groß-Salze.
Odo von Wulffen a. Pietzpuhl.
Hermann Zieger a. Sandau [Leitzkau.]

Ober-Quarta (31.)

Louis Bergmann a. Neumühl b. Salzwedel.
Andreas Brösel a. Zens b. Calbe.
Eduard Bussenius a. Sohlen [Wellen].
Adolf Curitz.
Hermann Elsner a. Reichnow b. Wrietzen [Kl. Rosenburg].
Herman Freise.
Hermann Gödecke a. Bischofswalde b. Erxleben.
Albrecht Heineke a. Schönebeck.
Karl Hildebrandt.
Ferdinand Hoffmann a. Süplingen.
Rudolf Humbert a. Berlin [M.]
Emil Junghann a. Aschersleben [Drakenstedt].
Albert Käsemacher.
Oskar Koch a. Parey.
Albert Koch a. Gr. Rossau b. Osterburg.
Richard Kühnau.
Werner Lindemann a. Osterburg [M.]
Wilhelm Mathias.
Hermann Mechow a. Ramstedt.
Heinrich Meyer.
Rudolf Neuland a. Gr. Glogau [M.]
Adolf Neumann a. Ortrand b. Mühlberg [Neue Neustadt-Magdeburg].
Hermann Papendieck.
Ernst Schmutz a. Crüssau b. Burg [Werkleitz b. Kalbe].
Julius Thäder.
Gustav Voigt a. Wolmirstedt.
Hermann Wehe.
Louis Weniger a. Neuhaldensleben.
Max Witzenhausen a. Schermke b. Oschersleben.
Richard v. Wulffen a. Wüsten-Jerichow b. Burg [Loburg].
Max Zernial a. Cleve [Neuhaldensleben].

Unter-Quarta (34.)

Guido Aßmann.
August Baensch.
Gustav Bichtemann a. Egeln [Groß-Germersleben.]
Albrecht Conradi a. Schönebeck.
Herman Crusius a. Deutsch in d. Altmark [Siestedt.]
Victor von Fischer a. Danzig [M.]
Julius Freytag a. Dodendorf.
Oskar Fritze.
Gustav Hartmann.
Ludwig Henz.
Wilhelm Jellinghaus.
Bruno Käsebier a. Schönebeck.
Rudolf Kornfeld.
Wilhelm Kreuzmann.
Friedrich Kückenthal a. Hasserode [Hakeborn.]
Albert Lagemann a. Wanzleben.
Rudolf Lösener.
Wilhelm Luther a. Schönebeck.
Karl Maquet.
Philipp Maquet.
Gustav Müller a. Salbke.
Wilhelm Naumann a. Osterweddingen.
Hermann Ohlendorff a. Belgern [Loburg.]
Hermann Peters.
Franz Rudolphi a. Dammendorf bei Halle.
Louis Schieß.
Theodor Schmidt a. Uhrsleben.
Friedrich Theune a. Groß-Salze [Hermsdorf.]
Ferd. Tuckermann.
Karl Ursinus.
Eduard Wiermann.
Friedrich Zernial } a. Cleve [Neuhaldensleben.]
Ernst Zernial }
Julius Ziecher [Ochtmersleben.]

Ober-Quinta (41.)

Julius Berger a. Nordhausen [M.]
Adolf Bussenius a. Sohlen [Wellen].
Rudolf Costenoble.
Wilhelm Deppe.
Karl Dynnebier.
Theodor Ernst a. Falkenburg in Pommern.
Hugo Förste.
Walter Heinecke aus Schönebeck.
Adolf Hentze.
Wilhelm Heuckenkamp.
Gustav Heyer [Sudenburg].
Emil Jahn a. Loburg [M.]
Ernst Karnstedt.
Heinrich Knoche.
Otto Koch a. Gr. Rossau b. Osterburg.
Wilhelm Könecke a. Gr.-Wanzleben.
Rudolf von Kotze.
Ernst Krüger.
Rudolf Kühne a. Berlin [M.]
Wilhelm L'hermet.
August Maquet.
Oskar Mehlhose a. Barleben.
Robert Möhring.
Reinhold Nesemann a. Bahrendorf.
Gustav Papendieck.

Julius Pfordte a. Bitterfeld.
Ferdinand Piatscheck.
Karl Rejall.
Wilhelm Riedel a. Neuhaldensleben.
Ferdinand Ritter.
August Scharrer.
Arnold Schnarr a. Burg [Sudenburg].
Adolf Schotte.
Christian Schünemann a. Ochtmersleben.
Wilhelm Starke a. Gr. Salze.
Hermann Sucro.
Eduard Ulrich a. Schackensleben.
Richard Waltenberg a. Leitzkau [M.]
Rudolf Weise a. Derenburg [Neue Neustadt].
Hermann Wilborn.
Wilhelm Zernial a. Neuhaldensleben.

Unter-Quinta (64.)

Hans von Alemann a. Altenplathow.
Albrecht Anstensen a. Beiendorf.
Gustav Biermann } a. Errleben.
Hermann Biermann }
Otto Brösel a. Tangermünde [Neue Neustadt-Magdeb.]
August Burchardt.
Adolf Clement.
Friedrich Dannenberg a. Schneitlingen.
Richard Deneke.
Friedrich Duchstein a. Bukau.
Emil Ebeling.
Wilhelm Ferchland.
Eduard Fischer a. Groß-Wanzleben [M.]
Maximilian Fischer.
Karl Freundt a. Kl. Paschleben b. Cöthen [Neue Neustadt Magdeb.]
Friedrich Fröhlig a. Ribbendorf b. Weferlingen.
Albert Grobe a. Calbe a. d. S.
Emil Grosse.
Hermann Günther.
Gustav Haug.
Otto Heyn.
Albert Hildebrandt.
August Kämmerer a. Heinrichsberg.
Karl Käsemacher.
Robert Kleinecke a. Neuhaldensleben.
Karl Knevels.
Julius König.
Hugo Kühne a. Stolberg [M.]
Alwin Kummer a. Bahrendorf.
Hermann Laborde.
Theodor Liepelt.
Adolf Lingner.
Gustav Maquet.
Bernhard Meyer.
Albert Metz a. Brandenburg [M.]
Otto Muths.
Ludwig Otto.
Ulrich Paasche a. Neuhaldensleben
Richard Paasche a. Althaldensleben [Neue Neustadt-Magdeburg.]
Fritz Pielert.
Friedrich Roch.
Herman Rönsch.
Louis Ruprecht a. Schönebeck. [M.]
Herman Saalwächter a. Gommern.
Adolf Sasse.
Adolf Scherping a. Olvenstedt.
Julius Schirrmeister a. Koburg [M.]
Adolf Schmelzer a. Commende Bergen b. Seehausen im Magdeburgischen.
Rudolf Schnackenburg a. Glatz [M.]
Herman Schönfeldt a. Calbe a. d. S. [M.]
Heinrich Schrader.
Gustav Seipke a. Kaltenborn b. Oebisfelde.
Adolf Stampe.
Wilhelm Stöffler a. Westerhüsen.
Hugo Stötzer a. Prenzlau [M.]
Adolf Teitge a. Loburg [Gr. Ottersleben].
Albert Thiele a. Salzwedel [M.]
Emil Trenkmann.
Theodor Uhlich a. Pömmelte [M.]
Julius Voigtel.
August Wernecke a. Buckau.
Theophil Wieruszewsky.
Paul Wolfart.
Louis Wolter.

Sexta (78).

Gustav Baensch.
Hermann Bauermeister.
Louis Behrendt a. Schönebeck.
Adolf Böse a. Leitzkau [M.]
Cäsar Brockhaus.
Adolf Brockhaus.
Wilhelm Brünicke.
Karl Bühling.
Otto Bühling.
Gustav Clement.
Adolf Damm.
Rudolf Dankworth.
Gustav Feber a. Neust. Magdeb. [M.]
Hugo von Fischer a. Danzig [M.]
Heinrich Fischer.
Gustav Freye.
Fedor Fritze.
Louis Gericke.
Adolf Gewert.
Ernst Grüson.
Rudolf Haack.
Andreas Heinrichs a. Ochtmersleben [Neuhaldensleben.]
Otto Hemptenmacher.
Hermann Höndorf.
Rudolf Horch.
Albert Humbert a. Berlin [Magdeb.]
Albert Ibold.
Hermann Jourdan.
Hans von Kaltenborn.
Heinrich Kaiser.
Ferdinand Köhler.
Robert Kohls.
Hermann Kost a. Wellen [M.]
Louis Kruse a. Hülsebeck [M.]
Karl Kuchenbuch a. Sudenburg-Magd.
Adolf Kühne.
Otto Künne.
Louis Lange a. Heinrichsberg [Niegripp.]
Hermann Laue.
Ludwig Lehmann a. Stendal [M.]
Udo Lorenz.
Adolf Luber.
Robert Maaß.
Albert Maquet.
Otto Marth a. Colberg [M.]
Gustav Meitzendorff.
August Nagel a. Frose.
Wilhelm Nagel a. Wackersleben.
Adolf Naumann.
Otto Nolte aus Rätzlingen.
Alwin Panzer a. Nedlitz [Swinemünde.]
Bernhard Pape a. Hohen-Leina [M.]
Wilhelm Papendieck.
Gustav Prey a. Berlingerode [M.]
Wilhelm Ranzow.
Otto Reibe.
Franz Robolsky.
Fritz v. Rosenberg a. Frankfurt a. O. [M.]
Albert Rosenbrock a. Sudenb.-Magd.
Wilhelm Rost.
Louis Rückert.
Gustav Ruprecht a. Schönebeck [M.]
Otto Schäffer a. Groppendorf.
Fritz Schieß.
Albert Schildt a. Hasselburg.
Rudolf Schmilinsky.
Georg Schneider.
Wilhelm Schubert.
Friedrich Sens a. Prödel.
Friedrich Spamann a. Sudenb.-Magd.
Emil Stahlknecht a. Neuhaldensleben.
Karl Stein.
Gustav Stock [Neue Neust.-Magdeb.]
Theodor Teichner.
Wilhelm Thiele.
Friedrich Totte a. Halberstadt [M.]
Heinrich Winselmann a. Niederndodeleben.
Leo von Wulffen a. Pietzpuhl.

Oeffentliche Prüfung im Domgymnasium zu Magdeburg
am 26. März 1847.

Vormittag von 8 bis 12 Uhr.

Deutsch in Sexta (Hr. Lehrer Meyer).
Lateinisch in Unter-Quinta (Hr. Lehrer Hase).
Arithmetik in Ober-Quinta (Hr. Lehrer Weise).
Deutsch und Lateinisch in Unter-Quarta (Hr. Prof. Bax).
Mathematik in Ober-Quarta (Hr. Candidat d. h. Sch.-A. Gorgas).
Geschichte und Geographie in Unter-Tertia (Hr. O. L. Sauppe).

Nachmittag von 2 bis 4 Uhr.

Französisch in Ober-Tertia (Hr. O. L. Wolfart).
Griechisch in Secunda (Hr. Prof. Wolf).
Griechisch in Prima (Hr. Prof. Dr. Sucro).

Druck und Papier von E. Baensch jun. in Magdeburg.