Indbydelsesskrift

til

den offentlige Examen

i

Skiens lærde Skole

1850.

I. Om Functionen Γm, især med Hensyn til dens numeriske Evaluation.
Af Adjunkt *Arentz*.

II. Skoleefterretninger.

Christiania.

Trykt hos *Chr. Gröndahl*.

Om Functionen Γm, især med Hensyn til dens numeriske Evaluation.

Functionen Γm, hvorved det bestemte Integral $\int_0^{\frac{1}{0}}(x^{m-1}dxe^{-x})$ i Almindelighed betegnes, spiller, som bekjendt, i den höiere Mathematik en vigtig Rolle, og besidder flere mærkelige Egenskaber. Derfor har den ogsaa været behandlet af de meest udmærkede Analytikere ligefra *Eulers* Tid, der förrst henledede Opmærksomheden paa den. Jeg tör derfor neppe gjöre Regning paa at levere noget Nyt, og det saameget mindre, som jeg senere er kommen til Kundskab om, at flere Resultater, hvortil jeg ved mine Undersögelser selvstændig var kommen, for lang Tid siden have været angivne og fremstillede i en Form, som langt overtræffer det, jeg har kunnet præstere. Jeg skulde saaledes ikke have vovet at fremlægge disse, hvoraf intet Udbytte er at vente, hvis ikke endog Loven havde gjort det til Pligt for Lærerne ved de lærde Skoler, ogsaa paa sin Side at documentere sine videnskabelige og pædagogiske Studier, som den ene Side af deres Virksomhed, medens den offentlige Examen ogsaa for dem skal tjene til at lægge for Dagen de practiske Resultater.

Imidlertid er der et Punct med Hensyn til den omhandlede Functions numeriske Bestemmelse, som, det stedse har forekommet mig, er forbigaaet i de Skrifter, jeg har havt Adgang til, omendskjönt det forekommer mig, at det er af væsentlig Betydning for den Exacthed, der fordres i de mathematiske Videnskaber. Da det er forbundet med Vanskeligheder, paa en directe Maade at evaluere denne Function, endogsaa under Formen, $-\int_0^1 dx(\log(1-x))^{n-1}$ (idetmindste har det ikke villet lykkes mig at udvikle dette Udtryk paa en hensigtssvarende Maade); er man gaaet ud fra Functionens fundamentale Egenskaber, nemlig $\Gamma(m+1) = m\Gamma m$, og $\Gamma 1 = 1$, hvoraf fölger $\Delta \log \Gamma m = \log m$, eller $\Gamma m = e^{\Sigma \log m}$. Men forsaavidt denne Function skal repræsentere Integralet $\int_0^\infty x^{m-1}dxe^{-x}$, er den ikke tilstrækkelig individualiseret; thi i ethvert endeligt Integral indkommer, som bekjendt, en periodisk Function, hvis Specification i ethvert specielt Tilfælde er nödvendig.

Sæt nemlig, at Gm var en bestemt Function med omhandlede Egenskaber, saa er det klart, at disse ogsaa vilde tilkomme Functionen $\varphi(\sin 2m\pi, \cos 2m\pi) Gm$, naar den arbitrære periodiske Function saaledes bestemmes, at den bliver 1, naar m er $= 1$. Saaledes ville disse to Functioner have de fundamentale Egenskaber fælleds med hinanden indbyrdes og med Integralet $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$. Gm er altsaa en Specification af den almindelige Function, og at denne maa specificeres paa denne bestemte Maade for at falde sammen med det givne endelige Integral, tiltrænger Beviis.

Denne Lacune findes, om jeg ikke feiler, ogsaa i den Abelske Afhandling, oeuvres compl. Tome 2, pag. 21. Efter nemlig at have betegnet det endelige Integral $\Sigma \frac{1}{x}$ med Lx, udleder han deraf $\int Lx dx = Cx + \Sigma \log x = Cx + \log \Gamma x$, og sætter uden videre den saaledes bestemte Function Γx identisk med $\int_0^{\frac{1}{0}} (x^{m-1} dx e^{-x})$, idetmindste bruger han den Signatur, hvormed dette Integral i Almindelighed betegnes. Vel var det blot hans Hensigt paa dette Sted, at vise en Anvendelse af det endelige Integral $\Sigma \frac{1}{x}$; men dog anseer jeg det ikke umuligt, at denne Lacune kan have undgaaet hans Opmærksomhed. Denne Afhandling er nemlig skreven, forinden han under sin udenlandske Reise stiftede Bekjendtskab med *Cauchys* Skrifter, hvis Læsning, han selv erkjender, har aabnet hans Öine paa en forbausende Maade for adskillige Mangler i den da almindelige mathematiske Methode, og vistnok har bidraget til at give hans Arbeider deres mærkelige Fuldendthed.

Hovedpunctet i den Afhandling, som jeg her drister mig til at fremlægge, er altsaa Fyldningen af denne Lacune, som jeg har troet at opdage, idet jeg vil, som jeg haaber, paa en stringent Maade söge at bestemme det bestemte Integral $\int_0^{\frac{1}{0}} (x^{m-1} dx e^{-x})$ eller Γm. Ved Siden heraf fremsætter jeg de Methoder, jeg har brugt til at udfinde flere af denne Functions Egenskaber, samt til dens numeriske Beregning, især med Hensyn til Bestemmelsen af Integralet $\Sigma \frac{1}{x^\mu}$, og Fastsættelsen af Approximationens Nöiagtighed.

* * *

§ 1.

Rækken

$$\omega - \log(1+\omega),$$
$$+\frac{\omega}{2} - \log\left(1+\frac{\omega}{2}\right),$$
$$+\frac{\omega}{3} - \log\left(1+\frac{\omega}{3}\right),$$
$$+\frac{\omega}{4} - \log\left(1+\frac{\omega}{4}\right),$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

er convergerende for enhver reel Værdi af $\omega > -1$.

Beviis. 1. Naar ω er positiv, vil Rækkens Værdie stedse være positiv; thi

$$a - \log(1+a)$$

har stedse en positiv Værdi.

Hvis nemlig a er $\overline{\overline{<}}\, 1$ og > 0,

er $$a - \log(1+a) = \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3}\right) + \left(\frac{a^4}{4} - \frac{a^5}{5}\right) + \text{etc.}$$

eller som en Sum af positive Störrelser > 0.

Er $a > 1$, kan man finde en saadan Værdi β, at $(1+\beta)^m = (1+a)$, eller $\sqrt[m]{(1+a)} - 1 = \beta$, hvor m kan tages saa stor, at $\sqrt[m]{(1+a)} < 2$, og β saaledes < 1. I dette Tilfælde have vi seet, at

$$\beta > \log(1+\beta),$$

altsaa $$m\beta > \log(1+\beta)^m \text{ det er } > \log(1+a).$$

Men $$(1+\beta)^m > m\beta \;\; ɔ\!: \; (1+a) > (1+m\beta),$$

eller $a > m\beta$, og saaledes $a - \log(1+a)$

stedse positiv.

Men det bliver ogsaa let, at finde den Limite, Rækken ikke kan overskride; thi sættes n et heelt Tal $> \omega$, og skrives Rækken

$$\omega - \log(1+\omega) + \frac{\omega}{2} - \log\left(1+\frac{\omega}{2}\right) + \frac{\omega}{3} - \log\left(1+\frac{\omega}{3}\right) \ldots + \frac{\omega}{n-1} - \log\left(1+\frac{\omega}{n-1}\right)$$
$$+\frac{\omega}{n} - \log\left(1+\frac{\omega}{n}\right),$$
$$+\frac{\omega}{n+1} - \log\left(1+\frac{\omega}{n+1}\right),$$
$$+\frac{\omega}{n+2} - \log\left(1+\frac{\omega}{n+2}\right),$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$+\frac{\omega}{n+m} - \log\left(1+\frac{\omega}{n+m}\right), \quad \text{etc.}$$

og bemærkes, at

$$\frac{\omega}{n+m} - \log\left(1+\frac{\omega}{n+m}\right) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{(n+m)^2} - \left[\left(\frac{1}{3}\frac{\omega^3}{(n+m)^3} - \frac{1}{4}\frac{\omega^4}{(n+m)^4}\right) + \ldots\right],$$

det er: $$\frac{\omega}{n+m} - \log\left(1+\frac{\omega}{n+m}\right) < \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{(n+m)^2}\ ; —$$

har man ved at sætte successiv $m = 0, 1, 2, 3$ etc.,

$$\frac{\omega}{n} - \log\left(1+\frac{\omega}{n}\right) + \frac{\omega}{n+1} - \log\left(1+\frac{\omega}{n+1}\right) + \frac{\omega}{n+2} - \log\left(1+\frac{\omega}{n+2}\right) \ldots + \frac{\omega}{n+m} - \log\left(1+\frac{\omega}{n+m}\right)$$
$$< \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} \ldots + \frac{1}{(n+m)^2}\right),$$

hvilken sidste for $m = \infty$ er $< \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{1}{n-1}$. *)

Saaledes er

$$\omega - \log(1+\omega) + \frac{\omega}{2} - \log\left(1+\frac{\omega}{2}\right) + \text{ in inf.}$$
$$< \omega - \log(1+\omega) + \frac{\omega}{2} - \log\left(1+\frac{\omega}{2}\right) \ldots \frac{\omega}{n-1} - \log\left(1+\frac{\omega}{n-1}\right) + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{1}{n-1},$$

og paa den anden Side

$$> \omega - \log(1+\omega) + \frac{\omega}{2} - \log\left(1+\frac{\omega}{2}\right) \ldots \frac{\omega}{n-1} - \log\left(1+\frac{\omega}{n-1}\right),$$

eftersom den udeladte Deel stedse er positiv. Disse to Rækkers Differents $\frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{1}{n-1}$ er forsvindende for n uendelig.

---

*) Er $k < 1$, saa er $(1-k)^{-(\mu-1)} = 1 + (\mu-1)k + \frac{(\mu-1)\mu}{1.2}k^2,$

altsaa for $k < 1$, $\quad (1-k)^{-(\mu-1)} > [1 + (\mu-1)k].$

Sættes $\quad k = (m+\rho+1)^{-1},$

har man $$\left(\frac{m+\rho}{m+\rho+1}\right)^{-(\mu-1)} > 1 + \frac{\mu-1}{m+\rho+1}$$

eller $$(m+\rho)^{-(\mu-1)} > (m+\rho+1)^{-(\mu-1)} + \frac{\mu-1}{(m+\rho+1)^{\mu}}$$

ↄ: $$\frac{1}{\mu-1}\left(\frac{1}{(m+\rho)^{\mu-1}} - \frac{1}{(m+\rho+1)^{\mu-1}}\right) > \frac{1}{(m+\rho+1)^{\mu}}.$$

Sættes $\rho = 0, 1, 2, 3$ og adderes, har man

$$\frac{1}{\mu-1}\left(\frac{1}{m^{\mu-1}} - \frac{1}{(m+\rho+1)^{\mu-1}}\right) > \frac{1}{(m+1)^{\mu}} + \frac{1}{(m+2)^{\mu}} + \frac{1}{(m+3)^{\mu}} \ldots + \frac{1}{(m+\rho)^{\mu}},$$

og for $\rho = \infty$

$$\frac{1}{\mu-1} \cdot \frac{1}{m^{\mu-1}} > \frac{1}{(m+1)^{\mu}} + \frac{1}{(m+2)^{\mu}} + \frac{1}{(m+3)^{\mu}} + \ldots \text{ in inf.}$$

Beviis. 2. Er ω negativ $> (-1)$,
bliver $\omega - \log(1+\omega)$ ogsaa positiv, altsaa Rækken

$$> \omega - \log(1+\omega) + \frac{\omega}{2} - \log\left(1+\frac{\omega}{2}\right) \ldots + \frac{\omega}{n-1} - \log\left(1+\frac{\omega}{n-1}\right).$$

Men i dette Tilfælde er

$$-\log\left(1+\frac{\omega}{n+m}\right) = -\frac{\omega}{n+m} + \frac{\omega^2}{2(n+m)^2} - \frac{\omega^3}{3(n+m)^3} + \text{etc.},$$

der paa Grund af hvert Leds positive Værdi er

$$< -\frac{\omega}{n+m} + \frac{\omega^2}{2(n+m)^2} - \frac{\omega^3}{2(n+m)^3} + \text{etc.},$$

$$\text{ɔ:} \quad < -\frac{\omega}{n+m} + \frac{\omega^2}{2(n+m)^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{\omega}{n+m}}.$$

Altsaa, naar for m sættes 0, 1, 2, 3 . . .

$$\frac{\omega}{n} - \log\left(1+\frac{\omega}{n}\right) + \frac{\omega}{n+1} - \log\left(1+\frac{\omega}{n+1}\right) + \ldots \frac{\omega}{n+m} - \log\left(1+\frac{\omega}{n+m}\right)$$

$$< \frac{\omega^2}{2}\left\{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{\omega}{n}} + \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{\omega}{n+1}\right)} \cdots \frac{1}{(n+1)^3} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{\omega}{n+m}\right)}\right\},$$

hvilken, paa Grund af den negative Værdi af ω, er

$$< \frac{\omega^2}{2\left(1+\frac{\omega}{n}\right)}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots \frac{1}{(n+m)^2}\right),$$

som, naar $m = \infty$, bliver

$$< \frac{\omega^2}{2\left(1+\frac{\omega}{n}\right)} \cdot \frac{\omega}{n-1}.$$

Saaledes ligger den uendelige Række i dette Tilfælde mellem Grændserne

$$\omega - \log(1+\omega) + \frac{\omega}{2} - \log\left(1+\frac{\omega}{2}\right) \ldots + \frac{\omega}{n-1} - \log\left(1+\frac{\omega}{n-1}\right)$$

og $\omega - \log(1+\omega) + \frac{\omega}{2} - \log\left(1+\frac{\omega}{2}\right) \ldots + \frac{\omega}{n-1} - \log\left(1+\frac{\omega}{n-1}\right) + \frac{\omega^2}{2\left(1+\frac{\omega}{n}\right)(n-1)}$,

hvis Forskjel er forsvindende, naar n er uendelig stor.

Rækken bliver ogsaa convergerende for en negativ Værdi af ω med en numerisk Værdi > 1, naar man for Logarithmen af de negative Tal antager Værdien af Logarithmen til de positive Tal af samme Talværdi.

Forövrigt sees let, at Rækken er continuerende for alle Værdier af ω fra -1 til ∞; men Continuiteten afbrydes, naar $\omega = -1$.

Sættes $\omega = 1$, gaaer Rækken over til

$$1 - \log 2 + \tfrac{1}{2} - \log\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{3} - \log\tfrac{4}{3} + \text{ etc.},$$

der efter det forhen Beviste er convergerende, og hvis Værdi man pleier at betegne med h.

Tager man for sig Rækken

$$-h\omega + \omega - \log(1+\omega) + \frac{\omega}{2} - \log\left(1 + \frac{\omega}{2}\right) + \text{ etc.},$$

der efter det Foregaaende er convergerende og continuerende fra $\omega = -1$ (excl.) til $\omega = \infty$, og betegner denne med $\log G(1+\omega)$, sees for det Förste, at den for $\omega = 0$ reduceres til 0; altsaa $\log G.1 = 0$, eller $G.1 = 1$; ligesaa bliver den 0 for $\omega = 1$, eller $G2 = 1$.

Sættes for ω Störrelsen $1+\omega$, gaaer Rækken over til

$$-h(1+\omega) + (1+\omega) - \log 2\left(1 + \frac{\omega}{2}\right) + \frac{1+\omega}{2} - \log\tfrac{3}{2}\left(1 + \frac{\omega}{3}\right) \text{ etc.}$$
$$= -h + 1 - \log 2 + \tfrac{1}{2} - \log\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{3} - \log\tfrac{4}{3}\ldots$$
$$-h\omega + \omega + \frac{\omega}{2} - \log\left(1+\frac{\omega}{2}\right) + \frac{\omega}{3} - \log\left(1+\frac{\omega}{3}\right),$$

altsaa $\log G(2+\omega) = -h\omega + \omega + \frac{\omega}{2} - \log\left(1+\frac{\omega}{2}\right) + \frac{\omega}{3} - \log\left(1+\frac{\omega}{3}\right)$ etc.,

men $\log G(1+\omega) = -h\omega + \omega - \log(1+\omega) + \frac{\omega}{2} - \log\left(1+\frac{\omega}{2}\right) + \frac{\omega}{3} - \log\left(1+\frac{\omega}{3}\right)$ etc.,

og deraf $\qquad \log G(2+\omega) - \log G(1+\omega) = \log(1+\omega)$,

saaledes bliver $\qquad (1+\omega)\,G(1+\omega) = G(2+\omega)$.

Heraf fremgaaer, at $\log G(1+\omega)$ for enhver Værdi af ω kan reduceres til en anden, hvor ω falder mellem 0 og 1. I dette Tilfælde vil Functionen $\log G(1+\omega)$ kunne udvikles i en convergerende Række efter de stigende Potentser af ω; man vil nemlig finde:

$$\log G(1+\omega) = -h\omega + \frac{\omega^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\ldots\right),$$
$$-\frac{\omega^3}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3}\ldots\right),$$
$$+\frac{\omega^4}{4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4}\ldots\right), \quad \text{etc.}$$

Ligesaa er $\quad \log G(1-\omega) = h\omega + \frac{\omega^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\ldots\right),$

$$+\frac{\omega^3}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\ldots\right),$$
$$+\frac{\omega^4}{4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4}\ldots\right), \quad \text{etc.}$$

Heraf fölger $\log G(1+\omega)+\log G(1-\omega)=\log G(1+\omega)\,G(1-\omega)$

$$=\frac{\omega^2}{2}\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^2}+\frac{\omega^4}{2}\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^4}+\frac{\omega^6}{3}\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^6}\cdots$$

Naar Exponenten er et lige Tal, kan Summen af Rækkerne $1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}$ etc., let bringes i en afsluttet Form; forövrigt convergere saadanne Rækker kun langsomt, og for at finde deres Sum maa man söge at bringe dem i en anden Form.

Nu er (see *Cauchy* Cours d'Analyse pag. 570)

$$\log\frac{z}{\sin z}=\frac{z^2}{\pi^2}\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^2}+\frac{z^4}{2\pi^4}\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^4}+\frac{z^6}{3\pi^6}\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^6}\text{ etc.}$$

Sættes her $\frac{z}{\pi}=\omega$ eller $z=\omega\pi$, har man

$$\log\frac{\omega\pi}{\sin\omega\pi}=\omega^2\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^2}+\frac{\omega^4}{2}\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^4}+\text{etc.}$$
$$=\log G(1+\omega)\,G(1-\omega),$$

eller
$$\frac{\omega\pi}{\sin\omega\pi}=G(1+\omega)\,G(1-\omega).$$

Heraf sees allerede, at, naar Værdien af $G(1+\omega)$ er bekjendt fra $\omega=0$, til $\omega=\frac{1}{2}$, den ogsaa er bekjendt for de övrige Værdier; thi $G(2-\omega)=(1-\omega)G(1-\omega)$, og saaledes
$$G(2-\omega)=\frac{(1-\omega)\omega\pi}{G(1+\omega)\sin\omega\pi}.$$

Saaledes som her Forbindelsen mellem Functionen G og Cirkelfunctionerne er udledet, nemlig af de convergerende Rækker efter Potentserne af ω, er denne Forbindelse blot beviist for $\omega^2<1$; men man vil let see, at den er almindelig gjældende. Man har nemlig

$$\log G(1+\omega)=-h\omega+\omega-\log(1+\omega)+\frac{\omega}{2}-\log\left(1+\frac{\omega}{2}\right)+\text{etc.},$$
$$\log G(1-\omega)=\quad h\omega-\omega-\log(1-\omega)-\frac{\omega}{2}-\log\left(1-\frac{\omega}{2}\right)+\text{etc.},$$

hvilke Rækker, som vi have seet, ere convergerende for enhver Værdi af ω, endog naar ω er negativ, naar man for Log af de negative Tal sætter Log af disses Talværdi; dog vil, naar ω er et heelt negativt Tal, en af Logarithmerne blive uendelig, og derved Functionens Continuitet afbrudt.

Ved Addition, og ved fra Log at gaae over til Tal, har man

$$G(1+\omega)G(1-\omega)=\frac{1}{(1-\omega^2)\left(1-\frac{\omega^2}{2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{9}\right)}.$$

Da nu A_{25} omtrent er $1{,}5.10^6$, og $A_{25} \times \frac{27}{2}$ omtrent $20{,}25.10^6$, bliver det dertil svarende Leds Talværdi omtrent $\frac{20{,}25.10^6}{10^{28}}$, altsaa paa det nærmeste $\frac{2}{10^{21}}$. Saaledes vil man under denne Forudsætning kunne bestemme S_3 med 20 Decimaler, og altsaa de övrige med en endnu större Nöiagtighed.

Med 16 Decimaler har man, da

$$\overset{10}{\underset{1}{S_x}} \frac{1}{x} = 2{,}9289682539682539,$$

og

$$\log \text{nep}\, 10 = 2{,}3025850929940457,$$

$$h = 0{,}5772156649015328,$$

og ligeledes:

$$\begin{aligned}
S_2 &= 1{,}6449340668482264,\\
S_3 &= 1{,}2020569031595942,\\
S_4 &= 1{,}0823232337111381,\\
S_5 &= 1{,}0369277551068632,\\
S_6 &= 1{,}0173430619844491,\\
S_7 &= 1{,}0083492773866018,\\
S_8 &= 1{,}0040773561979443,\\
S_9 &= 1{,}0020083928260822,\\
S_{10} &= 1{,}0009945751278880,\\
S_{11} &= 1{,}0004941886041094,\\
S_{12} &= 1{,}0002460865533080,\\
S_{13} &= 1{,}0001227233475857,\\
S_{14} &= 1{,}0000612481350587,\\
S_{15} &= 1{,}000030582363070,\\
S_{16} &= 1{,}0000152822594086.
\end{aligned}$$

Ved at multiplicere h, $S_2 - 1$, $S_3 - 1$ etc. med Modulen til de Briggiske Logarithmer 0,4342944819032518 og betegne Producterne med α_1, $\alpha_2 \ldots$ findes

$\alpha_1 = 0{,}2506816,$	$\alpha_7 = 0{,}0036260,$	$\alpha_{13} = 0{,}0000533,$
$\alpha_2 = 0{,}2800913,$	$\alpha_8 = 0{,}0017708,$	$\alpha_{14} = 0{,}0000266,$
$\alpha_3 = 0{,}0877522,$	$\alpha_9 = 0{,}0008733,$	$\alpha_{15} = 0{,}0000133,$
$\alpha_4 = 0{,}0357527,$	$\alpha_{10} = 0{,}0004319,$	$\alpha_{16} = 0{,}0000066,$
$\alpha_5 = 0{,}0160375,$	$\alpha_{11} = 0{,}0002146,$	$\alpha_{17} = 0{,}0000033,$
$\alpha_6 = 0{,}0075320,$	$\alpha_{12} = 0{,}0001069,$	$\alpha_{18} = 0{,}0000016.$

Heraf sees,

Heraf fölger $\log G(1+\omega) + \log G(1-\omega) = \log G(1+\omega)\,G(1-\omega)$

$$= \frac{\omega^2}{2}\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^2} + \frac{\omega^4}{2}\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^4} + \frac{\omega^6}{3}\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^6}\ldots$$

Naar Exponenten er et lige Tal, kan Summen af Rækkerne $1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m}$ etc., let bringes i en afsluttet Form; forövrigt convergere saadanne Rækker kun langsomt, og for at finde deres Sum maa man söge at bringe dem i en anden Form.

Nu er (see *Cauchy* Cours d'Analyse pag. 570)

$$\log\frac{z}{\sin z} = \frac{z^2}{\pi^2}\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^2} + \frac{z^4}{2\pi^4}\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^4} + \frac{z^6}{3\pi^6}\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^6}\ \text{etc.}$$

Sættes her $\frac{z}{\pi} = \omega$ eller $z = \omega\pi$, har man

$$\log\frac{\omega\pi}{\sin\omega\pi} = \omega^2\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^2} + \frac{\omega^4}{2}\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^4} + \text{etc.}$$
$$= \log G(1+\omega)\,G(1-\omega),$$

eller

$$\frac{\omega\pi}{\sin\omega\pi} = G(1+\omega)\,G(1-\omega).$$

Heraf sees allerede, at, naar Værdien af $G(1+\omega)$ er bekjendt fra $\omega = 0$, til $\omega = \frac{1}{2}$, den ogsaa er bekjendt for de övrige Værdier; thi $G(2-\omega) = (1-\omega)G(1-\omega)$, og saaledes

$$G(2-\omega) = \frac{(1-\omega)\omega\pi}{G(1+\omega)\sin\omega\pi}.$$

Saaledes som her Forbindelsen mellem Functionen G og Cirkelfunctionerne er udledet, nemlig af de convergerende Rækker efter Potentserne af ω, er denne Forbindelse blot beviist for $\omega^2 < 1$; men man vil let see, at den er almindelig gjældende. Man har nemlig

$$\log G(1+\omega) = -h\omega + \omega - \log(1+\omega) + \frac{\omega}{2} - \log\left(1+\frac{\omega}{2}\right) + \text{etc.},$$

$$\log G(1-\omega) = \quad h\omega - \omega - \log(1-\omega) - \frac{\omega}{2} - \log\left(1-\frac{\omega}{2}\right) + \text{etc.},$$

hvilke Rækker, som vi have seet, ere convergerende for enhver Værdi af ω, endog naar ω er negativ, naar man for Log af de negative Tal sætter Log af disses Talværdi; dog vil, naar ω er et heelt negativt Tal, en af Logarithmerne blive uendelig, og derved Functionens Continuitet afbrudt.

Ved Addition, og ved fra Log at gaae over til Tal, har man

$$G(1+\omega)G(1-\omega) = \frac{1}{(1-\omega^2)\left(1-\frac{\omega^2}{2}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{9}\right)}.$$

Men nu er, som bekjendt,

$$\frac{\sin\omega\pi}{\omega\pi}=(1-\omega^2)\left(1-\frac{\omega^2}{4}\right)\left(1-\frac{\omega^2}{9}\right)\ldots,$$

hvilket er gjeldende for enhver Værdi af ω, (*Cauchy* cours d'anal.), og altsaa er i samme Udstrækning $G(1+\omega)\,G(1-\omega)=\frac{\omega\pi}{\sin\omega\pi}$,

eller $$G\omega G(1-\omega)=\frac{\pi}{\sin\omega\pi}.$$

Sættes $-\omega$ for ω, faaes

$$G(-\omega)=\frac{-\pi}{G(1+\omega)\sin\omega\pi}=\frac{-\pi}{\omega G\omega\sin\omega\pi}.$$

$G(-\omega)$ bliver, som man seer, uendelig, naar ω er et heelt Tal, og negativ for ω mellem $2n$ og $2n+1$, positiv for ω mellem $(2n+1)$ og $(2n+2)$.

Sætte vi altsaa $$y=G\omega,$$
og betragte ω og y som Coordinater til en Curve, vil y være positiv fra $\omega=0$ til $\omega=\infty$, og i Intervallet fra $\omega=0$ til $\omega=1$ aftage fra ∞ til 1, er atter $=1$, naar $\omega=2$, og voxer derefter i det Uendelige. Naar ω er negativ, er y afvexlende negativt og positivt, negativt mellem Intervallerne 0 og -1, -2 og -3 etc., positiv mellem Intervallerne -1 og -2, -3 og -4 etc., og continuerende i Intervallerne selv, imedens Continuiteten afbrydes ved Skiftningen af Fortegn, idet y ved hvert Intervals Grændse bliver uendelig.

§ 2.

Forinden jeg fra disse Betragtninger gaaer over til det bestemte Integral, $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$, forudskikker jeg fölgende Theoremer:

Theorem. 1. Er fx en primitiv Function af den endelige Differents, φx,
$$(\text{ɔ: } f(x+\Delta x)-fx=\varphi x),$$
saa er $$f(x+(n+1)\Delta x)-fx=\sum_x^{[x+(n+1)\Delta x]}\varphi x,$$

eller vil angive det bestemte endelige Integral mellem Grændserne x og $x+n\Delta x$, forsaavidt φx eller fx ikke discontinuerer i dette Interval. Sættes nemlig for x efterhaanden x, $x+\Delta x$, $x+2\Delta x\ldots x+(n+1)\Delta x$, har man

$$\begin{aligned}
&f(x+\Delta x) &&-fx &&=\varphi x,\\
&f(x+2\Delta x) &&-f(x+\Delta x) &&=\varphi(x+\Delta x),\\
&f(x+3\Delta x) &&-f(x+2\Delta x) &&=\varphi(x+2\Delta x),\\
&\quad\vdots && \quad\vdots && \quad\vdots\\
&f(x+(n+1)\Delta x) &&-f(x+n\Delta x) &&=\varphi(x+n\Delta x),
\end{aligned}$$

altsaa er

$$\varphi x + \varphi(x + \Delta x) + \varphi(x + 2\Delta x) \ldots + \varphi(x + n\Delta x) = \sum_x^{[x+(n+1)\Delta x]} \varphi x = f(x + (n+1)\Delta x) - fx.$$

Theorem. 2. To Functioner, der begge udtrykke det endelige Integral $\Sigma \varphi x$ imellem givne Grændser, kunne blot ved en periodisk Function være forskjellige fra hinanden.

Disse Functioner være fx og Fx, saa er

$$f(x + (n+1)\Delta x) - fx = F(x + (n+1)\Delta x) - Fx = \sum_x^{x+(n+1)\Delta x} \varphi x.$$

Sættes $Fx - fx = \psi x$, har man

$$F(x + (n+1)\Delta x) - f(x + (n+1)\Delta x) = \psi x.$$

Antages nu $n = 0, 1, 2, 3$ etc, seer man at

$$Fx - fx = \psi x,$$
$$F(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) = \psi x,$$
$$F(x + 2\Delta x) - f(x + 2\Delta x) = \psi x,$$

eller $\psi x = \psi(x + \Delta x) = \psi(x + 2\Delta x) = \psi(x + 3\Delta x)$ etc.,

det er: Forskjellen mellem Fx og fx maa være en periodisk Function.

Ere Differentserne uendelige smaa, reduceres den periodiske Function til en simpel Constant.

§ 3.

$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$ bliver 1 naar $n = 1$, og man har ved Partialintegration

$$\int e^{-x} x^{n-1} dx = \frac{1}{n} e^{-x} x^n + \frac{1}{n} \int e^{-x} x^n dx,$$

og da, naar $n > 1$, $\lim \frac{x^n}{e^x} = 0$ for det voxende n, og bliver 0 for $x = 0$, vil for dette Tilfælde Störrelsen udenfor Integraltegnet forsvinde, naar Integralet tages mellem Grændserne 0 og ∞; altsaa

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-x} x^n dx$$

for $n > 0$.

Ligeledes sees let, at Functionen er continuerende; thi

$$\Gamma(n+h) - \Gamma n = \int_0^\infty e^{-x} dx (x^h - 1) x^{n-1},$$

og dette Integrals Elementer ere alle forsvindende for det forsvindende h.

Betegnes Integralet paa venstre Side af Lighedstegnet med Γn, har man under nævnte Indskrænkning $\quad n\Gamma n = \Gamma(n+1)$.

Ved at sætte $ax = z$, faaer man

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}dx = \frac{1}{a^n}\,\Gamma n,$$

og saaledes bliver det dobbelte Integral

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty x^{a-1}z^{b-1}e^{-z(1+x)}dz\right)dx = \Gamma b\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b},$$

men ved at foretage Integrationen i en anden Orden

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty x^{a-1}z^{b-1}e^{-z(1+x)}dx\right)dz = \Gamma a\int_0^\infty z^{b-a-1}e^{-z} = \Gamma a\Gamma(b-a),$$

altsaa
$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b} = \frac{\Gamma a\Gamma(b-a)}{\Gamma b}\ (b > a > 0).$$

Sættes $b = 1$, bliver

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \Gamma a\Gamma(1-a),\ (1 > a > 0).$$

Men som bekjendt er i dette Tilfælde

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Altsaa
$$\Gamma a\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Da
$$a\Gamma a = \Gamma(a+1),$$

er
$$\Delta \log \Gamma a = \log \Gamma(a+1) - \log \Gamma a = \log a.$$

Men i § 2 have vi viist, at den der behandlede Function, som vi have betegnet med G, har den fundamentale Egenskab, at

$$\Delta \log Ga = \log a.$$

Altsaa
$$\Delta \log Ga = \Delta \log \Gamma a.$$

og heraf fölger, (§ 2, Th. 2)

$$\psi a + \log Ga = \log \Gamma a,$$

eller naar for ψa, skrives $\log \psi a$

$$\psi a Ga = \Gamma a,$$

hvor ψa er en periodisk Function, saaledes at $\psi(a+1) = \psi a$, og continuerende, da Γa er continuerende.

Da for $a = 1$, baade Ga og Γa er $= 1$, bliver $\psi 1 = 1$, og $\psi 1 = \psi 2 = \psi 3$ etc, har man overhoved, naar a er et heelt Tal $= n$, $\psi n = 1$.

Man kan saaledes for ψa sætte $1 + \psi a$, hvor ψa bliver 0, naar a er et heelt Tal; altsaa
$$(1 + \psi a)Ga = \Gamma a.$$

Heraf fölger, at, naar n er et heelt positivt Tal, vi have

$$Gn = \Gamma n.$$

Vi skulle söge at bestemme Functionen ψa i Almindelighed.

Vi have seet, at

$$GaG(1-a) = \Gamma a \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

hvoraf, da $Ga = \frac{1}{a} G(1+a)$, $\Gamma a = \frac{1}{a}\Gamma(1+a)$, fölger

$$G(1+a)\,G(1-a) = \Gamma(1+a)\,\Gamma(1-a);$$

men $\quad (1+\psi(1+\alpha))(1+\psi(1-a))\,G(1+a)\,G(1-a) = \Gamma a \Gamma(1-a).$

Altsaa er $\quad (1+\psi(1+\alpha))(1+\psi(1-a)) = 1.$

Summen $(1+\psi(1+a))+(1+\psi(1-a))$, kunne vi sætte $2+\varphi a$, hvor φ ikke forandres, naar for a sættes $-a$; og danne vi Ligningen

$$x^2-(2+\varphi a)x+1=0,$$

vil dens Rödder udtrykke Functionerne $(1+\psi(1+\alpha))$ og $(1+\psi(1-a))$ ved φa; man har altsaa $\quad 1+\psi(1\pm a) = \frac{2+\varphi a \pm \sqrt{[4\varphi a+(\varphi a)^2]}}{2},$

eller $\quad \psi(1\pm a) = \frac{\varphi a \pm \sqrt{[4\varphi a + (\varphi a)^2]}}{2}.$

Da $\varphi a = \psi(1+a)+\psi(1-a)$, er ogsaa φa en periodisk Function; og da tillige $\varphi a = \varphi(-a)$, bliver $\varphi(1+a) = \varphi a$; $\varphi(-a) = \varphi(1-a)$; altsaa $\varphi(1-a) = \varphi a$. I Udtrykket for $\psi(1\pm a)$ vexler Rodtegnet, naar a skifter Tegn; men nu er $\psi(1+a) = \psi a$, hvor a kan være $< 1 = 1-\alpha$; man har altsaa

$$\psi(1+(1-\alpha)) = \psi(2-\alpha) = \psi(1-\alpha).$$

Nu er $\quad \psi(1+(1-\alpha)) = \frac{\varphi(1-\alpha) \pm \sqrt{[4\varphi(1-\alpha)+(\varphi(1-\alpha))^2]}}{2} = \frac{\varphi\alpha \pm \sqrt{[4\varphi\alpha+(\varphi\alpha)^2]}}{2}$

og $\quad \psi(1-\alpha) = \frac{\varphi\alpha \mp \sqrt{[4\varphi\alpha + (\varphi\alpha)^2]}}{2}.$

Altsaa have vi $\quad \pm\sqrt{(4\varphi\alpha+(\varphi\alpha)^2)} = \mp\sqrt{(4\varphi\alpha+(\varphi\alpha)^2)},$

og deraf $\varphi\alpha = 0$, eller $= -4$; men, da det sidste er umuligt, er $\varphi\alpha = 0$; altsaa $\psi(1-\alpha) = 0$; altsaa reduceres den periodiske Deel af Functionen til 1.

Saaledes er i Almindelighed

$$Ga = \Gamma a,$$

naar $a > 0$; er derimod a negativ, gjelder Ligningen $\Delta \log Ga = \Delta \log \Gamma a$ ikke, og altsaa heller ikke de deraf udledede Fölger. Er a derimod positiv, vil Rækken for $\log Ga$ tjene til at evaluere Γa.

Da $\Gamma(1+\omega)\,\Gamma(1-\omega) = \frac{\omega\pi}{\sin\omega\pi}$, fölger deraf, at, naar denne Functions Værdi er bekjendt fra $\omega=0$ til $\omega=\frac{1}{2}$, den er bekjendt i sin hele Udstrækning; thi $\quad \Gamma(2-\omega) = \frac{(1-\omega)\omega\pi}{\Gamma(1+\omega)\sin\omega\pi}.$

Da $\Gamma\omega\Gamma(1-\omega) = \frac{\pi}{\sin\omega\pi}$, sees, at $\Gamma\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$.

Forskjellen paa Signaturerne G og Γ er altsaa den, at den sidste, der udtrykker det destemte Integral $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$, bliver uendelig, naar n er negativ; men forövrigt falde de sammen, og kunne substitueres, den ene for den anden. Hvad man altsaa kan udlede af Functionen G's Egenskaber, tilkommer saaledes ogsaa Γ, inden de Grændser, for hvilke den har en bestemt Værdi; derimod ville de Sætninger, der udledes af det bestemte Integral, ikke uden Beviis antages gjældende for Functionen G i dens hele Udstrækning.

Fundamentalsætningen $\Gamma a\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$,

der udledes af det bestemte Integral $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x}$, kan blot være gjeldende, naar $1 > a > 0$; thi finder denne Betingelse ikke Sted, har Integralet en uendelig Værdi; derimod har man, som vi have viist, stedse

$$GaG(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Ved lette Substitutioner udledes fölgende bekjendte Integraler, som vi i det Fölgende ville have Brug for.

Ved for x at sætte z^t, har man

$$\int_0^\infty e^{-z^t}z^{nt-1}dz = \frac{1}{t}\,\Gamma(n),$$

eller $\int_0^\infty e^{-z^t}z^n dz = \frac{1}{t}\,\Gamma\,\frac{n+1}{t}$; naar for $nt-1$ sættes n. 1.

Sættes $e^{-x} = z$, bliver

$$\int_0^1 dz\left(\log\frac{1}{z}\right)^{n-1} = \Gamma n,$$

og naar her for z substitueres z^m

$$\int_0^1 z^{m-1}dz\left(\log\frac{1}{z}\right)^{n-1} = \frac{1}{m^n}\,\Gamma n. \qquad 2.$$

Naar i Ligningen $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b} = \frac{\Gamma a\Gamma(b-a)}{\Gamma b}$

for x sættes $\frac{y}{1-y}$, faaer man

$$\int_0^1 y^{a-1}dy(1-y)^{b-a-1} = \frac{\Gamma a\Gamma(b-a)}{\Gamma b}, \qquad 3.$$

hvilket for $b-a-1 = -n$, giver

$$\int_0^1 \frac{y^{n-1}dy}{(1-y)^n} = \frac{\Gamma a\Gamma(1-n)}{\Gamma(a+1-n)},$$

og sættes for y Störrelsen y^m, er

$$\int_0^1 \frac{y^{\beta-1}dy}{(1-y^m)^n} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\Gamma\frac{\beta}{m}\,\Gamma(1-n)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{m}+1-n\right)}. \qquad 4.$$

Ved her at sætte for n Störrelsen $\frac{m-q}{m}$, har man

$$\int_0^1 \frac{y^{\beta-1}dy}{(1-y^m)^{\frac{m-q}{m}}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\Gamma\frac{\beta}{m}\,\Gamma\frac{q}{m}}{\Gamma\frac{\beta+q}{m}},$$

som man pleier at kalde det förste Eulerske Integral og betegner med $\left(\frac{\beta}{m}\right)$; dette kan altsaa evalueres ved Hjelp af Ga.

§ 4.

Rækken

$$\log G(1+\omega) = -h\omega + \omega - \log(1+\omega) + \frac{\omega}{2} - \log\left(1+\frac{\omega}{2}\right) + \text{etc.}$$

kan ogsaa skrives paa fölgende Maade

$$\omega \log 2 - \log(1+\omega) + \omega \log \tfrac{3}{2} - \log\left(1+\frac{\omega}{2}\right)\ldots,$$

eller

$$\log 2^\omega - \log(1+\omega) + \log(\tfrac{3}{2})^\omega - \log\left(1+\frac{\omega}{2}\right)\ldots,$$

som kan skrives

$$= \sum_1^\infty{}_n \log \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\omega}{\left(1+\frac{\omega}{n}\right)} = \log \prod_1^\infty{}_n \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\omega}{\left(1+\frac{\omega}{n}\right)},$$

$\left(\text{naar man ved } \prod_p^q{}_n \varphi(a+n) \text{ forstaaer } \varphi(a+p)\,\varphi(a+p+1)\ldots\varphi(a+q)\right)$,

og altsaa har man

$$G(1+\omega) = \prod_1^\infty{}_n \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\omega}{\left(1+\frac{\omega}{n}\right)}, \qquad 1.$$

som gjeldende for enhver reel Værdi af ω,

eller

$$G\omega = \prod_1^\infty{}_n \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\omega-1}}{\left(1+\frac{\omega-1}{n}\right)}.$$

Af dette Udtryk kan udledes de bekjendte Egenskaber for Functionen $G\omega$. Saaledes findes Fundamentalegenskaben

$$G(1+\omega) = \omega G\omega \qquad \text{saaledes:}$$

Man har

$$G(1+\omega)=\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi_n}}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\omega}}{\left(1+\frac{\omega}{n}\right)}=\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi_n}}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\omega-1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\omega-1}}{\left(1+\frac{\omega}{n}\right)\left(1+\frac{\omega-1}{n}\right)}=\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi_n}}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\omega-1}{n}\right)}{1+\frac{\omega}{n}}G\omega.$$

Men
$$\overset{r}{\underset{1}{\Pi_n}}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\omega-1}{n}\right)}{\left(1+\frac{\omega}{n}\right)}=\frac{(1+r)\omega}{\omega+r},$$

der for $n=\infty$ convergerer til ω; altsaa

$$G(1+\omega)=\omega G\omega$$

$$G\mu\alpha=\overset{\infty}{\Pi_n}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu\omega-1}}{\left(1+\frac{\mu\omega-1}{n}\right)}.$$

Deles n i Grupperne

$$\mu x+1,\ \mu x+2,\ \mu x+3\ldots\ \mu x+\mu,$$

kan $G\mu\alpha$ bringes under Formen

$$G\mu\alpha=\overset{\infty}{\underset{0}{\Pi_x}}\frac{\left(1+\frac{1}{\mu x+1}\right)^{\mu\alpha-1}\left(1+\frac{1}{\mu x+2}\right)^{\mu\alpha-1}\ldots\left(1+\frac{1}{\mu x+\eta}\right)^{\mu\alpha-1}\ldots\left(1+\frac{1}{\mu x+\mu}\right)^{\mu\alpha-1}}{\left(1+\frac{\mu\alpha-1}{\mu x+1}\right)\left(1+\frac{\mu\alpha-1}{\mu x+2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{\mu\alpha-1}{\mu x+\eta}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{\mu\alpha-1}{\mu x+\mu}\right)};$$

men $\left(1+\frac{\mu\alpha-1}{\mu x+\eta}\right)=\frac{1}{\mu x+\eta}(\mu x+\mu\alpha+\eta-1)=\frac{\mu}{\mu x+\eta}\left(x+\alpha+\frac{\eta-1}{\mu}\right)=$

$$\frac{\mu(x+1)}{\mu x+\eta}\left\{1+\frac{\alpha+\frac{\eta-1}{\mu}-1}{x+1}\right\}=\left\{1+\frac{\frac{\eta}{\mu}-1}{x+1}\right\}^{-1}\left\{1+\frac{\alpha+\frac{\eta-1}{\mu}-1}{x+1}\right\},$$

som ved Multiplication med $\dfrac{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{\alpha-\frac{1}{\mu}}\cdot\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{\eta}{\mu}-1}}{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{\alpha+\frac{\eta}{\mu}-1}}=1$

bliver lig
$$\frac{\left\{1+\frac{\alpha+\frac{\eta-1}{\mu}-1}{x+x}\right\}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{\eta}{\mu}}\cdot\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{\alpha-\frac{1}{\mu}}}{\left\{1+\frac{\frac{\eta}{\mu}-1}{x+1}\right\}\cdot\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{\eta}{\mu}-1+\alpha}}.$$

Indsættes denne Værdi i Nævneren for $\left(1+\frac{\mu\alpha-1}{\mu x+1}\right)$, kan man skrive

$$G\mu\alpha = \prod_{x \atop 0}^{\infty}\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{\mu x+1}\right)\left(1+\frac{1}{\mu x+2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{\mu x+\mu}\right)}{1+\frac{1}{x+1}}\right\}^{\mu\alpha-1}$$

$$\times \prod_{\lambda \atop 1}^{\mu}\prod_{x \atop 0}^{\infty}\frac{\left\{1+\frac{\frac{\lambda}{\mu}-1}{x+1}\right\}}{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{\lambda}{\mu}-1}} \prod_{\lambda \atop 1}^{\mu}\prod_{x \atop 0}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{\alpha+\frac{\lambda-1}{\mu}-1}}{\left\{1+\frac{\alpha+\frac{\lambda-1}{\mu}-1}{x+1}\right\}}$$

$$= \prod_{x \atop 0}^{\infty}\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{\mu x+1}\right)\left(1+\frac{1}{\mu x+2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{\mu x+\mu}\right)}{1+\frac{1}{x+1}}\right\}^{\mu\alpha-1} \prod_{\lambda \atop 1}^{\mu}\frac{G\left(\alpha+\frac{\lambda-1}{\mu}\right)}{G\frac{\lambda}{\mu}}.$$

Men $\prod_{x \atop 0}^{r}\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{\mu x+1}\right)\left(1+\frac{1}{\mu x+2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{\mu x+\mu}\right)}{1+\frac{1}{x+1}}\right\}^{\mu\alpha-1} = \left(\frac{\mu r+\mu+1}{r+1}\right)^{\mu\alpha-1},$

som for $r = \infty$ convergerer til $\mu^{\mu\alpha-1}$.

For at finde $\prod_{\lambda \atop 1}^{\mu} G\frac{\lambda}{\mu} = G\frac{1}{\mu}\; G\frac{2}{\mu}\ldots G\frac{\mu-1}{\mu}\, Gn$ multipliceres Störrelsen med sig selv, idet Factorerne tages i omvendt Orden, hvorved, da $G\frac{1}{\mu}\; G\frac{\mu-1}{\mu} = \frac{\pi}{\sin\frac{\lambda}{\mu}}$, man erholder

$$\left\{\prod_{\lambda \atop 1}^{\mu} G\frac{\lambda}{\mu}\right\}^2 = \frac{\pi^{\mu-1}}{\prod_{\lambda \atop 1}^{\mu-1}\sin\frac{\lambda}{\mu}}.$$

Men, som bekjendt, er $\prod_{\lambda \atop 1}^{\mu-1}\sin\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\mu}{2^{\mu-1}}$,

hvorved man faaer

$$G\mu\alpha = \mu^{\mu\alpha-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-\mu}{2}}\prod_{\lambda \atop 1}^{\mu} G\left(\alpha+\frac{\lambda-1}{\mu}\right), \qquad 2.$$

der efter denne Udvikling er gjeldende for enhver Værdi af α.

Efterat jeg paa denne Maade var kommen til dette Theorem, ledet dertil ved den af *Abel* brugte Fremgangsmaade (oeuvr. compl. T. II pag. 28) ved Beviset for en analog Egenskab ved Integralet $\Sigma\frac{1}{x}$, har jeg hos Professor *Ramus*, i hans Lærebog om Integral- og Differentialregningen, seet, at Theoremet först er fremsat af *Gaus.* Det Beviis, der i dette Skrift gives efter *Lejeune Dirichlet,* udledes af Integralet

$$\int_0^1 \left(e^{1-\frac{1}{x}} - x^a\right)\frac{dx}{x(1-x)} = \frac{d\log\Gamma a}{da}.$$

Herved er ogsaa Sætningens Gyldighed beviist for de positive Værdier af α i Functionen $G\alpha$. For at godtgjöre, at den ogsaa gjelder for de negative Værdier af α i denne Function, maa man gaae ud fra

$$G(-\mu\alpha) = \frac{-\pi}{\mu\alpha G\mu\alpha \,.\, \sin\mu\alpha\pi}.$$

Nu er, som viist,

$$G\mu\alpha = \mu^{\mu\alpha-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-\mu}{2}} G\alpha G\left(\alpha+\frac{1}{\mu}\right)\ldots G\left(\alpha+\frac{\mu-1}{\mu}\right)$$

og $$\sin\mu\alpha\pi = 2^{\mu-1}\sin\alpha\pi\sin\left(\alpha+\frac{1}{\mu}\right)\pi\ldots\sin\left(\alpha+\frac{\mu-1}{\mu}\right)\pi;$$

men $$\sin\left(\alpha+\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi = -\sin\left(\alpha-1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi = -\sin\left(\alpha-\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)\pi,$$

og saaledes

$$\sin\mu\alpha\pi = (-1)^{\mu-1}2^{\mu-1}\sin\alpha\pi\sin\left(\alpha-\frac{1}{\mu}\right)\pi\sin\left(\alpha-\frac{2}{\mu}\right)\pi\ldots\sin\left(\alpha-\frac{\mu-1}{\mu}\right)\pi.$$

Videre er $$G\alpha G\left(\alpha+\frac{1}{\mu}\right)\ldots G\left(\alpha+\frac{\mu-1}{\mu}\right) =$$

$$= \left(\alpha-1+\frac{1}{\mu}\right)\left(\alpha-1+\frac{2}{\mu}\right)\ldots\left(\alpha-1+\frac{\mu-1}{\mu}\right).G\alpha G\left(\alpha-1+\frac{1}{\mu}\right)G\left(\alpha-1+\frac{2}{\mu}\right)\ldots G\left(\alpha-1+\frac{\mu-1}{\mu}\right)$$

$$= \left(\alpha-\frac{1}{\mu}\right)\left(\alpha-\frac{2}{\mu}\right)\ldots\left(\alpha-\frac{\mu-1}{\mu}\right).\,G\alpha G\left(\alpha-\frac{1}{\mu}\right)G\left(\alpha-\frac{2}{\mu}\right)\ldots G\left(\alpha-\frac{\mu-1}{\mu}\right).$$

Indsættes disse Værdier, faaer man

$$G(-\mu\alpha) =$$

$$\left\{\frac{(-1)^{\mu}\mu^{-(\mu\alpha+1)}(2\pi)^{\frac{1-\mu}{2}}\pi^{\mu}}{\alpha G\alpha.\sin\alpha\pi\left(\alpha-\frac{1}{\mu}\right)\sin\left(\alpha-\frac{1}{\mu}\right)\pi G\left(\alpha-\frac{1}{\mu}\right).\left(\alpha-\frac{2}{\mu}\right)\sin\left(\alpha-\frac{2}{\mu}\right)\pi G\left(\alpha-\frac{2}{\mu}\right)\ldots\left(\alpha-\frac{\mu-1}{\mu}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\mu-1}{\mu}\right)\pi G\left(\alpha-\frac{\mu-1}{\mu}\right)}\right\}$$

$$= \mu^{-(\mu\alpha+1)}(2\pi)^{\frac{1-\mu}{2}}\prod_{1}^{\mu}{}_{\lambda}\, G\left(-\alpha+\frac{\lambda-1}{\mu}\right),$$

som fremkommer af Theoremet ved at sætte $-\alpha$ for α.

Af $G\alpha = \prod_0^\infty{}_n \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha-1}}{\left(1+\frac{\alpha-1}{n+1}\right)}$ og $G\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$, kan *Wallis's* Udtryk for π udledes; thi

$$\sqrt{\pi} = \overset{\infty}{\underset{0}{\Pi_n}} \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)} = \overset{\infty}{\underset{0}{\Pi_n}} \frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

eller

$$\pi = \overset{\infty}{\underset{0}{\Pi_n}} \frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}.$$

Skrives $\overset{r}{\underset{0}{\Pi_n}} \frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)}{\left(\frac{2n+2}{n+1}\right)} = \overset{r}{\underset{0}{\Pi_n}}(2n+2)(2n+2)\overset{r}{\underset{0}{\Pi_n}} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+1)(n+2)}$,

saa er, ved at sætte Factoren for $n=0$ udenfor Tegnet Π, og siden $n+1$ for n,

$$\overset{r}{\underset{0}{\Pi_n}}(2n+2)(2n+2) = 4\overset{r-1}{\underset{0}{\Pi_n}}(2n+4)(2n+4),$$

altsaa $\overset{r}{\underset{0}{\Pi_n}} \frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)} = 4\overset{r-1}{\underset{0}{\Pi_n}}(2n+4)(2n+4)\overset{r}{\underset{0}{\Pi_n}} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+1)(n+2)}$

$$= 4\left\{\overset{r-1}{\underset{0}{\Pi_n}} \frac{(2n+4)(2n+4)(n+1)}{(2n+1)(2n+1)(n+2)}\right\} \frac{r+1}{(2r+1)(2r+1)(r+2)}$$

$$= 4\overset{r-1}{\underset{0}{\Pi_n}}\left(\frac{(2n+2)(2n+4)}{(2n+1)(2n+1)}\right) \frac{r+1}{(2r+1)(2r+1)(r+2)}.$$

Men ved at sætte Fatoren for $n=0$ udenfor Tegnet Π og derpaa $n+1$ for n

$$\left\{\overset{r-1}{\underset{0}{\Pi}}(2n+1)(2n+1)\right\} \frac{(2r+1)(2r+1)(r+1)}{r+1} = \left\{\overset{r\cdot 1}{\underset{0}{\Pi}}(2n+3)(2n+3)\right\} \frac{r+2}{r+1}.$$

Indsættes og gjöres $r=\infty$, i hvilket Tilfælde $\frac{r+1}{r+2}$ convergerer til 1, har man

$$\pi = 4\overset{\infty}{\underset{0}{\Pi_n}} \frac{(2n+2)(2n+4)}{(2n+3)(2n+3)} = 4\,\frac{2.4.4.6.6.8}{3.3.5.5.7.7}\ldots,$$

som er *Wallis's* Udtryk for π.

Man har $$\frac{G(-ma)}{G(-a)} = \frac{\sin a\pi \,.\, Ga}{m \sin ma\pi \,.\, Gma},$$

hvilket i Forbindelse med Udtrykket for Gma giver

$$\overset{m}{\underset{1}{\Pi_\lambda}} G\left(\frac{\lambda}{m} - a\right) = \frac{m^{ma-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \sin a\pi Ga}{\sin ma\pi \; Gma}.$$

Er $a = \frac{1}{m+1}$, bliver, da $G\frac{1}{(m+1)}\, G\frac{m}{m+1} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{m+1}}$,

$$\overset{m}{\underset{1}{\Pi_\lambda}} G\left(\frac{\lambda}{m}-\frac{1}{m+1}\right)=m^{\frac{m}{m+1}-\frac{1}{2}}\, 2^{\frac{m-1}{2}}\, \pi^{\frac{m-3}{2}} \sin\frac{\pi}{m+1}\left(G\frac{1}{m+1}\right)^2.$$

For $m=2$, giver den förste af disse Ligninger

$$G(\tfrac{1}{2}-a)=\frac{2^{2a-1}\pi^{-\frac{1}{2}}Ga}{\cos a\pi\; G(2a)},$$

og den anden $\qquad G\tfrac{1}{6}=2^{-\frac{1}{3}}\,\pi^{-\frac{1}{2}}(G\tfrac{1}{3})^2,$

saa at $G\frac{1}{3}$ kan udtrykkes ved $G\frac{1}{6}$ eller $G\frac{2}{3}$ ved $G\frac{5}{6}$.

Sættes videre i Udtrykket

$$\overset{m}{\underset{1}{\Pi_\lambda}} G\left(a+\frac{\lambda}{m}\right)=m^{-ma+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\,Gma$$

$(1-a)$ for a, erholder man

$$G(1-a)\overset{m}{\underset{1}{\Pi_\lambda}} G\left(1-a+\frac{\lambda}{m}\right)=m^{-m+am+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\,Gm(1-a);$$

og da $G(1-a)=\dfrac{\pi}{\sin a\pi\; Ga}$, bliver

$$\overset{m}{\underset{1}{\Pi_\lambda}} G\left(1-a+\frac{\lambda}{m}\right)=m^{-m+am+\frac{1}{2}}\, 2^{\frac{m-1}{2}}\, \pi^{\frac{m-3}{2}} \sin a\pi\; Ga\; Gm(1-a).$$

Sættes $m=2$, gaaer dette Udtryk over til

$$G(\tfrac{3}{2}-a)=2^{-1+2a}\pi^{-\frac{1}{2}}\sin a\pi\; Ga\; G2(1-a),$$

$$\text{ɔ:}\qquad Ga=\frac{2^{1-2a}\,\pi^{\frac{1}{2}}\,G(\frac{3}{2}-a)}{\sin a\pi\; G2(1-a)}.$$

Ved denne Formel kan, naar Ga er bekjendt fra $\frac{3}{4}$ til 1, ogsaa dens Værdi mellem $\frac{1}{2}$ og $\frac{3}{4}$ beregnes; thi sæt at a ligger mellem $\frac{1}{2}$ og $\frac{3}{4}$, vil $\frac{3}{2}-a$ ligge mellem 1 og $\frac{3}{4}$, og saaledes være bekjendt; altsaa er i dette Tilfælde Ga bekjendt, hvis ogsaa $(2-2a)$ ligger mellem 1 og $\frac{3}{4}$; dertil udfordres, at a ligger mellem $\frac{1}{2}$ og $\frac{5}{8}$, og er altsaa bekjendt i dette Interval; altsaa ogsaa, naar $2-2a$ ligger mellem $\frac{1}{2}$ og $\frac{5}{8}$ eller a mellem $\frac{5}{8}$ og $\frac{21}{32}$, altsaa og naar a ligger mellem $\frac{11}{16}$ og $\frac{43}{64}$ etc.; altsaa successiv for a mellem to paa hinanden fölgende Led i de to Rækker

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{21}{32}\cdot\tfrac{85}{128}\cdots$$
$$\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{11}{16}\cdot\tfrac{43}{64}\cdot\tfrac{171}{256}\cdots$$

Betegnes een af disse Bröker med $\frac{t}{n}$, saa er Tælleren af den dertil svarende i den anden Række $2n-t$ $\left(\text{thi } 2-2a \gtrless \frac{t}{n}\right)$; heraf fremgaaer, at for Nævneren 2^i er Tælleren $2^i-2^{i-1}\ldots+(-1)^i=\dfrac{2^{i+1}-(-1)^{i+1}}{3}$, og Bröken bliver

$\frac{2^{i+1}-(-1)^{i+1}}{3.2^i}$, som hörer til den överste Række, naar i er ulige, og til den nederste, naar i er lige; altsaa convergerer Brökene i begge Rækker til $\frac{2}{3}$, og vi have viist, at $G\frac{2}{3}$ kan findes, naar $G\frac{5}{6}$ er bekjendt. Saaledes behöver man blot at calculere Værdierne fra $G1$ til $G\frac{3}{4}$, og dette skeer hensigtsmæssigst ved Formlen

$$\begin{aligned}\log G(1+\omega) = -h\omega &+ \frac{\omega^2}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\ldots\right),\\ &-\frac{\omega^3}{3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\ldots\right),\\ &+\frac{\omega^4}{4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}\ldots\right),\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

eller, da $\frac{\omega^2}{2}-\frac{\omega^3}{3}+\frac{\omega^4}{4}\ldots=\omega-\log(1+\omega)$, kan man skrive

$$\begin{aligned}\log G(1+\omega) = (1-h) - \log(1+\omega) &+ \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\ldots\right),\\ &-\frac{\omega^3}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\ldots\right),\\ &+\frac{\omega^4}{4}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}\ldots\right).\end{aligned}$$

Coefficienterne $\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}_n\frac{1}{n^m}$ kunne, som bekjendt, gives i endelige Udtryk ved π, dersom m er et lige Tal; naar m derimod er ulige, er det, saavidt jeg veed, ikke muligt, og den ligefremme Addition vil paa Grund af Rækkens langsomme Convergents blive altfor besværlig, naar ikke m er et meget stort Tal. Man maa saaledes tage sin Tilflugt til det bekjendte Udtryk for Integralet $\Sigma\varphi x$. Da imidlertid dette for $\varphi x = x^{-m}$ danner en Række, vel med afvexlende Tegn og hvis förste Led ere aftagende, men som siden bliver divergerende, bör det bevises, at denne Række desuagtet kan benyttes, eller at Rækkens Rest fra et bestemt Led er i Talværdi mindre end det fölgende Led. Denne Rest vil kunne bestemmes ved den af *Abel* givne Summation af Rækken ved et bestemt Integral, og saaledes ogsaa Grændsen for Approximationens Nöiagtighed.

§ 5.

Integralet $\Sigma\varphi x$ kan, som let vil sees, udtrykkes ved fölgende Række (idet $\Sigma\varphi(x+1)-\Sigma\varphi x=\varphi x$)

$$\Sigma\varphi x = C+\int\varphi x dx-\tfrac{1}{2}\varphi x+\frac{A_1}{2}\varphi' x+\frac{A_2}{1.2.3}\varphi'' x+\frac{A_3}{1.2.3.4}\varphi''' x+\text{etc.},$$

og naar ved $S\varphi x$ forstaaes $\Sigma\varphi x + \varphi x$, bliver

$$S\varphi x = C + \int\varphi x dx + \tfrac{1}{2}\varphi x + \frac{A_1}{2}\varphi' x + \frac{A_2}{1.2.3}\varphi'' x + \frac{A_3}{1.2.3.4}\varphi''' x + \text{etc.},$$

hvor C egentlig er en periodisk Function; men den periodiske Deel bortfalder og C gaaer over til en simpel Constant, naar Functionen bestemmes fra x et heelt Tal til hvilketsomhelst andet heelt Tal. Sættes, for at bestemme Coefficienterne, $\varphi x = e^{-ax}$, hvorved man har $\int\varphi x dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$, $\varphi^{(n)}x = (-a)^n e^{-ax}$, har man, fra $x = 1$

$$e^{-a} + e^{-2a} \ldots + e^{-ax} = C + e^{-ax}\left(-\frac{1}{a} + \tfrac{1}{2} - \frac{A_1 a}{1.2} + \frac{A_2 a^2}{1.2.3} - \text{etc.}\right).$$

Men Summen af venstre Side er $\frac{e^{-a} - e^{-(a+1)x}}{1 - e^{-a}}$, som for $x = \infty$ bliver $\frac{e^{-a}}{1 - e^{-a}}$, medens höire Side i dette Tilfælde reduceres til C; hvoraf $C = \frac{e^{-a}}{1 - e^{-a}}$. Ved at indsætte disse Værdier, erholdes

$$\frac{e^{-ax-a}}{1 - e^{-a}} = e^{-ax}\left(-\frac{1}{a} + \tfrac{1}{2} - \frac{A_1 a}{1.2} + \frac{A_2 a^2}{1.2.3} - \text{etc.}\right).$$

Multipliceres med ae^{ax} og overflyttes, har man

$$1 - \left(\frac{a}{2} + a\,\frac{e^{-a}}{1 - e^{-a}}\right) = 1 - \frac{a}{2}\cdot\frac{1 + e^{-a}}{1 - e^{-a}} = -\frac{A_1 a^2}{1.2} + \frac{A_2 a^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Sættes $c\sqrt{-1}$ for a, bliver endelig

$$1 - \frac{c}{2}\cot\frac{c}{2} = \frac{A_1 c^2}{1.2} - \frac{A_3 c^4}{1.2.3.4} + \frac{A_5 c^6}{1.2.3.4.5.6} \ldots + P\sqrt{-1}.$$

Da venstre Side er reel, bliver $P = 0$, og saaledes $A_2 = 0$, $A_4 = 0$, $A_6 = 0$, og A_1, A_3, A_5 etc. beroer paa Udviklingen af $1 - \frac{c}{2}\cot\frac{c}{2}$, idet hverandeņ tages med modsat Tegn af det, denne Udvikling giver.

Man har

$$\sin\varphi = \varphi\left(1 - \frac{\varphi^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\varphi^2}{2^2.\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\varphi^2}{3^2.\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\varphi^2}{4^2.\pi^2}\right)\ldots$$

Ved at differentiere Logarithmen erholdes

$$\cot\varphi = \frac{1}{\varphi} - \frac{2\varphi}{\pi^2\left(1 - \frac{\varphi^2}{\pi^2}\right)} - \frac{2\varphi}{2^2\pi^2\left(1 - \frac{\varphi^2}{2^2\pi^2}\right)} - \text{etc.}$$

Altsaa

$$1 - \frac{c}{2}\cot\frac{c}{2} = \frac{c^2}{2\pi^2}\left\{\frac{1}{1 - \frac{c^2}{(2\pi)^2}} + \frac{1}{2^2\left(1 - \frac{c^2}{2^2(2\pi)^2}\right)} + \frac{1}{3^2\left(1 - \frac{c^2}{3^2(2\pi)^2}\right)}\ldots\right\},$$

som, udviklet efter Potentserne af c, giver

$$1-\frac{c}{2}\cot\frac{c}{2}=\frac{c^2}{2\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\ldots\right),$$
$$+\frac{c^4}{2^3.\pi^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}\ldots\right),$$
$$+\frac{c^6}{2^5.\pi^6}\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}\ldots\right),$$

og saaledes har man

$$\frac{A_1}{1.2}=\frac{1}{2\pi^2}\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^2},\quad \frac{A_3}{1.2.3}=-\frac{1}{2^3.\pi^4}\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^4}\ \text{etc.},$$

eller i Almindelighed

$$\frac{A_{2n-1}}{G(2n+1)}=(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\sum_1^\infty{}_x\left(\frac{1}{x^{2n}}\right),$$

et almindeligt Udtryk for de saakaldte *Bernouilliske* Tal, og hvis Værdi bestemmes ved den bekjendte Sum af $\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^{2n}}$.

Man har saaledes

$$A_1=\tfrac{1}{6},\ A_3=-\tfrac{1}{30},\ A_5=\tfrac{1}{42},\ A_7=-\tfrac{1}{30},\ A_9=\tfrac{5}{66},\ A_{11}=-\tfrac{691}{2730},$$
$$A_{13}=\tfrac{7}{6},\ A_{15}=-\tfrac{3617}{510},\ A_{17}=\tfrac{43867}{798},\ A_{19}=-\tfrac{1222277}{2310},\ A_{21}=\tfrac{854513}{138},$$
$$A_{23}=-\frac{1181820455}{13650},\quad A_{25}=\frac{76977927}{54}\ \text{etc.}^{*)}$$

At $\frac{A_{2n-1}}{G(2n+1)}$ er en Störrelse, som stærkt aftager, jo större n bliver, er klart af Udtrykkets Form; men de *Bernouilliske* Tal selv voxe i det Uendelige; thi

$$\text{Lim}\ \frac{A_{2n+1}}{A_{2n-1}}=\text{Lim}\frac{G(2n+3)2^{-1-2n}\pi^{-2n-2}}{G(2n+1)2^{1-2n}\ \pi^{-2n}}\cdot\frac{\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^{2n+2}}}{\sum_1^\infty{}_x\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2.\pi^2}=\infty.$$

De *Bernouilliske* Tal har *Abel* udtrykt ved et bestemt Integral. Man har nemlig

$$\int_0^\infty e^{-kt}t^{n-1}dt=\frac{1}{k^{2n}}\ G2n,$$

altsaa naar k sættes 1, 2, 3,

$$\frac{A_{2n-1}}{G(2n+1)}=(-1)^{n-1}\frac{1}{G2n.2^{2n-1}.\pi^{2n}}\int_0^\infty t^{2n-1}dt(e^{-t}+e^{-2t}+e^{-3}\ldots\ \text{etc.})$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{G2n.2^{n-1}.\pi^{2n}}\int_0^\infty\frac{t^{2n-1}dt.e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

---

*) *La Place* har givet et andet Udtryk for Bestemmelsen af de *Bernouilliske* Tal.

Sættes for t Störrelsen πt, er

$$A_{2n-1} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{2n}{2^{2n-1}}\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}dte^{-\pi t}}{1-e^{-\pi t}}.$$

Altsaa er

$$S\varphi x = C + \int\varphi x dx + \frac{\varphi x}{2} + \int_0^\infty \frac{dt}{e^{\pi t}-1}\left[\frac{t}{2}\varphi' x - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{t}{2}\right)^3\varphi''' x + \text{etc.}\right].$$

Men Störrelsen inden Klammerne er lig $\dfrac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)-\varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}}$,
og saaledes er

$$S\varphi x = C + \int\varphi x dx + \frac{\varphi x}{2} + \int_0^\infty \frac{dt\left[\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)-\varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)\right]}{2\sqrt{-1}\,(e^{\pi t}-1)}.$$

Dette Udtryk tjener og til at bestemme Rækkens Rest. Sættes nemlig for Kortheds Skyld $\dfrac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)-\varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}} = \psi t$, saa er efter *Taylors* Formel, idet den n^{te} Differential betegnes med $\psi^{(n)}$, og eftersom de lige Differentialer forsvinde naar $t = 0$,

$$\psi t = t\psi 0 + \frac{t^3}{1.2.3}\psi''' 0 \ldots + \frac{t^{2n-1}}{G2n}\psi^{(2n-1)}0 + \frac{1}{G(2n+1)}\int_0^t z^{2n}dz\psi^{(2n+1)}(t-z).$$

Men $\psi^{(2n+1)}t = (-1)^{n+1}(\tfrac{1}{2})^{2n+1}\cdot\dfrac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left\{\dfrac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)+\varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2}\right\}$,
og saaledes har man

$$S\varphi x = C + \int\varphi x dx + \frac{\varphi x}{2} + \frac{A_1\varphi' x}{2} + \frac{A_3\varphi''' x}{1.3.3.4}\ldots$$
$$+ \frac{A_{2n-1}\varphi^{(2n-1)}x}{G(2n+1)}$$
$$+ (-1)^{n+1}(\tfrac{1}{2})^{2n+1}\frac{1}{G(2n+1)}\int_0^\infty\frac{dt}{e^{\pi t}-1}\int_0^t\frac{z^{2n}dzd^{2n+1}\left[\varphi\left(x+\frac{t-z}{2}\sqrt{-1}\right)+\varphi\left(x-\frac{t-z}{2}\sqrt{-1}\right)\right]}{2dx^{2n+1}}.$$

For at Rækken for $S\varphi x$ skal være convergerende udfordres, at denne Rest for det voxende n bliver forsvindende, og man finder de Grændser, mellem hvilke den ligger, saaledes

$$\int_0^t z^{2n}dz.\frac{d^{(2n+1)}\left[\varphi\left(x+\frac{t-z}{2}\sqrt{-1}\right)+\varphi\left(x-\frac{t-z}{2}\sqrt{-1}\right)\right]}{2dx^{2n+1}}$$

$$=\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{d^{2n+1}\left[\varphi\left(x+\frac{\vartheta t}{2}\sqrt{-1}\right)+\varphi\left(x-\frac{\vartheta t}{2}\sqrt{-1}\right)\right]}{2dx^{2n+1}},$$

hvor ϑ er et Tal beliggende mellem 0 og 1. Altsaa er Resten

$$(-1)^{n+1}\frac{(2n+2)}{G(2n+3)}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\infty}\frac{t^{2n+1}dt}{e^{\pi t}-1}\cdot\frac{d^{2n+1}\left[\varphi\left(x+\frac{\vartheta t}{2}\sqrt{-1}\right)+\varphi\left(x-\frac{\vartheta t}{2}\sqrt{-1}\right)\right]}{2dx^{2n+1}}.$$

Ved at tage Integralet af $\int_0^{\infty}\frac{t^{2n+1}dt}{e^{\pi t}-1}$ og multiplicere med et Medium af Functionen mellem $t=0$ og $t=\infty$, som kan betegnes med $tM_{0,\infty}$, faaer man Resten lig

$$\frac{A_{2n+1}}{G(2n+3)}\cdot\frac{d^{2n+1}[\varphi(x+tM_{0,\infty}.\sqrt{-1})+\varphi(x-tM_{0,\infty}.\sqrt{-1})]}{2dx^{2n+1}}.$$

Naar altsaa $\psi^{(2n+1)}t$ ikke bliver uendelig mellem $t=0$ og $t=\infty$, vil man kunne angive Grændsen for Approximationens Nöiagtighed.

Er $\varphi x=\frac{1}{x^{\mu}}$, har man

$$\frac{d^{2n+1}\left(\frac{1}{x^{\mu}}\right)}{dx^{2n+1}}=(-1)^{2n+1}\frac{\mu.(\mu+1)\ldots(\mu+2n)}{x^{\mu+2n+1}}=(-1)^{2n+1}\frac{G(\mu+2n+1)}{G\mu.x^{\mu+2n+1}},$$

og altsaa det dertil svarende Led i Udviklingen af $S\frac{1}{x^{\mu}}$ lig

$$t_{2n+1}=\frac{(-1)^{2n+1}G(\mu+2n+1)A_{(2n+1)}}{G(2n+3)G\mu.x^{\mu+2n+1}}=\frac{(-1)^{3n+2}.G(\mu+2n+1)\sum_1^{\infty}z\left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right)}{2^{2n+1}\pi^{2n+2}G\mu x^{\mu+2n+1}},$$

og det nærmest foregaaende

$$t_{2n-1}=\frac{(-1)^{3n-1}G(\mu+2n-1)\sum_1^{\infty}z\frac{1}{z^{2n}}}{2^{2n-1}\pi^{2n}G\mu.x^{\mu+2n-1}}.$$

Disse to Led ville altsaa have afvexlende Tegn og deres numeriske Qvotient er

$$\frac{t_{2n+1}}{t_{2n-1}}=\frac{(\mu+2n)(\mu+2n-1)}{2^2\pi^2x^2}\cdot\frac{\sum_1^{\infty}z\frac{1}{z^{2u+1}}}{\sum_1^{\infty}z\frac{1}{z^{2n}}}.$$

Da $\frac{\sum_1^{\infty}z\frac{1}{z^{2n+1}}}{\sum_1^{\infty}z\frac{1}{z^{2n}}}<1$, bliver

$$\frac{t_{2n+1}}{t_{2n-1}}<\frac{(\mu+2n)(\mu+2n-1)}{2^2\pi^2x^2}<\frac{(\mu+2n)(\mu+2n-1)}{36x^2}.$$

Saalænge altsaa $\frac{(\mu+2n)(\mu+2n-1)}{36x^2} < 1$ bliver Rækkens Led aftagende, og det er muligt at give x en saa stor Værdi, at hvilketsomhelst Led falder ind under disse; ligesom det ogsaa er klart, at for hvilkensomhelst Værdi af x vil, naar $2\pi x < \mu + 2n - 1$, ethvert efterfölgende Led i numerisk Henseende blive större end det foregaaende og tiltage i det Uendelige.

Men omendskjönt Rækken saaledes ikke er convergerende, bliver det muligt, at bestemme en höiere og lavere Grændse, inden hvilken Integralet maa falde efter den Methode, som i det Foregaaende er udviklet.

Da
$$\frac{d^{2n+1}\frac{1}{x^\mu}}{dx^{2n+1}} = -\frac{G(\mu+2n+1)}{G\mu . x^{\mu+2n+1}},$$

bliver Resten

$$-\frac{G(\mu+2n+1)}{2G\mu} A_{2n+1}\left(\frac{1}{(x+tM_{0,\infty}.\sqrt{-1})^{\mu+2n+1}} + \frac{1}{(x+tM_{0,\infty}.\sqrt{-1})^{\mu+2n+1}}\right).$$

Men
$$\left\{\frac{1}{\left(x+\frac{z}{2}\sqrt{-1}\right)^k} + \frac{1}{\left(x-\frac{z}{2}\sqrt{-1}\right)^k}\right\} = \frac{\left(x+\frac{z}{2}\sqrt{-1}\right)^k + \left(x-\frac{z}{2}\sqrt{-1}\right)^k}{\left[x^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2\right]^k},$$

som kan sættes under Formen $\dfrac{\left(1+\frac{z}{2x}\sqrt{-1}\right)^k + \left(1-\frac{z}{2x}\sqrt{-1}\right)^k}{x^k\left[1+\left(\frac{z}{2x}\right)^2\right]^k}$.

Gjör man $\frac{z}{2x} = tgu$, $\left(\text{fra } u = 0 \text{ til } u = \frac{\pi}{2}\right)$, gaaer dette Udtryk over til

$$\frac{\cos^k u[(\cos u + \sqrt{-1}\sin u)^k + (\cos u - \sqrt{-1}\sin u)^k]}{x^k} = \frac{2\cos^k u \cos ku}{x^k},$$

hvis störste Værdi indtræffer, naar $u = 0$, og reduceres da til $\frac{2}{x^k}$; altsaa er den störste Talværdi, som Resten ikke kan overskride,

$$\frac{G(\mu+2n+1)}{G\mu . G(2n+3)} A_{2n+1} \frac{1}{x^{\mu+2n+1}},$$

og saaledes lig det efterfölgende Led, naar Rækken videre fortsættes.

Men Resten maa ogsaa have samme Fortegn, som det efterfölgende Led; thi x kan stedse tages saa stor, at, naar Leddet med Coefficienten A_{2n+1} hörer til de aftagende, dette ogsaa er Tilfældet med det fölgende, og da Restens numeriske Værdi i saa Fald bliver stedse mindre, fölger deraf, at den maa tages med samme Fortegn, som det efterfölgende Led.

Saalænge altsaa Rækkens Led ere aftagende, ligger Integrales Værdi mellem Summen af dens n og dens $(n+1)$ förste Led, og, som vi have seet, er dette Tilfældet, saalænge $\frac{(\mu+2n)(\mu+2n-1)}{36x^2} < 1$.

Dertil udfordres $2n \leqq 6x - \mu$.

Antages $x = 10$, er altsaa Rækkens Led aftagende, saalænge $2n$ ikke overskrider $60 - \mu$.

Vi have saaledes

$$S\frac{1}{x^\mu} = C - \frac{1}{\mu x^{\mu-1}} + \frac{1}{2x^\mu} - \frac{\mu A_1}{1.2.x^{\mu+1}} - \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)A_3}{2.3.4.x^{\mu+3}}\dots$$

$$\dots - \frac{G(\mu+2n+1)}{G\mu . G(2n+3)} \cdot \frac{A_{2n+1}}{x^{\mu+2n+1}} \text{ etc.}$$

For $x = \infty$, reduceres höire Side til C, og altsaa $C = \overset{\infty}{\underset{1}{S_x}} \frac{1}{x^\mu}$, som vi ville betegne med S_μ, og saaledes har man

$$S_\mu = \overset{m}{\underset{1}{S_x}} \frac{1}{x^\mu} + \frac{1}{\mu m^{\mu-1}} - \frac{1}{2m^\mu} + \frac{\mu A_1}{2m^{\mu+1}} + \dots + \frac{G(\mu+2n+1)A_{2n+1}}{G\mu\, G(2n+3) m^{\mu+2n+1}} + \text{etc.}$$

Er $\mu = 1$, bliver $\frac{dx}{x} = \log x$, og da $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1)$

$$= 1 - \log 2 + \tfrac{1}{2} - \log \tfrac{3}{2} \dots + \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n},$$

der for $n = \infty$ bliver $= h$ i den givne Udvikling af Functionen $\log G(1+\omega)$; fremdeles er $\frac{G(1+2n+1)}{G(2n+3)} = \frac{1}{2n+2}$, saa at man har

$$h = \overset{m}{\underset{1}{S_x}} \frac{1}{m} - \log m - \frac{1}{2m} + \frac{A_1}{2m^2} + \frac{A_3}{4m^4} + \frac{A_5}{6m^6}\dots$$

Saaledes kunne h, samt S_2, S_3 etc. beregnes ved at give m en bestemt Værdi.

For at bedömme Approximationens Nöiagtighed, naar m giver Værdien 10, og man gaaer til det Led, hvis Coefficient er A_{25}, hvor $n = 12$, hvilket hörer til de aftagende, indtil μ bliver 36, kan man slutte saaledes:

Dette Led vil for

$$\mu = 1, \quad \mu = 2, \quad \mu = 3, \quad \mu = 4, \quad \mu = 5, \quad \mu = 6,$$

faae Værdierne $\frac{1}{26} \cdot \frac{A_{25}}{10^{26}}, \frac{1}{1} \cdot \frac{A_{25}}{10^{27}}, \frac{27}{2} \cdot \frac{A_{25}}{10^{28}}, \frac{27.28}{2.3} \cdot \frac{A_{25}}{10^{29}}, \frac{27.28.29}{2.3.4} \cdot \frac{A_{25}}{10^{30}}, \frac{27.28.29.30}{2.3.4.5} \cdot \frac{A_{25}}{10^{31}}$.

Den största Værdi erholdes, naar $\mu = 3$; hvoraf fölger, at naar Approximationen fortsættes til A_{25}, opnaaes for denne Værdi af μ den mindste Nöiagtighed.

Da nu A_{25} omtrent er $1{,}5.10^6$, og $A_{25} \times \frac{27}{2}$ omtrent $20{,}25.10^6$, bliver det dertil svarende Leds Talværdi omtrent $\frac{20{,}25.10^6}{10^{28}}$, altsaa paa det nærmeste $\frac{2}{10^{21}}$. Saaledes vil man under denne Forudsætning kunne bestemme S_3 med **20** Decimaler, og altsaa de övrige med en endnu större Nöiagtighed.

Med **16** Decimaler har man, da

$$\overset{10}{\underset{1}{S_x}} \frac{1}{x} = 2{,}9289682539682539,$$

og

$$\log \text{nep } 10 = 2{,}3025850929940457,$$

$$h = 0{,}5772156649015328,$$

og ligeledes:

$$S_2 = 1{,}6449340668482264,$$
$$S_3 = 1{,}2020569031595942,$$
$$S_4 = 1{,}0823232337111381,$$
$$S_5 = 1{,}0369277551068632,$$
$$S_6 = 1{,}0173430619844491,$$
$$S_7 = 1{,}0083492773866018,$$
$$S_8 = 1{,}0040773561979443,$$
$$S_9 = 1{,}0020083928260822,$$
$$S_{10} = 1{,}0009945751278880,$$
$$S_{11} = 1{,}0004941886041094,$$
$$S_{12} = 1{,}0002460865533080,$$
$$S_{13} = 1{,}0001227233475857,$$
$$S_{14} = 1{,}0000612481350587,$$
$$S_{15} = 1{,}000030582363070,$$
$$S_{16} = 1{,}0000152822594086.$$

Ved at multiplicere h, $S_2 - 1$, $S_3 - 1$ etc. med Modulen til de Briggiske Logarithmer 0,4342944819032518 og betegne Producterne med α_1, $\alpha_2 \ldots$ findes

$\alpha_1 = 0{,}2506816$,	$\alpha_7 = 0{,}0036260$,	$\alpha_{13} = 0{,}0000533$,
$\alpha_2 = 0{,}2800913$,	$\alpha_8 = 0{,}0017708$,	$\alpha_{14} = 0{,}0000266$,
$\alpha_3 = 0{,}0877522$,	$\alpha_9 = 0{,}0008733$,	$\alpha_{15} = 0{,}0000133$,
$\alpha_4 = 0{,}0357527$,	$\alpha_{10} = 0{,}0004319$,	$\alpha_{16} = 0{,}0000066$,
$\alpha_5 = 0{,}0160375$,	$\alpha_{11} = 0{,}0002146$,	$\alpha_{17} = 0{,}0000033$,
$\alpha_6 = 0{,}0075320$,	$\alpha_{12} = 0{,}0001069$,	$\alpha_{18} = 0{,}0000016$.

Heraf sees,

$$\log Br\, G(1+\omega) = \omega\,.\,0{,}1836129 - \log Br\,(1+\omega) + \omega^2\; 0{,}1400456,$$
$$- \omega^3\; 0{,}0292507 + \omega^4\; 0{,}0089382,$$
$$- \omega^5\; 0{,}0032075 + \omega^6\; 0{,}0012553,$$
$$- \omega^7\; 0{,}0005180 + \omega^8\; 0{,}0002214,$$
$$- \omega^9\; 0{,}0000970 + \omega^{10}\; 0{,}0000432,$$
$$- \omega^{11}\; 0{,}0000195 + \omega^{12}\; 0{,}0000089,$$
$$- \omega^{13}\; 0{,}0000041 + \omega^{14}\; 0{,}0000019,$$
$$- \omega^{15}\; 0{,}0000009 + \omega^{16}\; 0{,}0000004,$$
$$- \omega^{17}\; 0{,}0000002 + \omega^{18}\; 0{,}0000001.$$

Ved at sætte $\omega = 1$ vil man finde $\log Br\, G2 = 0$, som det bör være.

Naar derimod x har en meget stor Værdi, vil Udviklingen af Integralet $\Sigma\varphi x$ ved de *Bernouilliske* Tal ogsaa kunne anvendes til Evaluationen af Functionen Gx.

Man har nemlig $\int \log x\,.\,dx = x\log x - x,$

$$\frac{d^{2m+1}\log x}{dx^{2m+1}} = \frac{d^{2m}.\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^{2m}} = \frac{G(2m+1)}{x^{2m+1}},$$

samt
$$\frac{G(2m+1)\,A_{2m+1}}{G(2m+3)\,.\,x^{2m+1}} = \frac{A_{2m+1}}{(2m+1)(2m+2)x^{2m+1}},$$

hvoraf, (idet $\Sigma\varphi x = S\varphi x + \varphi x$),

$$\Sigma \log x = \psi x + (x-\tfrac{1}{2})\log x - x + \frac{A_1}{1.2.x} + \frac{A_3}{3.4.x^3} + \frac{A_5}{5.6.x^5} + \text{etc.},$$

hvor ψx er en arbitrær periodisk Function.

Skal dette Integral falde sammen med Functionen $\log Gx$, maa den arbitrære Function bestemmes i Overeensstemmelse dermed.

Vi have seet, at

$$Gx \mathop{\Pi_\mu}_{1}^{m-1} G\left(x+\frac{\mu}{m}\right) = m^{\frac{1}{2}-xm}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\, Gmx.$$

Dette giver, ved at sætte x saa stor, at de Led, som ere multiplicerede med en negativ Potents af x forsvinde,

$$\psi x + (x-\tfrac{1}{2})\log x - x,$$
$$+\psi\left(x+\frac{1}{m}\right) + \left(x+\frac{1}{m}-\tfrac{1}{2}\right)\log\left(x+\frac{1}{m}\right) - x - \frac{1}{m},$$
$$+\psi\left(x+\frac{2}{m}\right) + \left(x+\frac{2}{m}-\tfrac{1}{2}\right)\log\left(x+\frac{2}{m}\right) - x - \frac{2}{m},$$
$$\vdots$$
$$\psi\left(x+\frac{m-1}{m}\right) + \left(x+\frac{m-1}{m}-\tfrac{1}{2}\right)\log\left(x+\frac{m-1}{m}\right) - x - \frac{m-1}{m}$$

$$= \psi mx + (mx - \tfrac{1}{2})\log mx - mx + (\tfrac{1}{2} - mx)\log m + \frac{m-1}{2}\log 2\pi.$$

Ved at bemærke, at $\log mx = \log m + \log x$, samt at

$$(m-1)x\log x = \left[\left(x + \frac{1}{m} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(x + \frac{2}{m} - \tfrac{1}{2}\right)\ldots\left(x + \frac{m-1}{m} - \tfrac{1}{2}\right)\right]\log x,$$

hvorved de logarithmiske Led af x faae Formen

$$\log\left(1 + \frac{\mu}{mx}\right)^{x + \frac{\mu}{m} - \frac{1}{2}},$$

og derhos, at $$\operatorname{Lim}\left(1 + \frac{\mu}{mx}\right)^{x+f} = e^{\frac{\mu}{m}},$$

idet f er et endeligt Tal, har man

$$\psi x + \psi\left(x + \frac{1}{m}\right) + \psi\left(x + \frac{2}{m}\right)\ldots\psi\left(x + \frac{m-1}{m}\right) = \psi mx + \frac{m-1}{2}\log 2\pi.$$

Da Gx skal være en continuerende Function, maa ogsaa ψx være det, og det almindelige Udtryk for denne, $f.\sin 2\mu\pi x$, $\cos 2\mu\pi x$, kan saaledes tænkes udviklet i Led af Formen $$A + \Sigma A_i \sin 2i\pi x + \Sigma B_i \cos 2i\pi x.$$

Altsaa kan man sætte

$$\psi x + \psi\left(x + \frac{1}{m}\right) + \psi\left(x + \frac{2}{m}\right)\ldots + \psi\left(x + \frac{m-1}{m}\right)$$

$$= mA + \Sigma_i \sum_{0}^{m-1}{}_{\mu} A_i \sin 2\pi i\left(x + \frac{\mu}{m}\right) + \Sigma_i \sum_{0}^{m-1}{}_{\mu} B_i \cos 2\pi i\left(x + \frac{\mu}{m}\right).$$

Man man har i Almindelighed

$$\sum_{0}^{m-1}{}_{\mu} A_i \sin 2\pi i\left(x + \frac{\mu}{m}\right) = 0,$$

og $$\sum_{0}^{m-1}{}_{\mu} B_i \cos 2\pi i\left(x + \frac{\mu}{m}\right) = 0.$$

---

*) Af $e^{x\sqrt{-1}} + e^{(x+\omega)\sqrt{-1}} + e^{(x+2\omega)\sqrt{-1}} \ldots e^{(x+\rho\omega)\sqrt{-1}} = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{(x+\rho\omega+\omega)\sqrt{-1}}}{1 - e^{x\sqrt{-1}}}$

vil man finde

$$\cos x + \cos(x+\omega) + \cos(x+2\omega) \ldots + \cos(x+\rho\omega) = \frac{\cos\left(x + \frac{\omega\rho}{2}\right)\sin\frac{(\omega\rho+\omega)}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

og $$\sin x + \sin(x+\omega) + \sin(x+2\omega) \ldots + \sin(x+\rho\omega) = \frac{\sin\left(x + \frac{\omega\rho}{2}\right)\sin\frac{(\omega\rho+\omega)}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}},$$

hvilke blive 0, naar $\omega = \dfrac{2i\pi}{m}$ og ρ sættes $(m-1)$.

Herved har man $mA = \psi(mx) + \frac{m-1}{2} \log 2\pi$,

eller ψx reduceres til Constanten $A = \psi(mx)$, der saaledes befindes at være $\frac{1}{2} \log 2\pi$.

Naar Integralet $\Sigma \log x$ skal tages fra $x = 1$ til $x =$ hvilketsomhelst heelt Tal, vil, i hvilketsomhelst Tilfælde, ψx erholde samme Værdi, som under denne Forudsætning ogsaa vil kunne findes ved det af *Wallis* givne Udtryk for π.

Vi have saaledes

$$\Sigma \log x = \log Gx = \tfrac{1}{2} \log 2\pi + (x - \tfrac{1}{2}) \log x - x + \frac{A_1}{1.2.x} + \frac{A_3}{3.4.x^3} + \frac{A_5}{5.6.x^5} + \text{etc.}$$

Forövrigt synes det klart, at, naar man paa to forskjellige Maader kommer til et endeligt Integral, man ikke uden videre kan antage disse Resultater paa en Constant nær for identiske; thi i det ene kan en periodisk Function være indeholdt; overhoved vil Bestemmelsen af Constanten for to fælleds Værdier blot afgjöre, at disse to Integraler for den Værdi af den Variable, samt for de övrige Værdier, hvis Intervaller fra den förste er et Multiplum af den antagne Differents falde sammen, hvorimod de mellem Intervallerne kunne divergere fra hinanden.

Idet man saaledes betegner et endeligt Integral efter en bestemt Udvikling med en bestemt Signatur, saaledes som f. Ex. *Abel* i forskjellige Opsatser i hans samlede Værkers II Deel pag. 15 etc. har gjort ved at betegne $\Sigma \frac{1}{x}$ efter en bestemt Udvikling med Lx, bliver det fornödent, naar man ad en ganske forskjellig Vei kommer til dette Integral, ikke alene at paavise, at disse to Udviklinger falde sammen for en bestemt Værdi, men ogsaa, at de inden Intervallerne stemme overeens. Forsömmelsen af dette forekommer mig at være en væsentlig Mangel i disse Opsatser.

Udviklingen af Σlx ved *Bernouilliske* Tal tjener ogsaa til at paavise andre Egenskaber ved Functionen $\log Gx$.

Ved Differentiation har man

$$\frac{d \log Gx}{dx} = \Sigma\left(\frac{1}{x}\right) = \log x - \frac{1}{2x} - \frac{A_1}{1.2.x^2} - \frac{A_3}{4x^4} \dots$$

Naar $x > 1$, bliver $\frac{A_1}{1.2.x^2} > \frac{A_3}{4x^4}$, og efter hvad vi have seet

$$\frac{d \log Gx}{dx} > \log x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2}.$$

Altsaa kan Differentialet ikke blive Nul med mindre

$$\log x < \frac{1}{2x} + \frac{1}{24x^2},$$

det er, med mindre $x < 1{,}5$.

Fölgelig er Functionen Gx kun modtagelig for Maxima og Minima, naar Værdierne af x ligge mellem 1 og $1\frac{1}{2}$.

I den forhen givne Udvikling for $\log G(1+\omega)$ efter Potentserne af ω vil man finde andet Differential positiv for enhver Værdi af ω under $\frac{1}{2}$, og at förste Differential blot engang skifter Tegn fra $\omega = \frac{1}{2}$ til $\omega = 0$. Heraf sees, at 1ste Differentialcoefficient sat 0, har een og blot een Rod beliggende mellem disse Grændser. Imellem $\omega = 0$ og $\omega = -1$ ville alle Led i förste Differential blive negative; altsaa kan intet Tegnskifte i dette Interval finde Sted. Altsaa har Functionen $G(1+\omega)$ fra $\omega = -1$ til $\omega = \infty$ blot et Minimum, som falder mellem $G\,1{,}4$ og $G\,1{,}5$.

Den anden Differentialcoefficient af $\log Gx$, udviklet efter de *Bernouilliske* Tal, er

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{A_1}{x^3} + \frac{A_3}{x^4} \text{ etc.},$$

altsaa er, naar $x > 1$,

$$\frac{d^2 \log Gx}{dx^2} > \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2},$$

som stedse er positiv; ligesom og Udtrykket for dette Differential, udledet af Rækken $\log G(1+\omega)$ efter de stigende Potentser af ω, viser, at dette ogsaa er Tilfældet med Hensyn til de negative Værdier af ω til $\omega = -1$, altsaa indtil $x = 0$ i Udtrykket $\log Gx$; heraf fölger, at i Curven udtrykt ved Ligningen

$$y = \log Gx$$

er y uendelig for $x = 0$, bliver 0 for $x = 1$, har et Minimum mellem $x = 1{,}4$ og $x = 1{,}5$, bliver atter 0, naar $x = 1$ og voxer derfra i det Uendelige, uden Maxima, Minima, Inflexionspuncter eller særegne Puncter. Dette maa ogsaa mutatis mulandis være Tilfældet med Functionen Gx.

* * *

Ligesom Gx kan udtrykkes ved $\sqrt{\pi}$, naar $x = \frac{1}{2}$, saaledes vil i visse Tilfælde denne Function kunne udtrykkes ved elliptiske Functioner.

Vi have nemlig (§ 3)

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}dx}{(1-x^m)^n} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\Gamma\frac{\beta}{m}\,\Gamma(1-n)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{m}+1-\frac{1}{2}\right)},$$

hvilket Integral for $n = 3$ eller 4 er umiddelbar elliptisk, og giver for $\beta = 1$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \cdot \frac{\Gamma\frac{1}{3}}{\Gamma\frac{5}{6}} = 2.3^{-\frac{1}{4}} F^1 \sin 15^0,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{\Gamma\frac{1}{4}}{\Gamma\frac{3}{4}} = 2^{-\frac{1}{2}} F^1 \sin 45^0,$$

idet $F^1(c)$ angiver den complete elliptiske Function af förste Art med Modulen c.

Da nu paa Grund af

$$\Gamma a \Gamma(a+\tfrac{1}{2}) = 2^{1-2a}\sqrt{\pi}\, \Gamma 2a$$

vi finde
$$\Gamma\tfrac{5}{6} = 2^{\frac{4}{3}}\pi^{\frac{3}{2}}3^{-\frac{1}{2}}.(\Gamma\tfrac{1}{3})^{-2},$$

$$\Gamma\tfrac{1}{4}\Gamma\tfrac{3}{4} = 2^{\frac{1}{2}}.\pi,$$

erholdes
$$\Gamma\tfrac{1}{3} = \sqrt[3]{(2^{\frac{7}{3}}.3^{\frac{1}{4}}\pi F^1 \sin 15^0)},$$

$$\Gamma\tfrac{1}{4} = 2\sqrt{(\pi^{\frac{1}{2}}.F^1 \sin 45^0)}.$$

Af $\Gamma\frac{1}{3}$ findes $\Gamma\frac{1}{6}$; og og ved i Integralet at sætte $m = 8$, har man

$$\Gamma\tfrac{1}{8} = 2\sqrt{\left(2^{\frac{5}{4}}F^1\operatorname{tg}\tfrac{\pi}{8}\,\Gamma\tfrac{1}{4}\right)} = 2\sqrt{\left[2^{\frac{9}{4}}\pi^{\frac{1}{4}}F^1\operatorname{tg}\tfrac{\pi}{8}\left(F^1\sin\tfrac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}.$$

Ligesaa $\Gamma\frac{1}{12}$ kunne udtrykkes ved en elliptisk Function; thi ved i Formlen for Γma at sætte $m = 3$, $a = \frac{1}{12}$, erholdes

$$\Gamma\tfrac{1}{12}\,\Gamma\tfrac{5}{12}\,\Gamma\tfrac{3}{4} = 3^{\frac{1}{4}}2\pi\Gamma\tfrac{1}{4},$$

men
$$\Gamma\tfrac{5}{12} = 2^{\frac{1}{6}}\sin 15^0\,\pi^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma\tfrac{1}{12}\,\Gamma\tfrac{5}{6},$$

hvoraf sees at $\Gamma\frac{1}{12}$ kan udtrykkes elliptisk, og altsaa ogsaa Integralet

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{12})}} = \frac{\sqrt{\pi}}{12} \cdot \frac{\Gamma\frac{1}{12}}{\Gamma\frac{7}{12}} = \frac{2^{-\frac{5}{6}}(\Gamma\frac{1}{12})^2}{\Gamma\frac{1}{6}},$$

der ellers ikke ved de almindelige Substitutioner kan gjöres elliptisk.

Naar $\Gamma\frac{1}{3}$, $\Gamma\frac{1}{6}$, $\Gamma\frac{1}{8}$, $\Gamma\frac{1}{12}$ ere bekjendte, ere disse Störrelser ogsaa bekjendte for hvilkesomhelst hele Tællere; heraf vil i visse Tilfælde fremgaae Relationer mellem de elliptiske Functioner af forskjellige Arter. Saaledes er f. Ex.

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = 2^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{(1-\sin^2 45^0 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}}\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{(1-\sin^2 45\sin^2\varphi)} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2 45\sin^2\varphi)}}\right)$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}}(2E^1\sin 45^0 - F^1\sin 45^0).$$

Men
$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \sqrt{\pi}.\frac{\Gamma\frac{3}{4}}{\Gamma\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{2^{\frac{3}{2}}F\sin 45^0}.$$

Heraf
$$E^1\sin 45^0 = \tfrac{1}{2}\left(F^1\sin 45^0 + \frac{\pi}{2F^1\sin 45^0}\right).$$

§ 6.

Af Integralet
$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}dx}{(1-x^m)^n} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\Gamma\frac{\beta}{m}\Gamma(1-n)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{m}+1-n\right)}$$
fölger
$$\int_0^1 \frac{m^n x^{\beta-1}dx}{(1-x^m)^n} = m^{n-1} \cdot \frac{\Gamma\frac{\beta}{m}\Gamma(1-n)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{m}+1-n\right)}.$$
For $m=0$ findes Limiten af höire Side ved de *Bernouilliske* Tal; thi idet $\frac{\beta}{m}$ sættes uendelig stor, har man
$$\log \frac{m^{n-1}\Gamma\frac{\beta}{m}}{\Gamma\left(\frac{\beta}{m}+1-n\right)} = (n-1)\log m + \left(\frac{\beta}{m}-\frac{1}{2}\right)\log\frac{\beta}{m} - \left(\frac{\beta}{m}-\frac{1}{2}+1-n\right)\log\left(\frac{\beta}{m}+1-n\right)+(1-n)$$
$$= -\log m\left(\frac{\beta}{m}+1-n\right)^{1-n} - \log\left(1+\frac{m}{\beta}(1-n)\right)^{\frac{\beta}{m}-\frac{1}{2}} + (1-n).$$
For $\frac{\beta}{m} = x = \infty$, bliver Lim $\left(1+\frac{m}{\beta}(1-n)\right)^{\frac{\beta}{m}-\frac{1}{2}} = e^{1-n}$

og
$$\log\left[m\left(\frac{\beta}{m}+1-n\right)\right]^{1-n} = \log \beta^{1-n}.$$
Saaledes er
$$\text{Limit} \frac{m^{n-1}\Gamma\frac{\beta}{m}}{\Gamma\left(\frac{\beta}{m}+1-n\right)} = \beta^{n-1}.$$
Venstre Side antáger Værdien $\frac{0}{0}$, der bestemmes paa sædvanlig Maade og findes $\int_0^1 x^{\beta-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-n}.dx$, og saaledes har man det bekjendte
$$\int_0^1 x^{\beta-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-n} = \beta^{n-1}\Gamma(1-n).$$
Er m negativ, discontinuerer höire Side, og vil ikke kunne reduceres ved at skrive G for Γ, og gaae over fra de negative Værdier til positive ved Formlen
$$G(-x) = \frac{-\pi}{x \sin \pi x\, Gx}.$$
Men i dette Tilfælde har man
$$\int_0^1 \frac{(-m)^n x^{\beta-1}dx}{(1-x^{-m})^n} = \int_0^1 \frac{m^n x^{\beta-1}dx}{(x^{-m}-1)^n} = \int_0^1 \frac{m^n x^{mn+\beta-1}dx}{(1-x^m)^n} = \frac{m^{n-1}\Gamma\frac{mn+\beta}{m}\Gamma(1-n)}{\Gamma\left(\frac{mn+\beta}{m}+1-n\right)}.$$

* * *

I Professor *Hansteens* Mecanik, § 397, findes fölgende Udtryk for Udströmningen af et Fluidum gjennem Aabningen paa et Kar

$$dt = -\int \frac{dh}{\sqrt{(2gh)}} \left\{ \frac{n^2 - 2}{\left[1 - \left(\frac{h}{H}\right)^{n^2-2}\right]} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

og antydet, at dette kan, mellem Grændserne $h = H$ og $h = 0$, udtrykkes ved de Eulerske Integraler.

Man har ogsaa ved at sætte $\frac{h}{H} = z$,

$$T = \sqrt{\left(\frac{H}{2g}\right)} \int_0^1 \frac{m^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz}{(1 - z^m)^{\frac{1}{2}}},$$

som giver

$$T = \sqrt{\left(\frac{\pi H}{2g}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{(n^2 - 2)}} \cdot \frac{\Gamma \frac{1}{2(n^2-2)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2(n^2-2)} + \frac{1}{2}\right)} \text{ for } n^2 > 2,$$

$$T = \sqrt{\left(\frac{\pi H}{g}\right)} \text{ for } n^2 = 2,$$

$$T = \sqrt{\left(\frac{\pi H}{2g}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2 - n^2)}} \cdot \frac{\Gamma \frac{3 - n^2}{2(2-n^2)}}{\Gamma\left(\frac{3-n^2}{2(2-n^2)} + \frac{1}{2}\right)} \text{ for } n^2 < 2.$$

§ 7.

Man har (§ 4) $$G(1+p) = \prod_1^\infty {}_x \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^p}{\left(1 + \frac{p}{x}\right)},$$

og saaledes $$\frac{G(1+p)}{G(1+n)G(1+p-n)} = \prod_1^\infty {}_x \frac{(x+n)(x+p-n)}{x\ .\ (x+p)}$$

for enhver Værdi af n og p.

Nu er

$$\frac{(x+y)(x+y-1)\ldots(x+y-\overline{n-1})}{1\ .\ 2\ \ldots\ n} = \frac{x.(x-1)\ldots(x-\overline{n-1})}{1\ .\ 2\ \ldots\ n} + \frac{x.(x-1)\ldots(x-\overline{n-2})}{1\ .\ 2\ \ldots\ n-1} \cdot \frac{y}{1} + \frac{x.(x-1)\ldots(x-\overline{n-3})y\ .\ y-1}{1\ .\ 2\ \ldots\ (n-2)\ 1\ .\ 2}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$+ \frac{x}{1} \cdot \frac{y\ .(y-1)\ \ldots\ (y-\overline{n-2})}{1\ .\ 2\ \ldots\ (n-1)} + \frac{y\ .(y-1)\ \ldots\ (y-\overline{n-1})}{1\ .\ 2\ \ldots\ n}.$$

Hvilket Theorem blandt andet kan godtgjöres efter *Cauchy*, ved at gaae ud fra, at to hele Functioner maa være identiske, naar de faae samme Værdi for et Antal Værdier af den Variable, der overstiger Ligningens Grad, hvilket og med behörige Modificationer kan udstrækkes til hele Functioner af flere Variable.

I ovenstaaende Udtryk angiver begge Sider af Ligningen Antallet af Combinationerne til n for alle mulige hele Værdier af x og y, naar deres Summa overstiger n. Ligningen maa altsaa være identisk.

Dette giver, efter den her brugte Betegning,

$$\frac{G(1+p+q)}{G(1+n)\,G(1+p+q-n)}$$

$$=\frac{G(1+p)}{G(1+n)G(1+p-n)}+\frac{G(1+p)}{G n\, G(2+p-n)}\cdot\frac{G(1+q)}{G2\,.\,Gq}+\frac{G(1+p)}{G(n-1)\,G(3+p-n)}\cdot\frac{G(1+q)}{G3}+\text{etc.},$$

som, da $G(n-m)=\infty$, naar $n-m$ er negativ heel, kan skrives

$$1)\quad \frac{G(1+p+q)}{G(1+n)\,G(1+p+q-n)}=G(1+p)G(1+q)\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\frac{1}{G(n+1-\mu)\,G(1+\mu)\,G(1+p-n+\mu)\,G(1+q-\mu)};$$

eller, med Producter af et uendeligt Antal Factorer,

$$2)\quad \prod_{1}^{\infty}{}_{x}\frac{(x+n)(x+p+q-n)}{x\,.\,(x+p+x)}=\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\prod_{1}^{\infty}{}_{x}\frac{(x+1-\mu)(x+p-n+\mu)(x+\mu)(x+q-\mu)}{x\;.\;(x+p)\;.\;x\;.\;(x+q)},$$

som gjældende for enhver heel positiv Værdi af n.

Men ogsaa naar q er et heelt positivt Tal, er Ligningen gjældende for $n=$ hvilketsomhelst Tal; thi Ligningen kan skrives

$$3)\quad \frac{G(1+p+q)}{G(1+p)\,G(1+q)}=\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\frac{G(1+n)\,G(1+p+q-n)}{G(1+n-\mu)\,G(\mu+1)\,G(1+p-n+\mu)},$$

som bliver identisk for hver heel Værdi af n; men naar q er et heelt Tal vil den kunne sættes under Formen

$$\frac{(p+q)(p+q-1)\dots(p+1)}{q\,.\,(q-1)\,.\,.\,.\,1}=\frac{(p+q-n)(p+q-1-n)\dots(p-n)}{q\,.\,.\,.\,(q-1)\,.\,.\,.\,1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{(p+q-1)\dots\overline{p+1-n}}{(q-1)\,.\,.\,.\,1}$$

$$+\frac{n.\overline{n-1}}{1\,.\,2}\cdot\frac{(p+q-n)\dots\overline{p+2-n}}{(q-2)\,.\,.\,.\,1}\dots+\frac{n.(n-1)\dots\overline{n+1-q}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,q},$$

som er afsluttet, og rational. Da denne Ligning fyldestgjöres for enhver heel Værdi af n, maa den og være identisk uafhængig af n; og altsaa vil dette og være Tilfældet med Ligningerne 1 og 2, der saaledes ere gjældende i Almindelighed, naar enten q eller n er et heelt positivt Tal.

Er derimod baade n og q brudne, vil Rækken under Summationstegnet fortsættes i det Uendelige, og Qvotienten mellem to paa hinanden fölgende Led af Rækken 1, er $\dfrac{(\mu-n)(\mu-q)}{(\mu+1)(\mu+1+p-n)}$;

hvoraf fremgaaer, at Rækken convergerer til en bestemt Summa, naar hver Factor i Tælleren er mindre end en tilsvarende Factor i Nævneren. Men at den convergerer til Störrelsen paa höire Side af Lighedstegnet, er vistnok höist sandsynlig, men tör dog neppe antages uden Beviis, hvilket det ikke er lykkets mig at finde. Thi at Ligningen 3 er uafhængig af n for n eller q et heelt Tal og saaledes ogsaa det dertil svarende Product af et uendeligt Antal Factorer, nemlig

$$\sum_0^\infty {}_\mu \prod_1^\infty {}_x \frac{(x+p-\mu)(x+\mu)(x+p-n+\mu)(x+q-\mu)}{(x+n)\ .\ (x)\ .\ (x+p+q-n)\ .\ x},$$

beviser ikke, at dette er Tilfældet for q og n hvilkesomhelst. Man kan nemlig tænke sig mange Functioner, i kvilke dette ikke er Tilfældet; saaledes $\sin \mu q\pi \sin \lambda n\pi$, hvor λ og μ ere hele Tal; naar enten q eller n ere hele Tal, er dette Udtryks Værdi uafhængig af disse; men dette finder ikke Sted, naar denne Betingelse ophörer.

Eftersom Forordningen af 7de Novbr. 1809 bestemmer, at den Skik ved flere Skoler ved Programmer at inddyde til de offentlige Skoleexaminer efterhaanden skal söges almindelig indfört, en Bestemmelse, som denne Skoles talentfulde og fortjente Bestyrer har sögt indfört her, har jeg fra min Side ikke troet at burde unddrage mig fra den Pligt heri at understötte hans Bestræbelser, saavidt det stod til mig. Herved er ogsaa det Standpunct angivet, hvorfra jeg önsker dette Arbeide betragtet, nemlig som en ved Lovgivningen paalagt Pligt, og derhos som et Vidnesbyrd om, at jeg har dyrket det Fag, som er mig ved denne Skole betroet.

H. Arentz.

Tillæg og Rettelse til § 5.

Ved at bestemme den periodiske Function, som er at tilföie Udviklingen $\Sigma \log \frac{1}{x}$ efter de *Bernouilliske* Tal, for at bringe den til at samstemme med $\log Gx$ eller $\log \Gamma x$, er jeg gaaet ud fra, at denne, paa Grund af Continuiteten, kan antages at være af Formen

$$A + \Sigma A_i \sin 2i\pi + \Sigma B_i \cos 2i\pi.$$

Men dette er allerede en Specification, hvortil man ikke er berettiget. Bestemmelsen af denne periodiske Function kan derimod skee paa en stringent Maade efter Udviklingen i § 6.

Ved at benævne den periodiske Function ψx, og gaae frem, som er viist i dette §, vil man finde, idet m nærmer sig ubestemmelig til 0,

$$\text{Lim}\log\frac{m^{n-1}\Gamma\frac{\beta}{m}}{\Gamma\left(\frac{\beta}{m}+1-n\right)}=(n-1)\log\beta+\psi\frac{\beta}{m}-\psi\left(\frac{\beta}{m}+1-n\right),$$

eller, ved at sætte $\log\varphi x$ for ψx,

$$\text{Lim}\frac{m^{n-1}\Gamma\frac{\beta}{m}}{\Gamma\left(\frac{\beta}{m}+1-n\right)}=\frac{\varphi\frac{\beta}{m}}{\varphi\left(\frac{\beta}{m}+1-n\right)}\cdot\beta^{n-1}.$$

Men vi have seet, at $\int_0^1\frac{m^n x^{\beta-1}dx}{(1-x^m)^n}$

naar m nærmer sig ubestemmeligt til 0, gaaer over til

$$\int_0^1 x^{\beta-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-n}.$$

Altsaa har man

$$\int_0^1 x^{\beta-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-n}dx=\frac{\varphi\frac{\beta}{m}}{\varphi\left(\frac{\beta}{m}+1-n\right)}\beta^{n-1}\Gamma(1-n).$$

Men paa den anden Side har man

$$\int_0^1 x^{\beta-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-n}dx=\beta^{n-1}\Gamma(1-n),$$

og saaledes
$$\frac{\varphi\frac{\beta}{m}}{\varphi\left(\frac{\beta}{m}+1-n\right)}=1,$$

naar m nærmer sig 0, og uafhængig af n, der kan gjennemlöbe alle Værdier fra 0 til 1. Saaledes vil $\varphi\left(\frac{\beta}{m}+1-n\right)$ fremstille alle mulige Værdier af den periodiske Function. Heraf fölger

$$\varphi\frac{\beta}{m}=\varphi\left(\frac{\beta}{m}+1-n\right)=\text{Constant}.$$

Altsaa er og ψx en Constant. Sættes denne $=A$, gaaer Udtrykket i § 5

$$\psi x+\psi\left(x+\frac{1}{m}\right)+\psi\left(x+\frac{2}{m}\right)\dots\psi\left(x+\frac{m-1}{m}\right)=\frac{m-1}{2}\log 2\pi+\psi mx$$

over til
$$mA=\frac{m-1}{2}\log 2\pi+A.$$

Og deraf
$$A=\psi x=\tfrac{1}{2}\log 2\pi.$$

Skoleefterretninger.

A. Skolens Lærere.

Overlærer *Johannes Musæus,* Skolens Bestyrer (födt 1802, Candidatus Magisterii fra 1830, ansat som Adjunkt i 1827, udnævnt til Overlærer i 1832), ansat 1843. Gage 900 Spd.

Adjunkt *Hans Severin Arentz* (födt 1805), ansat 1829. Gage 600 Spd.

Adjunkt *Vincent Stoltenberg* (födt 1814, Candidatus Magisterii fra 1840), ansat som Hjælpelærer ved Skolen 1841, som Adjunkt 1846. Gage 400 Spd.

Adjunkt *J. Kristian D. Elster Bödtker* (födt 1823, Candidatus Magisterii fra 1847 *), ansat 1848. Gage 300 Spd.

Timelærerpost vakant. Gage 300 Spd.

Adjunkt *Blom* blev i August f. A. udnævnt til Overlærer og Bestyrer af Tromsö Middelskole og fratraadte sin Lærerpost ved denne Skole den 15de September s. A. Under Vakantsen har hans Formand som Adjunkt, Sognepræst *Wesenberg* fungeret som interimistisk Lærer. Adjunktposten er senere bleven forandret til en Timelærerpost.

B. Klasseinddeling.

Skolens Disciple ere inddeelte i 4 Klasser.

1ste Klasse. Underviisningsgjenstandene ere her Norsk, Latin, Religion, Historie, Geografi, Regning og Skrivning. Discipelantallet er 5.

2den Klasse. Underviisningsgjenstandene ere her Norsk, Latin, Græsk, Tydsk, Religion, Historie, Geografi, Arithmetik, Geometri og Skrivning. Disciplenes Antal udgjorde ved Skoleaarets Begyndelse 6, og udgjör, efterat ved Udgangen af 3die Kvartal en er udgaaen, 5.

3die Klasse. Underviisningsgjenstandene ere her Norsk, Latin, Græsk, Tydsk, Fransk, Religion, Historie, Geografi, Arithmetik, Geometri og Skrivning. Disciplenes Antal udgjorde ved Skoleaarets Begyndelse 5, og udgjör, efterat ved Udgangen af 2det Kvartal en er udgaaen, 4.

4de Klasse. Underviisningsgjenstandene ere Norsk, Latin, Græsk, Hebraisk, Tydsk, Fransk, Religion, Historie, Geografi, Arithmetik og Geometri. Discipelantallet er 4.

Kursus er i enhver Klasse 2 Aar. Dog vil undertiden en tidligere Opflytning fra en af de 3 nederste Klasser kunne være hensigtsmæssig; men i dette Tilfælde vil i Almindelighed Kursus i en af de fölgende Klasser blive saa meget længere.

Samtlige Underviisningstimer ere henlagte til Formiddagen, idet Underviisningen begynder Kl. 8 og fortsættes til Kl. 10, Timen fra Kl. 10 til 11 anvendes til Legemsövelser og Legemsbevægelse i fri Luft under en Lærers Opsyn, Underviisningen dernæst fortsættes fra Kl. 11 til 2, dog saaledes, at der ved ethvert Timeskifte tillades Disciplene i 5 Minuter at gjöre sig Bevægelse.

*) I forrige Aars Program var ved Feiltagelse anfört 1845.

Hvormange Timer der ere tillagte ethvert Fag, udviser nedenstaaende Tabel.

Klasse.	Norsk.	Latin.	Græsk.	Hebraisk.	Tydsk.	Fransk.	Religion.	Historie.	Geografi.	Mathematik.	Skrivning.	Tilsammen.
1ste	3	8	-	-	-	-	2	3	3	4	5	28
2den	2	8	5	-	2	-	2	3	2	3	3	30
3die	2	8	5	-	2	2	2	3	2	3	1	30
4de	2	8	5	2	2	2	2	3	1	3	-	30

C. Skolens Virksomhed i Skoleaaret.

4de Klasse.

Norsk *(Musæus)*. Af *Musæus's* "det Norske Sprogs Grammatik" er gjennemgaaet 2den og 3die Deel. Derhos ere 21 af hver Discipel udarbeidede Stiilövelser gjennemgaaede.

Latin *(Musæus)*. Horatii carmin. lbb. I & II, Cic. de off. lb. I, Taciti de situ, moribus & populis Germaniæ. Derhos ere 72 af hver Discipel udarbeidede Stiilövelser gjennemgaaede, og 1 Time ugentlig anvendt til Extemporalstiil.

Græsk *(Musæus)*. Sophoclis Antigona, Herodoti Thalia, hvorhos Grammatikens Syntax er gjennemgaaet.

Hebraisk *(Wesenberg)*. *Gesenii* Læsebog, den prosaiske Deel samt de i den poetiske Deel indeholdte Psalmer. *Lindbergs* Grammatik repeteret fra Begyndelsen til de uregelmæssige Verber incl.

Tydsk *(Wesenberg)*. *Hjorts* Læsebog fra P. 195 til P. 417, samt forskjellige Dele af Grammatiken.

Fransk *(Stoltenberg)*. *Bjerrings* Læsebog fra Begyndelsen til Enden; *Borrings* Grammatik, de uregelmæssige Verber samt en Deel af Syntaxen.

Religion *(Wesenberg)*. Repeteret *Stenersens* Lærebog, samt af *Herslebs* Bibelhistorie Apostlernes Historie. Repeteret Matthæi Evangelium i Grundsproget.

Historie *(Bödtker)*. Af *Munchs* almindelige Verdenshistorie er læst fra Rom som Keiserdömme (p. 223) til Reformationen (p. 567), og med Dimittenden desuden repeteret den övrige Deel af denne Bog, samt den nyeste Historie efter *Lassen*, saavelsom Skandinaviens Historie efter *Munch*.

Geografi *(Bödtker)*. *Platou's* "Udtog — for Mellemklasserne" med Undtagelse af Asia og Afrika, med Dimittenden den hele Bog.

Arithmetik *(Arentz)*. Repeteret *Holmboes* Lærebog. Övelser anstillede i Opgavers Lösning.

Geometri *(Arentz)*. Plantrigonometrien gjennemgaaet. Repeteret Geometrien efter *Holmboes* Lærebog. Desuden ere Övelser anstillede i Lösning af geometriske Opgaver.

3die Klasse.

Norsk *(Wesenberg)*. *Musæus's* "det norske Sprogs Grammatik" 2den Deel samt 3die Deel 1ste og 2det Kapitel. Derhos ere 20 af hver Discipel udarbeidede Stiilövelser gjennemgaaede.

Latin *(Wesenberg) Cæsaris* Comment. de bello Gall. lbb. VI & VII. Cic. Orat. IV in Catilinam. Repeteret *Bugges* Grammatik fra Begyndelsen til Enden. Derhos ere 58 af enhver Discipel udarbeidede Stiilövelser gjennemgaaede, samt 1 Time ugentlig anvendt til Extemporalstiil.
Græsk *(Arentz)*. Xenoph. Disciplinæ Cyri lib. 1. cap. 6. og lib. II. Af *Langes* Gramm. ere enkelte Partier af Syntaxen gjennemgaaede, samt den etymologiske Deel repeteret. *(Musæus)* Homeri Odysseæ β & γ.
Tydsk *(Wesenberg)*. *Hjorts* Læsebog fra Begyndelsen til P. 193; *Smiths* Grammatik, Formlæren repeteret.
Fransk *(Stoltenberg)*. *Borrings* Læsebog fra P. 48 til P. 188; *Borrings* Grammatik repeteret Formlæren.
Religion *(Wesenberg)*. *Pontoppidans* Forklaring repeteret 1ste Part; *Herslebs* Bibelhistorie fra det nye Testamentes 4de Periode til Apostlernes Historie, samt repeteret forfra til 2den Periode incl.
Historie *(Bödtker)*. "Norges, Sveriges og Danmarks Historie. I kortfattet Udtog af *Munch.*" Desuden er det i forrige Skoleaar Læste (næsten hele den nyere Historie efter *Lassens:* "De mærkeligste Personers Levnetsbeskrivelse o. s. v.") i större Pensa rekapituleret.
Geografi *(Bödtker)*. Af *Platous* Udtog for Mellemklasserne: "Europa" og de europæiske Lande, hvoraf omtrent Halvparten er Repetition af det i forrige Skoleaar Læste.
Arithmetik *(Arentz)*. *Holmboes* Arithmetik er gjennemgaaet til Kapitlet om Potentser og Rödder med Forbigaaen af Læren om Kjædebröker, samt Övelser anstillede i Oplösning af Ligninger i 1ste Grad.
Geometri *(Arentz)*. *Holmboes* Geometri til Kapitlet om Liniers Forhold.

2den Klasse.

Norsk *(Arentz)*. Mundtlige og skriftlige praktiske Övelser, hvorhos 22 af hver Discipel udarbeidede Stiilövelser ere gjennemgaaede.
Latin (*Stoltenberg)*. Corn. Nep., fra Iphicrates incl. indtil Enden. Repeteret *Bugges* Grammatik fra Begyndelsen til 13de Capitel af Syntaxen incl. Derhos ere 60 af enhver Discipel udarbeidede Stile gjennemgaaede.
Græsk *(Arentz)*. *Langes* Læsebog til P. 110, den paradigmatiske Deel af Grammatiken.
Tydsk *(Wesenberg)*. *Hallagers* Læsebog fra P. 183 til P. 280; *Smiths* Grammatik fra Begyndelsen til 2den Konjugation.
Religion *(Wesenberg)*. *Pontoppidans* Forklaring repeteret 1ste Part; *Herslebs* större Bibelhistorie fra det nye Testamentes 4de Periode til Apostlernes Historie samt repeteret forfra til 2den Periode incl.
Historie *(Bödtker)*. "Norges, Sveriges og Danmarks Historie. I kortfattet Udtog. Af *Munch.*" Desuden er det i forrige Skoleaar Læste (næsten hele den nyere Historie efter *Lassens:* "De mærkeligste Personers Levnetsbeskrivelse o. s. v.") i större Pensa rekapituleret.
Geografi *(Bödtker)*. Af *Platous* Udtog for Mellemklasserne: "Europa" og de europæiske Lande, hvoraf omtrent Halvparten er Repetition af det i forrige Skoleaar Læste.
Arithmetik *(Arentz)*. Praktiske Övelser.
Geometri *(Arentz)*. *Holmboes* Geometri til Kapitlet om Cirkler.

1ste Klasse.

Norsk *(Bödtker)*. De letteste Dele af *Musæus's:* "det norske Sprogs Grammatik", norsk Analyse af *Bergs* og *Wergelands* norske Læsebogs 1ste Deel, samt c. 30 Retskrivningsövelser, deels efter Diktat, deels efter Oplæsning af en eller anden Fortælling, deels Beskrivelser eller Fortællinger ganske paa egen Haand.

Latin *(Stoltenberg)*. *Bröders* Læsebog, fra 1ste Bog 3die Kap. incl. til Enden samt 27 Stykker af *Bröders* Lectiones. *Bröders* mindre Grammatik repeteret Formlæren.

Religion *(Wesenberg)*. *Pontoppidans* Forklaring, repeteret den sidste Deel af 1ste Part samt 2den Part; *Herslebs* mindre Bibelhistorie repeteret.

Historie *(Bödtker)*. *Fayes* Udtog af Norges Historie, samt af *Lassens:* "De mærkeligste Personers etc." den nyere Historie indtil Elisabeths Död 1603. Desuden den gamle og Middelalderens Historie (det i forrige Skoleaar Læste) paany opfrisket i Erindringen.

Geografi *(Bödtker)*. *Platous* Udtog — 1842.

Regning *(Arentz)*. Praktiske Övelser.

D. Til Universitetet afgaaer i indeværende Aar een Discipel, nemlig *Jens Georg Wilhelm Paludan,* 19 Aar gammel, Sön af afdöde Foged Paludan.

Den offentlige Examen i denne Skole tager sin Begyndelse Thorsdagen den 11te Juli förstkommende og afholdes efter vedföiede Tabel. Til at bivaane denne, har jeg herved den Ære, paa Medlæreres og egne Vegne at indbyde Enhver, der interesserer sig for Skolens Anliggender.

Skiens lærde Skole, den 23de Juni 1850.

Musæus.

Tabel,

hvorefter den offentlige Examen afholdes i Skiens lærde Skole i Juli 1850.

	Formiddag.		Eftermiddag.
Mandag, den 8de.	Skriftlig Pröve.	4de Klasse. 3die — 2den — 1ste — } Norsk.	
Tirsdag, den 9de.	Skriftlig Pröve.	4de Klasse. 3die — 2den — } Latinsk Stiil.	
Onsdag, den 10de.	Skriftlig Pröve.	4de Klasse. 3die — 2den — } Latinsk Oversættelse.	
Thorsdag, den 11te.		4de Klasse. Græsk. 2den — Arithmetik. 1ste — Latin.	4de Klasse. Fransk. 3die — Historie.
Fredag, den 12te.		3die Klasse. Græsk. 2den — Historie. 1ste — Religion.	4de Klasse. Historie. 3die — Religion.
Löverdag, den 13de.		4de Klasse. Latin. 2den — Latin. 1ste — Norsk.	
Mandag, den 15de.		4de Klasse. Geografi. 2den — Tydsk. 1ste — Regning.	4de Klasse. Arithmetik.
Tirsdag, den 16de.		3die Klasse. Fransk. 2den — Græsk. 1ste — Historie.	4de Klasse. Tydsk. 3die — Arithmetik.
Onsdag, den 17de.		3die Klasse. Latin. 2den — Geografi og Skrivning.	
Thorsdag, den 18de.		4de Klasse. Hebraisk. 3die — Geometri. 1ste — Geografi og Skrivning.	4de Klasse. Geometri. 3die — Tydsk.
Fredag, den 19de.		3die Klasse. Geografi og Skrivning. 2den — Religion.	4de Klasse. Religion.

Tirsdag den 23de, Formiddag Kl. 9, ville de Disciplene tildeelte Karakterer vorde oplæste.

Examen begynder om Formiddagen Kl. 9, om Eftermiddagen Kl. 3.
