Indbydelsesskrift til Aarsexamen

i

# Skiens offentlige Skole

for den høiere Almendannelse

i Juli 1874.

1. Lærebog i Arithmetik for Latingymnasiet af Overlærer Thv. Broch.
2. Skoleefterretninger, meddelte af Rector.

CHRISTIANIA.

Trykt hos A. W. Brøgger.

1874.

Indbydelsesskrift til Aarsexamen

i

# Skiens offentlige Skole

## for den høiere Almendannelse

i Juli 1874.

1. Lærebog i Arithmetik for Latingymnasiet af Overlærer Thv. Broch.
2. Skoleefterretninger, meddelte af Rector.

CHRISTIANIA.

Trykt hos A. W. Brøgger.

1874.

# Lærebog i Arithmetik for Latingymnasiet.

Af

**Thv. Broch.**
Overlærer.

# Rettelser.

Pag. 20 Linie 9 f. o. foran *Kvotient* er følgende Linie udeladt: *Divisor;* og det søgte Tal, altsaa den anden Faktor, kaldes.

# Indledning.

## § 1.

### Mathematikens Indhold. Mathematiske Tegn.

1. **E**nhver Ting kaldes en *Størrelse*, naar man kun tager Hensyn til dens Storhed og, forsaavidt den er en Del af Rummet, dens Form. *Mathematik er Læren om Størrelser og deres Forbindelser.* Den handler enten om Størrelser i Almindelighed uden dermed at forbinde Begreberne Rum og Tid og kaldes da *Arithmetik;* eller den handler om Størrelser, der fremkommer ved Betragtning af Rummet, og kaldes da *Geometri*, eller endelig om Størrelser, der fremkommer ved den forenede Betragtning af Rum og Tid, og kaldes da *Mechanik.*

2. Enhver Størrelse betegnes med et Bogstav. Man vælger da forskjellige Bogstaver til at betegne de forskjellige Størrelser; eller dersom de staar i en vis Sammenhæng med hverandre, benytter man ofte samme Bogstav, men med en eller flere Streger oventil saaledes: $a'$ $a''$ $a'''$ o. s. v. eller med Mærker nedentil saaledes: $a_1$ $a_2$ $a_3$ o. s. v.

At to Størrelser er lige store, betegnes ved at sætte Tegnet $=$, som kaldes *Lighedstegn*, mellem dem; at en Størrelse er større end en anden, betegnes ved at sætte Tegnet $>$ mellem dem saaledes, at den største Størrelse staar ved Aabningen, den mindste ved Spidsen. Sættes den mindste Størrelse først, maa altsaa Tegnet vendes om saaledes: $<$.

Vil man udtrykke, at en Forbindelse af flere Størrelser skal betragtes som en eneste Størrelse, sætter man en Parenthes om disse Størrelser. Heraf følger, at naar en Parenthes skal forbindes med andre Størrelser, saa maa, for at Parenthesen skal optræde som en enkelt Størrelse, alle de deri forekommende Størrelser først forbindes til en Størrelse, førend det Udkomne, Parenthesen, forbindes med de andre Størrelser.

3. En Sætning, som udtrykker, at to Størrelser er lige store, og som er betegnet paa den i No. 2 angivne Maade, kaldes en *Ligning*. De to Størrelser eller Forbindelser af Størrelser, som staar paa begge Sider af Lighedstegnet, kaldes Ligningens *Led*. En Ligning, som udtrykker, at en almindelig Sætning om Størrelsers Forbindelse finder Sted, kaldes en *Formel*.

## § 2.

### De mathematiske Grundsætninger.

De Grundsætninger, hvorfra Mathematiken gaar ud, er følgende:

I. *Enhver Størrelse er lig sig selv.*

II. *Overalt, hvor der kun er Tale om Storhed, kan man istedetfor den ene af to ligestore Størrelser sætte den anden.*

III. *Overalt, hvor der kun er Tale om Storhed, kan man istedetfor den største af to Størrelser sætte en endda større og istedetfor den mindste en endda mindre.*

Den anden af disse Grundsætninger optræder ofte under en af følgende to Former:

a. *Naar en Størrelse er lig den ene af to lige store Størrelser, er den ogsaa lig den anden.*

$$\begin{array}{l} a = b \\ b = c \\ \hline a = c \end{array}$$

b. *Naar en Størrelse er større end den ene af to lige store Størrelser, er den ogsaa større end den anden.*

$$\begin{array}{l} a > b \\ b = c \\ \hline a > c \end{array}$$

c. *Naar en Størrelse er mindre end den ene af to lige store Størrelser, er den ogsaa mindre end den anden.*

$$\begin{array}{l} a < b \\ b = c \\ \hline a < c \end{array}$$

Tilsvarende hertil faar den tredie Grundsætning sit mathematiske Udtryk under følgende to Former:

d. *Naar en Størrelse er større end den største af to Størrelser, er den ogsaa større end den mindste.*

$$\begin{array}{l} a > b \\ b > c \\ \hline a > c \end{array}$$

e. *Naar en Størrelse er mindre end den mindste af to Størrelser, er den ogsaa mindre end den største.*

$$\begin{array}{l} a < b \\ b < c \\ \hline a < c \end{array}$$

---

# Første Afsnit.

## Om hele, positive Tal.

### Indledning.

### § 3.

Tallene og deres Tegn.

1. *Et Tal er en bestemt Mængde ensartede Størrelser.* Hver af de enkelte Størrelser, som tilsammen danner en Mængde, kaldes en *Enhed*, og naar en enkelt Enhed optræder i Modsætning til en Mængde Enheder, benyttes Ordet Tal ogsaa til at betegne denne. De Ord, hvormed Tallene benævnes, kaldes *Talord*, og Tegnene derfor *Ziffre*. Tallene i deres naturlige Orden saaledes, at hvert følgende er en Enhed større end det foregaaende, kaldes *Talrækken;* et Tal kan da ogsaa betegnes som den Størrelse, der indtager en bestemt Plads i denne Række; og jo længer ude i Talrækken et Tal staar, desto større er det.

2. Ved Dannelsen af Talordene og Ziffrene er man gaaet frem paa følgende Maade. De ti første Tal har faaet særskilte Navne, nemlig:

en, to, tre, fire, fem, sex, syv, otte, ni, ti.

De ni første Tal kaldes Enere. Det sidste Tal kaldes ogsaa en Tier og betragtes som en Enhed af en ny, høiere Orden, og man tæller med denne Enhed med de samme Talord som med den første saaledes:

en Tier, to Tiere, tre Tiere, fire Tiere, fem Tiere, sex Tiere, syv Tiere, otte Tiere, ni Tiere, ti Tiere;

eller som de benævnes sammentrukne:

ti, tyve, treti, firti, femti, sexti, syvti, otti, niti.

Ti Tiere kaldes et Hundrede og betragtes som en Enhed af tredie Orden. Man tæller ogsaa med denne som med de foregaaende Ordener, men uden nogen Sammentrækning af Talordene. Det samme er Tilfældet med de høiere Ordener, hvoraf hver Enhed udgjør ti Enheder af den næst lavere Orden. Deres Enheder er: Tusinde, Titusinde, Hundredetusinde, Million, ti Millioner o. s. v.

Skal nu et Tal benævnes, saa nævner man først Antallet af dets Enheder af høieste Orden, derpaa af den næst høieste o. s. v. Ved de sammensatte Benævnelser Titusinde, Hundredetusinde, ti Millioner, hundrede Millioner o. s. v. nævnes samlet Antallet af Enheder af den i Sammensætningens sidste Del nævnte Art, f. Ex. saaledes: To Hundrede femti tre Tusinde. Ved Tallene mellem ti og et Hundrede nævnes Enerne først og Tierne sidst, f. Ex. saaledes: to og femti for femti to. Ved Tallene mellem ti og tyve benytter man en Sammentrækning, saa at disse kommer til at hedde:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| elleve | tolv | tretten | fjorten | femten |
| en og ti | to og ti | tre og ti | fire og ti | fem og ti |

| | | | |
|---|---|---|---|
| sexten | sytten | atten | nitten |
| sex og ti | syv og ti | otte og ti | ni og ti. |

Det her udviklede Princip benyttes ogsaa ved Tallenes Skrivning og gjør det mulig ved Hjælp af de ni Ziffre for Enerne:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| en | to | tre | fire | fem | sex | syv | otte | ni |

tilligemed det tiende Ziffer, 0, *Nul*, der betegner, at der ingen Enheder er af den Orden, Ziffret skal betegne, at betegne ethvert givet Tal. Man sætter nemlig først det Ziffer, der betegner Antallet af Tallets høieste Enheder, derpaa det Ziffer, der betegner Antallet af Tallets næsthøieste Enheder, o. s. v. Har Tallet ingen Enheder af en eller anden Orden, sættes paa den Plads, hvor denne Ordens Enheder skulde staa, Nul.

Idet man i Talrækken foran en sætter Nul, der indeholder en Enhed mindre end en, nemlig ingen Enhed, kommer altsaa ogsaa Nul til at høre med til Talrækken, og kaldes derfor et Tal.

For med Lethed at læse et Tal, der er skrevet med mange Ziffre, sætter man gjerne en noget større Plads mellem hvert tredie Ziffer fra Høire.

3. Foreningen af de Regler, man følger, for med Talord og Ziffre at udtrykke et Tal, kaldes et *Talsystem.* Det Tal, som angiver, hvormange Enheder af en lavere Orden der skal til for at danne en Enhed af den næsthøiere, kaldes Systemets *Grundtal.* Det her udviklede Talsystem, hvis Grundtal er ti, kaldes *Titalsystemet* eller *det dekadiske Talsystem.*

# Første Kapitel.

## Addition og Subtraktion.

### I. Addition.

### § 4.

Begrebsbestemmelser ved Addition.

1. *Ved til et givet Tal at addere et andet forstaar man fra det første at tælle saa mange Pladse frem i Talrækken, som det andet indeholder Enheder.* Det Tal, man da kommer til, kaldes *Summen* af de to givne Tal og betegnes ved at sætte +, *plus*, mellem dem. $a + b$ betegner altsaa det Tal, man kommer til, naar man fra a tæller b Pladse frem i Talrækken. Er dette Tal c, saa betegner altsaa $a + b$ og c det samme, nemlig det $b^{\text{ende}}$ Tal fra a. Altsaa:

$$a + b = c.$$

De Tal, som skal adderes sammen, kaldes *adderende Led* eller *Addender.*

2. Naar flere Tal skal adderes, forbindes de to første Tal først, den derved erholdte Sum med det tredie o. s. v., dog saaledes, at dersom der staar en Parenthes, forbindes de Tal, der staar indenfor denne, med hinanden først, førend de forbindes med de udenfor staaende. Staar Parenthesen om de første Tal, saa er det altsaa ligegyldig, om den staar eller ei, da de bliver at forbinde først, hvad enten Parenthesen staar eller ei.

3. *Naar man til lige store Tal adderer lige meget, bliver Summerne lige store.*

$$\text{Bet.}\quad \begin{array}{l} a = b \\ \underline{c = d} \end{array}$$

$$\text{Sats:}\quad \underline{\underline{a + c = b + d.}}$$

I Ligningen: $a + c = a + c$

kan man nemlig i andet Led for a sætte det lige store Tal b og for c d, saa faar man:

$$a + c = b + d.$$

## § 5.

### Additionslærens Fundamentalsætning.

*Naar man adderer et Tal til første Addend, bliver derved samme Tal adderet til Summen.*

$$\underline{a + b = a + b}$$

$$\text{Sats:}\quad \underline{\underline{(a + k) + b = a + b + k.}}$$

Da $a + k$ staar k Pladse længer frem i Talrækken end a, maa man komme k Pladse længer, naar man tæller b Pladse fremad fra $a + k$, end naar man tæller b Pladse fremad fra a. Tæller man b Pladse fremad fra a, kommer man til $a + b$; tæller man b Pladse fremad fra $a + k$, saa kommer man altsaa k Pladse udenfor $a + b$, altsaa til $a + b + k$. Altsaa:

$$(a + k) + b = a + b + k.$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar man skal addere et Tal til en Sum, kan man addere det til første Addend og beholde anden uforandret.*

## § 6.

### Afledede Sætninger i Additionslæren.

1. *Naar man forandrer Addendernes Orden, har dette ingen Indflydelse paa Summens Værdi.*

Har man kun to Addender, bliver:

Sats: $\underline{\underline{a + b = b + a.}}$

Ifølge § 5 er: $(x + a) + b = (x + b) + a.$

Sættes her $x = 0$

faar man: $(0 + a) + b = (0 + b) + a$

eller: $a + b = b + a.$

Heraf følger igjen, at Summen af et hvilketsomhelst Antal Addender bliver den samme, i hvilken Orden man adderer dem. Saaledes er:

$$\begin{aligned} a + b + c &= b + a + c \\ &= b + c + a \quad (\S\, 5) \\ &= c + b + a \\ &= c + a + b \quad (\S\, 5) \\ &= a + c + b. \end{aligned}$$

Paa Grund af denne Sætning bliver det ligegyldig, til hvilken af Addenderne man adderer et Tal i Sætningen i § 5.

2. *Naar begge Addender er Summer, kan man finde Summen ved til hvert adderende Led i første Addend at addere det tilsvarende Led i anden Addend, og derpaa addere de udkomne Summer.*

Sats:

$$\underline{\underline{(a+b+c)+(d+e+f)=(a+d)+(b+e)+(c+f)}}$$

$$\underline{a+d=a+d}$$

$$\underline{(a+b)+d=(a+d)+b}$$

$$\begin{aligned}(a+b)+(d+e)&=(a+d)+b+e\\&=(a+d)+(b+e)\end{aligned}$$

$$\underline{(a+b+c)+(d+e)=(a+d)+(b+e)+c}$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)+(d+e+f)&=(a+d)+(b+e)+c+f\\&=(a+d)+(b+e)+(c+f).\end{aligned}$$

3. *Naar man til det største af to Tal adderer lige saa meget som til det mindste, saa bliver Summen størst, hvor den ene Addend er størst.*

Bet. $a > b$

$\underline{c = d}$

Sats: $\underline{\underline{a+c > b+d}}$

Da $a > b$, kan man sætte: $a = b + x$

$\underline{c = d}$

$$\underline{a+c=(b+x)+d=(b+d)+x}$$

$$a+c > b+d.$$

4. *Naar man til det største af to Tal adderer mere end til det mindste, bliver Summen størst, hvor begge Addender er størst.*

Bet. $a > b$

$\underline{c > d}$

Sats: $\underline{\underline{a+c > b+d}}$

| | |
|---|---|
| $a > b$ | $b = b$ |
| $\underline{c = c}$ | $\underline{c > d}$ |
| $a+c > b+c$ | $b+c > b+d$ |

$$a+c > b+d.$$

## II. Subtraktion.

### § 7.

Begrebsbestemmelser ved Subtraktion.

1. *At subtrahere et Tal fra et andet er at finde et tredie saa stort, at naar det førstnævnte adderes til det, bliver Summen lig det sidstnævnte.* Subtraktion kan saaledes betragtes som det omvendte af Addition, idet Addition er at finde Summen, naar begge Addender er givne, Subtraktion er at finde den ene Addend, naar Summen og den anden Addend er givne. Det sidstnævnte Tal, altsaa Summen, kaldes *Minuend;* det førstnævnte, altsaa den givne Addend, kaldes *Subtraktor*, og det søgte Tal, altsaa den anden Addend, kaldes *Differents.* Differentsen mellem to Tal betegnes ved at sætte Tegnet —, *minus*, mellem dem saaledes, at Minuenden staar foran og Subtraktor efter Tegnet. $a - b$ betegner altsaa et Tal, der, naar b adderes til det, bliver lig a, eller:

$$a - b + b = a.$$

Denne Ligning, der egentlig kun er Difinitionen paa Subtraktion sat i mathematisk Form, kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar man fra et Tal først subtraherer et andet og derpaa adderer det samme Tal til igjen, faar man det oprindelige Tal ud.*

Omvendt kan man ogsaa bevise, at:

*Naar man til et Tal først adderer et andet og derpaa subtraherer det samme fra igjen, faar man det oprindelige Tal ud.*

Sats: $\underline{\underline{a + b - b = a}}$

Fra $a + b$ at subtrahere b er nemlig at finde det Tal, hvortil b maa adderes for at give $a + b$, hvilket er a, eller:

$$a + b - b = a.$$

Ifølge Difinitionen paa Subtraktion kan man bevise Rigtigheden af en Differents ved at addere Subtraktor til den og paavise, at Summen er lig Minuenden. Dette kaldes *at gjøre Prøve paa Differentsen.*

2. Naar flere Tal skal forbindes dels ved Addition og dels ved Subtraktion, gjælder den samme Regel, som i § 4 No. 2 er anført om Addition alene. Ligesaa gjælder, hvad der sammesteds er anført om Parentheser.

3. *Naar man fra lige store Minuender subtraherer lige store Subtraktorer, bliver Differentserne lige.*

$$\text{Bet.}\quad a = b$$
$$c = d$$

$$\text{Sats:}\quad \underline{\underline{a - c = b - d}}$$

I Ligningen: $a - c = a - c$

kan man nemlig i andet Led for a sætte b og for c d, saa faar man:

$$a - c = b - d.$$

## § 8.

### Subtraktionslærens Fundamentalsætninger.

1. *Naar man adderer et Tal til Minuenden, bliver derved samme Tal adderet til Differentsen.*

$$\underline{a - b = a - b}$$

$$\text{Sats:}\quad \underline{\underline{(a + k) - b = a - b + k}}$$

Vi vil i denne § kalde Satsens Minuend m, dens Subtraktor s og dens Differents d. Man faar da:

$$\underline{d + s = a - b + k + b = a - b + b + k = a + k = m}$$

$$(a + k) - b = a - b + k$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar man skal subtrahere et Tal fra en Sum, kan man subtrahere det fra en af Addenderne og beholde den anden uforandret.*

2. *Naar man adderer et Tal til Subtraktor, bliver derved samme Tal subtraheret fra Differentsen.*

$$\underline{a - b = a - b}$$

Sats: $\underline{\underline{a - (b + k) = a - b - k}}$

$$\underline{d + s = a - b - k + (b + k) = a - b - k + k + b = a = m}$$

$$a - (b + k) = a - b - k$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar man fra et Tal først skal subtrahere et andet og fra det Udkomne et tredie, saa kan man fra Minuenden subtrahere Summen af begge Subtraktorer.*

## § 9.

### Afledede Sætninger i Subtraktionslæren.

1. *Naar man subtraherer et Tal fra Minuenden, bliver derved samme Tal subtraheret fra Differentsen.*

$$\underline{a - b = a - b}$$

Sats: $\underline{\underline{(a - k) - b = a - b - k}}$

$$\underline{(a - k) - b = (a - k) - b}$$

$$\underline{(a - k + k) - b = (a - k) - b + k} \quad (\S\ 8\ \text{No. } 1)$$

$$a - b = (a - k) - b + k$$

Subtraheres: $\underline{k = k}$

$$a - b - k = (a - k) - b$$

2. *Naar man fra Subtraktor subtraherer et Tal, bliver derved samme Tal adderet til Differentsen.*

$$\underline{a - b = a - b}$$

Sats: $\underline{\underline{a - (b - k) = a - b + k}}$

$$\underline{a - (b - k) = a - (b - k)}$$

$$\underline{a - (b - k + k) = a - (b - k) - k} \quad (\S\ 8 \text{ No. } 2)$$

$$a - b = a - (b - k) - k$$

Adderes: $\underline{k = k}$

$$a - b + k = a - (b - k)$$

3. *Naar man til Minuenden og Subtraktor adderer lige meget, eller naar man fra begge subtraherer lige meget, bliver Differentsen uforandret.*

$$\underline{a - b = a - b}$$

Sats: $(a + k) - (b + k) = a - b$
$\underline{\underline{(a - k) - (b - k) = a - b}}$

$$\underline{a - b = a - b}$$

$$\underline{(a + k) - b = a - b + k}$$

$$(a + k) - (b + k) = a - b + k - k = a - b$$

$$\underline{a - b = a - b}$$

$$\underline{(a - k) - b = a - b - k}$$

$$(a - k) - (b - k) = a - b - k + k = a - b$$

4. *Naar baade Minuenden og Subtraktor er Summer, saa kan man finde Differentsen ved fra hver Addend i Minuenden at subtrahere den tilsvarende Addend i Subtraktor, og derpaa addere de udkomne Differentser.*

Sats:
$$\underline{\underline{(a + b + c) - (d + e + f) = (a - d) + (b - e) + (c - f)}}$$

$$\underline{a - d = a - d}$$

$$\underline{(a + b) - d = (a - d) + b}$$

$$(a + b) - (d + e) = (a - d) + b - e$$
$$= (a - d) + (b - e) \text{ (§ 8 No. 1)}$$

$$(a + b + c) - (d + e) = (a - d) + (b - e) + c$$

$$(a + b + c) - (d + e + f) = (a - d) + (b - e) + (c - f)$$
$$\text{(§ 8 No. 1).}$$

5. *Naar man fra det største af to Tal subtraherer ligesaa meget som fra det mindste, bliver Differentsen størst, hvor Minuenden er størst.*

$$\begin{aligned} \text{Bet.}\quad & a > b \\ & c = d \\ \text{Sats:}\quad & a - c > b - d \end{aligned}$$

Da $a > b$, kan man sætte: $a = b + x$

$$c = d$$

$$a - c = (b + x) - d = (b - d) + x$$

$$a - c > b - d$$

6. *Naar man fra det ene af to lige store Tal subtraherer mere end fra det andet, bliver Differentsen størst, hvor Subtraktor er mindst.*

$$\begin{aligned} \text{Bet.}\quad & a = b \\ & c > d \\ \text{Sats:}\quad & a - c < b - d \end{aligned}$$

Da $c > d$, kan man sætte: $c = d + x$

$$a = b$$

$$a - c = b - (d + x) = b - d - x$$

$$a - c < b - d$$

7. *Naar man fra det største af to Tal subtraherer mindre end fra det mindste, bliver Differentsen størst, hvor Minuenden er størst og Subtraktor mindst.*

$$\begin{array}{rl}\text{Bet.} & a > b \\ & \underline{c < d} \\ \text{Sats:} & \underline{\underline{a - c > b - d}}\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a > b & & b = b \\ \underline{c = c} & & \underline{c < d} \\ a - c > b - c & & b - c > b - d \\ \hline & a - c > b - d. & \end{array}$$

# Andet Kapitel.

## Multiplikation og Division.

### I. Multiplikation.

### § 10.

Begrebsbestemmelser ved Multiplikation.

1. *Ved at multiplicere et Tal med et andet forstaar man at sætte det første som Addend saa mange Gange, som det andet indeholder Enheder.* Det første Tal, der sættes som Addend, kaldes *Multiplikand;* det andet, der angiver, hvor mange Gange Multiplikanden skal sættes som Addend, kaldes *Multiplikator*, og det søgte Tal, altsaa Summen, kaldes *Produkt.* Multiplikand og Multiplikator kaldes ogsaa med et fælles Navn *Faktorer.* Naar den ene Faktor i en eller anden Henseende karakteriserer Produktet, kaldes ogsaa ofte den anden Faktor dennes *Koefficient.* Produkter, hvori den karakteristiske Faktor er den samme, kaldes *ensartede.* Produktet af to Tal betegnes ved at sætte Tegnet $\times$ eller et Punkt eller slet intet mellem dem saaledes, at Multiplikanden staar foran, Multiplikator efter Tegnet. Man har altsaa:

$$ab = a \, . \, b = a \times b = a + a + a + a \ldots b \text{ Gange.}$$

Udtrykket ab udtales a Gange b.

2. *Naar to lige store Tal multipliceres med lige meget, bliver Produkterne lige store.*

$$\text{Bet.} \quad a = b$$
$$c = d$$
$$\text{Sats:} \quad \underline{\underline{ac = bd}}$$

I Ligningen: $ac = ac$

kan man i andet Led for a sætte b og for c d, saa faar man:

$$ac = bd.$$

## § 11.

### Multiplikationslærens Fundamentalsætninger.

1. *Naar man adderer et Tal til Multiplikanden, bliver derved til Produktet adderet Produktet af dette Tal og Multiplikator.*

$$\underline{ab = ab}$$
$$\text{Sats:} \quad \underline{\underline{(a + k)b = ab + kb}}$$

$$(a + k)b = (a + k) + (a + k) + \ldots b \text{ Gange}$$
$$= (a + a + \ldots b \text{ Gange}) + (k + k + \ldots b \text{ Gange})$$
(§ 6 No. 2)
$$= ab + kb$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar en Sum skal multipliceres med et Tal, kan man multiplicere hver af Addenderne med Tallet og addere de udkomne Produkter.*

2. *Naar man multiplicerer Multiplikanden med et Tal, bliver derved Produktet multipliceret med samme Tal.*

$$ab = ab$$

Sats: $(ak)b = (ab)k$

$$\begin{aligned}(ak)\,b &= ak + ak + \ldots b \text{ Gange}\\ &= (a + a + \ldots b \text{ Gange})\,k \text{ (No. 1)}\\ &= (ab)k\end{aligned}$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar et Produkt skal multipliceres med et Tal, kan man multiplicere den ene Faktor med Tallet og beholde den anden uforandret.*

## § 12.

### Afledede Sætninger i Multiplikationslæren.

1. *Naar man forandrer Faktorernes Orden, har dette ingen Indflydelse paa Produktets Værdi.*

Har man kun to Faktorer, bliver:

Sats: $ab = ba$

Ifølge § 11 Nr. 2 er: $(xa)b = (xb)a$

Sættes her: $x = 1$

bliver: $(1\,.\,a)b = (1\,.\,b)a$

eller: $ab = ba$

Heraf følger igjen, at Produktet af et hvilketsomhelst Antal Faktorer er det samme, i hvilken Orden man multiplicerer dem. Saaledes er:

$$\begin{aligned}abc &= bac\\ &= bca \text{ (§ 11 No. 2)}\\ &= cba\\ &= cab \text{ (§ 11 No. 2)}\\ &= acb\end{aligned}$$

Paa Grund af denne Sætning bliver det i Sætningerne i § 11 ligegyldig, hvilken af Faktorerne er en Sum eller et Produkt.

2. *Naar man subtraherer et Tal fra en af Faktorerne, bliver derved fra Produktet subtraheret Produktet af dette Tal og den anden Faktor.*

$$\begin{array}{lrcl} & ab & = & ab \\ \text{Sats:} & \underline{(a-k)b} & = & \underline{ab-kb} \\ & (a-k)b & = & (a-k)b \\ & (a-k+k)b & = & (a-k)b+kb \quad (\S\ 11\ \text{No. } 1) \\ & ab & = & (a-k)b+kb \\ \text{Subtraheres:} & kb & = & kb \\ & ab-kb & = & (a-k)b \end{array}$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar man skal multiplicere en Differents med et Tal, kan man multiplicere Minuenden og Subtraktor med Tallet og subtrahere de udkomne Produkter.*

3. *Naar begge Faktorer er Summer, er Produktet lig Summen af de Produkter, som fremkommer, naar hver Addend i den ene Faktor multipliceres med hver Addend i den anden Faktor.*

$$\text{Sats:}\quad (a+b+c)(d+e+f) = ad+ae+af+bd+be+bf+cd+ce+cf$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)(d+e+f) &= a(d+e+f)+b(d+e+f)+c(d+e+f)\\ &= ad+ae+af+bd+be+bf+cd+ce+cf\end{aligned}$$

4. *Naar begge Faktorer er Differentser, er Produktet lig Produktet af begge Minuender minus Produktet af første Faktors Minuend og anden Faktors Subtraktor minus Produktet af første Faktors Subtraktor og anden Faktors Minuend plus Produktet af begge Subtraktorer.*

$$\text{Sats:}\quad (a-b)(c-d) = ac-ad-bc+bd$$

$$\begin{aligned}(a-b)(c-d) &= a(c-d)-b(c-d) \quad (\text{No. } 2)\\ &= (ac-ad)-(bc-bd) \quad (\text{No. } 2)\\ &= ac-ad-bc+bd \quad (\S\,9\ \text{No. } 2)\end{aligned}$$

5. *Naar begge Faktorer er Produkter, kan man finde Produktet ved at multiplicere hver Faktor i Multiplikanden med den tilsvarende Faktor i Multiplikator.*

Sats: $\underline{\underline{(abc)(def) = (ad)(be)(cf)}}$

$$\underline{ad = ad}$$

$$\underline{(ab)d = (ad)b}$$

$$\underline{(ab)(de) = (ad)b.e = (ad)(be)}$$

$$\underline{(abc)(de) = (ad)(be)c}$$

$$(abc)(def) = (ad)(be)c.f = (ad)(be)(cf)$$

6. *Naar det største af to Tal multipliceres med lige saa meget som det mindste, bliver Produktet størst, hvor den ene Faktor er størst.*

Bet. $a > b$

$\underline{c = d}$

Sats: $\underline{\underline{ac > bd}}$

Da $a > b$, kan man sætte: $a = b + x$

$$\underline{c = d}$$

$$\underline{ac = (b + x)d = bd + xd}$$

$$ac > bd$$

7. *Naar det største af to Tal multipliceres med mere end det mindste, saa bliver Produktet størst, hvor begge Faktorer er størst.*

Bet. $a > b$

$\underline{c > d}$

Sats: $\underline{\underline{ac > bd}}$

$$a > b \qquad b = b$$

$$\underline{c = c} \qquad \underline{c > d}$$

$$\underline{ac > bc \qquad bc > bd}$$

$$ac > bd$$

## II. Division.

### § 13.

Begrebsbestemmelser ved Division.

1. *Ved at dividere et Tal med et andet forstaar man at finde et tredie, der, multipliceret med det sidstnævnte, giver et Produkt lig det førstnævnte.* Division kan saaledes betragtes som det omvendte af Multiplikation, idet Multiplikation er at finde Produktet, naar begge Faktorer er givne; Division er at finde den ene Faktor, naar Produktet og den anden Faktor er givne. Det førstnævnte Tal, altsaa Produktet, kaldes *Dividend;* det sidstnævnte, altsaa den bekjendte Faktor, kaldes *Kvotient.* Istedetfor at dividere Dividenden med Divisor siges ogaaa *at dividere Divisor i Dividenden.* Kvotienten mellem to Tal betegnes ved at sætte Tegnet : mellem dem saaledes, at Dividenden staar foran, Divisor efter Tegnet. a : b betegner altsaa et Tal, som multipliceret med Divisor, b, giver et Produkt lig Dividenden, a.

$$(a : b)b = a.$$

Denne Ligning, der altsaa er den mathematiske Form for Definitionen paa Division, kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar et Tal først ivideres med et andet, og derpaa multipliceres med det samme, faar man det oprindelige Tal ud.*

Omvendt kan man ogsaa bevise, at:

*Naar et Tal først multipliceres med et andet, og derpaa divideres med det samme, faar man det oprindelige Tal ud.*

Sats: $\underline{\underline{ab : b = a}}$

At dividere ab med b er nemlig at finde et Tal, som multipliceret med b giver ab, hvilket maa være a; altsaa:

$$ab : b = a$$

Ifølge Definitionen paa Division kan man bevise Rigtigheden af en Kvotient ved at multiplicere den med Divisor og paavise, at Produktet bliver lig Dividenden. Dette kaldes *at gjøre Prøve paa Kvotienten.*

2. *Naar to lige store Tal divideres med lige meget, bliver Kvotienterne lige store.*

$$\text{Bet.}\quad a = b$$
$$\underline{c = d}$$
$$\text{Sats:}\quad \underline{\underline{a : c = b : d}}$$

I Ligningen: $a : c = a : c$

kan man nemlig i andet Led for a sætte b og for c d, saa faar man: $a : c = b : d$.

## § 14.

### Divisionslærens Fundamentalsætninger.

1. *Naar man adderer et Tal til Dividenden, bliver derved til Kvotienten adderet Kvotienten mellem dette Tal og Divisor.* $\underline{a : b = a : b}$

$$\text{Sats:}\quad \underline{\underline{(a + k) : b = a : b + k : b}}$$

Vi vil i denne § kalde Satsens Dividend D, dens Divisor d og dens Kvotiens K. Man faar da:

$$\underline{Kd = (a : b + k : b)b = a : b \,.\, b + k : b \,.\, b = a + k = D}$$
$$(a + k) : b = a : b + k : b$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar man skal dividere en Sum med et Tal, kan man dividere hver af Addenderne med Tallet og addere de udkomne Kvotienter.*

2. *Naar man multiplicerer Dividenden med et Tal, bliver derved Kvotienten multipliceret med samme Tal.*

$$\underline{a : b = a : b}$$
$$\text{Sats:}\quad \underline{\underline{ak : b = (a : b)k}}$$
$$\underline{Kd = (a : b)k \,.\, b = (a : b)b \,.\, k = ak = D}$$
$$ak : b = (a : b)k$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar et Produkt skal divideres med et Tal, kan man dividere den ene Faktor med Tallet og beholde den anden uforandret.*

3. *Naar man multiplicerer Divisor med et Tal, bliver Kvotienten divideret med samme Tal.*

$$\underline{a : b = a : b}$$

$$\underline{\underline{b : bk = a : b : k}}$$

$$\underline{Kd = a : b : k \,.\, bk = a : b : k \,.\, k \,.\, b = a = D}$$

$$a : bk = a : b : k$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar et Tal først skal divideres med et andet, derpaa det Udkomne med et tredie, kan man dividere Tallet med Produktet af begge Divisorer.*

## § 15.

### Afledede Sætninger i Divisionslæren.

1. *Naar man subtraherer et Tal fra Dividenden, bliver derved fra Kvotienten subtraheret Kvotienten mellem dette Tal og Divisor.*

$$\underline{a : b = a : b}$$

$$\text{Sats: } \underline{\underline{(a - k) : b = a : b - k : b}}$$

$$\underline{(a - k) : b = (a - k) : b}$$

$$\underline{(a - k + k) : b = (a - k) : b + k : b} \text{ (§ 14 No. 1)}$$

$$a : b = (a - k) : b + k : b$$

$$\text{Subtraheres: } \underline{k : b = k : b}$$

$$a : b - k : b = (a - k) : b$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar man skal dividere en Differents med et Tal, kan man dividere Minuenden og Subtraktor med Tallet og subtrahere Kvotienterne.*

2. *Naar man dividerer Dividenden med et Tal, bliver derved Kvotienten divideret med samme Tal.*

$$a : b = a : b$$

Sats: $(a : k) : b = a : b : k$

$$(a : k) : b = (a : k) : b$$

$$(a : k \,.\, k) : b = (a : k) : b \,.\, k \quad (\text{§ 14 No. 2})$$

$$a : b = (a : k) : b \,.\, k$$

Divideres med: $k = k$

$$a : b : k = (a : k) : b$$

3. *Naar man dividerer Divisor med et Tal, bliver derved Kvotienten multipliceret med samme Tal.*

$$a : b = a : b$$

Sats: $a : (b : k) = a : b \,.\, k$

$$a : (b : k) = a : (b : k)$$

$$a : (b : k \,.\, k) = a : (b : k) : k \quad (\text{§ 14 No. 3})$$

$$a : b = a : (b : k) : k$$

Multipliceres med: $k = k$

$$a : b \,.\, k = a : (b : k)$$

4. *Naar Dividenden og Divisor multipliceres eller divideres med samme Tal, bliver Kvotienten uforandret.*

Sats: $ak : bk = a : b$

og $(a : k) : (b : k) = a : b$

$$a : b = a : b$$

$$ak : b = a : b \,.\, k$$

$$ak : bk = a : b \,.\, k : k = a : b$$

$$a : b = a : b$$

$$(a : k) : b = (a : b) : k$$

$$(a : k) : (b : k) = (a : b) : k \,.\, k = a : b$$

5. *Naar baade Dividenden og Divisor er Produkter, kan man finde Kvotienten ved at dividere hver Faktor i Dividenden med den tilsvarende Faktor i Divisor og multiplicere de udkomne Kvotienter.*

$$\text{Sats:}\quad \underline{abc : def = (a : d)(b : e)(c : f)}$$

$$\underline{a : d = a : d}$$

$$\underline{ab : d = (a : d)b}$$

$$\underline{ab : de = (a : d)b : e = (a : d)(b : e)}$$

$$\underline{abc : de = (a : d)(b : e)c}$$

$$abc : def = (a : d)(b : e)c : f =$$
$$(a : d)(b : e)(c : f)$$

6. *Naar det største af to Tal divideres med lige saa meget som det mindste, bliver Kvotienten størst, hvor Dividenden er størst:*

$$\text{Bet.}\quad a > b$$
$$\underline{c = d}$$

$$\text{Sats:}\quad \underline{a : c > b : d}$$

Da $a > b$, kan man sætte: $a = b + x$

$$\underline{c = d}$$

$$\underline{a : c = (b + x) : d = b : d + x : d}$$

$$a : c > b : d$$

7. *Naar det ene af to lige store Tal divideres med mere end det andet, bliver Kvotienten størst, hvor Divisor er mindst.*

$$\text{Bet.}\quad a = b$$
$$\underline{c > d}$$

$$\underline{a : c < b : d}$$

$$a : c = ad : cd$$
$$b : d = bc : cd$$

Nu er:

$$a = b$$
$$\underline{d < c}$$
$$ad < bc$$
$$\underline{cd = cd}$$
$$\underline{ad : cd < bc : cd}$$
$$a : c < b : d$$

8. *Naar det største af to Tal divideres med mindre end det mindste, bliver Kvotienten størst, hvor Dividenden er størst og Divisor mindst.*

$$\begin{array}{rl} \text{Bet.} & a > b \\ & \underline{c < d} \\ \text{Sats:} & \underline{\underline{a : c > b : d}} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} a > b & b = b \\ \underline{c = c} & \underline{c < d} \\ \underline{a : c > b : c} & \underline{b : c > b : d} \end{array}$$

$$a : c > b : d.$$

# Tredie Kapitel.

## Potentser og Rødder.

### I. Potentser.

### § 16.

Begrebsbestemmelser ved Potentser.

1. *Ved at ophøie et Tal til en Potents eller potentsere det forstaar man at sætte det som Faktor saa mange Gange, som et givet Tal indeholder Enheder.* Det Tal, der sættes som Faktor, kaldes *Rod;* det Tal, der angiver Antallet af Faktorer, kaldes *Exponent;* Produktet kaldes *Potents.* En Potents betegnes ved over Roden til Høire at sætte Exponenten. Man har altsaa:

$$a^n = aaa \ldots n \text{ Gange}.$$

Anden Potents af et Tal kaldes ogsaa Tallets *Kvadrat,* og tredie Potents dets *Kubus.* Istedetfor at ophøie Roden til Potentsen siges ogsaa *at ophøie Roden til Exponenten;* dog maa dette Udtryk undgaaes, hvor Tvetydighed kan opstaa.

2. *Naar to lige store Tal ophøies til lige store Exponenter, bliver Potentserne lige store.*

$$\text{Bet.}\quad a = b$$
$$\underline{n = p}$$
$$\text{Sats:}\quad \underline{\underline{a^n = b^p}}$$

I Ligningen: $a^n = a^n$

kan man nemlig i andet Led for a sætte b og for n p, saa faar man:

$$a^n = b^p.$$

## § 17.

### Potentslærens Fundamentalsætninger.

1. *Naar man multiplicerer Roden med et Tal, bliver derved Potentsen multipliceret med dette Tal ophøiet til Exponenten.*

$$\underline{a^n = a^n}$$
$$\text{Sats:}\quad \underline{\underline{(ak)^n = a^n k^n}}$$

$$\begin{aligned} (ak)^n &= ak \,.\, ak \,.\, ak \ldots \text{n Gange} \\ &= aaa \ldots \text{n Gange} \,.\, kkk \ldots \text{n Gange} \\ &= n^n\, k^n \end{aligned}$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar man skal ophøie et Produkt til en Exponent, kan man ophøie hver af Faktorerne til Exponenten og multiplicere de udkomne Potentser.*

2. *Naar man adderer et Tal til Exponenten, bliver derved Potentsen multipliceret med Roden ophøiet til dette Tal.*

$$\underline{a^n = a^n}$$
$$\text{Sats:}\quad \underline{\underline{a^{n+k} = a^n a^k}}$$

$$a^{n+k} = aaa \ldots (n+k) \text{ Gange}$$
$$= aaa \ldots n \text{ Gange} . aaa \ldots k \text{ Gange}$$
$$= a^n a^k$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar man skal multiplicere to Potentser med samme Rod, kan man ophøie Roden til Summen af Exponenterne.*

3. *Naar Exponenten multipliceres med et Tal, bliver derved Potentsen ophöiet til dette Tal.*

$$\underline{a^n = a^n}$$
$$\text{Sats: } \underline{\underline{a^{nk} = (a^n)^k}}$$
$$a^{nk} = a^{n+n+n+\ldots k \text{ Gange}}$$
$$= a^n . a^n . a^n \ldots k \text{ Gange}$$
$$= (a^n)^k$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar en Potents skal ophøies til en Potents, kan man ophøie Roden til Produktet af Exponenterne.*

## § 18.

### Afledede Sætninger i Potentslæren.

1. *Naar en Potents skal ophøies til en Potents, er Exponenternes Orden ligegyldig.*

$$\text{Sats: } \underline{\underline{(a^n)^p = (a^p)^n}}$$

Begge Udtryk er nemlig lig $a^{np}$.

2. *Naar man dividerer Roden med et Tal, bliver derved Potentsen divideret med dette Tal ophøiet til Exponenten.*

$$\underline{a^n = a^n}$$
$$\text{Sats: } \underline{\underline{(a:k)^n = a^n : k^n}}$$
$$\underline{(a:k)^n = (a:k)^n}$$
$$\underline{(a:k . k)^n = (a:k)^n k^n}$$
$$a^n = (a:k)^n k^n$$

Divideres med $\quad k^n = k^n$

$$a^n : k^n = (a:k)^n$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar man skal ophøie en Kvotient til en Potents, kan man ophøie Dividenden og Divisor til Exponenten og dividere de udkomne Potentser.*

3. *Naar man subtraherer et Tal fra Exponenten, bliver derved Potentsen divideret med Roden ophøiet til dette Tal.*

$$a^n = a^n$$

Sats: $a^{n-k} = a^n : a^k$

$$a^{n-k} = a^{n-k}$$

$$a^{n-k+k} = a^{n-k} . a^k$$

$$a^n = a^{n-k} . a^k$$

Divideres med $\quad a^k = a^k$

$$a^n : a^k = a^{n-k}$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar man skal dividere to Potentser med samme Rod, kan man ophøie Roden til Differentsen mellem Exponenterne.*

4. *Naar det største af to Tal ophøies til samme Exponent som det mindste, bliver Potentsen størst, hvor Roden er størst.*

Bet. $a > b$

Sats: $a^n > b^n$

$$a > b$$

$$a > b$$

$$a^2 > b^2$$

$$a > b$$

$$a^3 > b^3$$

Fortsætter man saaledes, saa faar man for en hvilkensomhelst Værd af n:

$$a^n > b^n.$$

## II. Rødder.

### § 19.

### Begrebsbestemmelser ved Rødder.

1. *Ved at uddrage en Rod af et Tal forstaar man at finde et Tal, som ophøiet til en given Exponent bliver lig en given Potents.* Roduddragning bliver saaledes at betragte som det Omvendte af Potentseren, idet Potentseren er at finde Potentsen, naar Roden og Exponenten er givne; Roduddragning er at finde Roden, naar Potentsen og Exponenten er givne. Det Tal, hvoraf Roden skal uddrages, kaldes *Potents;* Exponenten kaldes her ofte *Rodexponent* i Modsætning til *Potentsexponent*, som den ofte kaldes ved Potentseren. Det søgte Tal kaldes *Roden* og betegnes ved at sætte Tegnet $\sqrt{\ }$, der kaldes *Rodtegn*, foran og over Potentsen; i Aabningen af Rodtegnet sættes Rodexponenten. Saaledes betegner $\sqrt[n]{a}$, der udtales *n^te Rod af a*, et Tal, som ophøiet til n^te Potents giver a, eller:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Denne Ligning, der altsaa er Difinitionen af en Rod i mathematisk Form, kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar man af et Tal først uddrager en Rod og derpaa ophøier det Udkomne til samme Exponent, faar man det oprindelige Tal ud.*

Omvendt kan man ogsaa bevise, at:

*Naar man først ophøier et Tal til en Potents og* *derpaa uddrager samme Rod deraf, faar man det oprindelige Tal ud.*

Sats: $\sqrt[n]{a^n} = a.$

$\sqrt[n]{a^n}$ betegner nemlig et Tal, som ophøiet til $n^{te}$ Potents giver $a^n$; dette Tal er a, eller:

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Anden Rod af et Tal kaldes ogsaa *Kvadratrod* og betegnes ved at sætte Rodtegnet uden Exponent: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$. Tredie Rod kaldes ogsaa *Kubikrod.*

Ifølge Definitionen paa Roduddragning kan man bevise Rigtigheden af en Rod ved at ophøie den til Exponenten og paavise, at det Udkomne er lig Potentsen. Dette kaldes *at gjøre Prøve* paa den.

2. *Naar man af to lige store Tal uddrager Rødder med lige store Exponenter, bliver Rødderne lige store.*

Bet. $a = b$

$n = p$

Sats: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[p]{b}.$

I Ligningen: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$

kan man i andet Led for a sætte b og for n p, saa faar man:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[p]{b}.$$

## § 20.

### Rodlærens Fundamentalsætninger.

1. *Naar man multiplicerer Potentsen med et Tal, bliver derved Roden multipliceret med den ved Exponenten bestemte Rod af dette Tal.*

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$$

Sats: $\sqrt[n]{ak} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{k}$.

Vi vil i denne § kalde Satsens Rod r, dens Potents p og dens Exponent e. Man faar da:

$$r^e = (\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{k})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{k})^n = ak = p$$

$$\sqrt[n]{ak} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{k}.$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar man skal uddrage en Rod af et Produkt, kan man uddrage Roden af hver af Faktorerne og multiplicere de udkomne Rødder.*

2. *Naar man ophøier Potentsen til en Potents, bliver derved Roden ophøiet til samme Potents.*

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$$

Sats: $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$

$$r^e = [(\sqrt[n]{a})^k]^n = [(\sqrt[n]{a})^n]^k = a^k = p$$

$$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k.$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar et Tal skal ophøies til en Potents, og der deraf skal uddrages en Rod, saa er det ligegyldig, i hvilken Orden Regningen foregaar.*

3. *Naar Rodexponenten multipliceres med et Tal, bliver derved af Roden uddraget en Rod, hvis Exponent er dette Tal.*

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$$

Sats: $\sqrt[nk]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$

$$\frac{r^e = \left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^k\right]^n = a = p}{\sqrt[nk]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}}$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar man af et Tal skal uddrage en Rod, hvis Exponent er et Produkt, kan man af Tallet først uddrage den Rod, hvis Exponent er den ene Faktor, og af det Udkomne den Rod, hvis Exponent er den anden Faktor.*

## § 21.

### Afledede Sætninger i Rodlæren.

1. *Naar man dividerer Potentsen med et Tal, bliver derved Roden divideret med den ved Exponenten bestemte Rod af dette Tal.*

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$$

Sats: $\sqrt[n]{a : k} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{k}$

$$\sqrt[n]{a : k} = \sqrt[n]{a : k}$$

$$\sqrt[n]{a : k \cdot k} = \sqrt[n]{a : k}\sqrt[n]{k} \quad (\S\ 20\ \text{No. } 1)$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a : k}\sqrt[n]{k}$$

Divideres med $\sqrt[n]{k} = \sqrt[n]{k}$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{k} = \sqrt[n]{a : k}.$$

Denne Sætning kan ogsaa udtales saaledes:

*Naar man skal uddrage en Rod af en Kvotient, kan man uddrage Roden af Dividenden og Divisor og dividere de udkomne Rødder.*

2. *Et Udtryks Værdi bliver uforandret, naar Rod-*

*exponenten og Potentsexponenten multipliceres med samme Tal.*

$$\sqrt[n]{a^t} = \sqrt[n]{a^t}$$

$$\sqrt[nk]{a^{tk}} = \sqrt[n]{a^t}$$

$$\sqrt[nk]{a^{tk}} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{tk}}} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{(a^t)^k}} = \sqrt[k]{(\sqrt[n]{a^t})^k} = \sqrt[n]{a^t}$$

3. *Et Udtryks Værdi bliver uforandret, naar Rodexponenten og Potentsexponenten divîderes med samme Tal.*

$$\sqrt[n]{a^t} = \sqrt[n]{a^t}$$

Sats: $$\sqrt[n:k]{a^{t:k}} = \sqrt[n]{a^t}$$

$$\sqrt[n:k]{a^{t:k}} = \sqrt[n:k.k]{a^{t:k.k}} = \sqrt[n]{a^t}$$

4. *Naar man af det største af to Tal uddrager samme Rod som af det mindste, bliver Roden størst, hvor Potentsen er størst.*

Bet. $a > b$

Sats: $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$

Dersom ikke $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, saa var:

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ eller $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

$(\sqrt[n]{a})^n = (\sqrt[n]{b})^n$ $\qquad$ $(\sqrt[n]{a})^n < (\sqrt[n]{b})^n$

$a = b$ $\qquad$ $a < b.$

Begge Dele strider mod Betingelsen. Altsaa:

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

# Tillæg til første Afsnit.

## Om Tals Sammensætning.

### § 22.

Om fuldstændige og ufuldstændige Kvotienter.

1. Naar man skal dividere et Tal med et andet, hænder det ofte, at man ikke kan finde noget Tal i Talrækken, som ved at multipliceres med Divisor giver et Produkt lig Dividenden. I dette Tilfælde vælger man det største Tal, som multipliceret med Divisor giver et Produkt, der er mindre end Dividenden, og kalder dette Tal Kvotienten, men i Modsætning til et Tal, der multipliceret med Divisor giver et Produkt, som netop er lig Dividenden, kaldes en saadan Kvotient en *ufuldstændig* Kvotient. Differentsen mellem Dividenden og Produktet af Kvotienten og Divisor, der altsaa er Nul, naar Kvotienten er fuldstændig, kaldes Divisionens *Rest.*

Kan man finde Kvotienten fuldstændig, siges Divisor at *gaa op i* Dividenden eller at være et *Maal for* denne, og Dividenden siges at være et *Multiplum af* Divisor.

2. *Resten er mindre end Divisor.*

Er Dividenden a, Divisor b, den ufuldstændige Kvotient k, Resten r, saa er altsaa $a - bk = r$; og da k er det største Tal, som multipliceret med Divisor giver et Produkt mindre end a, er $a < (k + 1)b$. Man har altsaa:

$$\begin{array}{c} \underline{a - kb = r} \\ a = kb + r \\ \underline{a < (k + 1)\,b} \\ a < kb + b \\ kb + r < kb + b \\ \underline{kb = kb} \\ r < b. \end{array}$$

3. Man kan i flere Tilfælde bevise, at Divisor gaar op i Dividenden. Af disse anføres:

a. *Naar et Tal gaar op i flere andre, saa gaar det ogsaa op i enhver Forbindelse af dem ved Addition og Subtraktion.* Man har nemlig:

$$(a + b - c) : k = a : k + b : k - c : k.$$

Findes nu: $a : k$, $b : k$ og $c : k$ i Talrækken, saa findes ogsaa enhver Forbindelse af dem ved Addition eller Subtraktion i Talrækken, eller k gaar op i $a + b - c$.

b. *I et Produkt gaar enhver af Faktorerne op.* Man har nemlig:

$$ab : a = b; \quad ab : b = a.$$

Kvotienten findes altsaa i Talrækken, eller a og b gaar op i ab.

c. *Naar en Størrelse gaar op i den ene Faktor i et Produkt, gaar den op i hele Produktet.* Man har nemlig:

$$ab : c = (a : c)b.$$

Gaar nu c op i a, eller findes $a : c$ i Talrækken, saa findes ogsaa $(a : c)b$ i Talrækken, eller c gaar op i ab.

d. *Naar en Størrelse ikke gaar op i et Produkt, gaar den heller ikke op i nogen af Produktets Faktorer.* Dersom den nemlig gik op i nogen af Faktorerne, maatte den ogsaa gaa op i Produktet.

e. *Naar et Produkt gaar op i et Tal, saa gaar ogsaa enhver af Produktets Faktorer op deri.* Er nemlig:

$$\underline{a : bc = k}$$

saa er: $$a : b = kc$$

Findes nu k i Talrækken, saa findes ogsaa kc deri; dersom altsaa bc gaar op i a, saa gaar ogsaa b op i a.

f. *Naar et Tal ikke gaar op i et andet, saa gaar intet Multiplum af det første op i det andet.* Dersom nemlig et Multiplum af det første Tal gik op i det andet, saa maatte ogsaa hver af dette Multiplums Faktorer, altsaa ogsaa det første Tal gaa op i det andet.

g. *Naar Dividenden og Divisor er Produkter, og Divisors Faktorer gaar op i hver sin af Dividendens Faktorer, saa gaar Divisor op i Dividenden.* Man har nemlig:

$$abc : def = (a : d)(b : e)(c : f).$$

Findes nu $a : d$, $b : e$ og $c : f$ i Talrækken, saa findes ogsaa Produktet af disse Tal eller $abc : def$ i Talrækken; altsaa gaar def op i abc.

## § 23.

### Om Primtal og sammensatte Tal.

1. Ethvert Tal, hvori intet andet Tal end Tallet selv og Enheden gaar op, kaldes et *Primtal.* Alle andre Tal kaldes *sammensatte Tal.*

2. *I ethvert Tal gaar et Primtal op.*

Er nemlig Tallet et Primtal, saa gaar det op i sig selv. Er det sammensat, saa gaar et mindre Tal op i det. Er dette mindre Tal ikke et Primtal, saa maa et endnu mindre Tal gaa op deri, altsaa ogsaa i det oprindelige Tal. Og saaledes kan man fortsætte, indtil man kommer til et Primtal, som gaar op.

3. *Der gives Primtal større end ethvert givet Primtal.*

Er det givne Primtal n, saa opskrives alle Primtal til n:

$$2, 3, 5, 7, 11 \ldots . n.$$

Disse multipliceres, saa faar man et Produkt, p, som er større end n, og hvori alle Primtal indtil n gaar op, da de er Faktorer deri. Men da kan ingen af dem gaa op i $p + 1$; thi da alle gaar op i p, saa maatte, dersom noget af dem gik op i $p + 1$, dette samme ogsaa gaa op i $(p + 1) - p = 1$, hvilket er umuligt. Det Primtal, som gaar op i $p + 1$, maa altsaa være større end n; altsaa gives der Primtal større end n.

Heraf følger, at *Primtallenes Antal er uendeligt.*

4. *At finde alle de Primtal, som er mindre end et givet Tal.*

Er n det givne Tal, saa opskriver man alle Tal til n. Derpaa multiplicerer man 2 med sig selv og alle de følgende Tal; de ved denne Multiplikation erholdte Produkter udstryges af den oprindelige Talrække, da de er sammensatte. Derpaa multiplicerer man 3 med sig selv og alle de følgende Tal og udstryger af Talrækken de derved erholdte Produkter. Derpaa multiplicerer man det følgende Tal med sig selv og alle de udenfor staaende Tal og udstryger de derved erholdte Produkter. Og saaledes fortsætter man, indtil alle sammensatte Tal er udstrøgne. Herved mærkes følgende Regler:

a. Man behøver aldrig at multiplicere noget Tal med de Tal, der er mindre end dette; thi de derved erholdte Produkter er allerede udstrøgne ved Multiplikationen af de mindre Tal med det omtalte større. Heraf følger, at man har fundet alle Primtal mindre end n, saasnart man i Multiplikationen er kommen til et Tal, der multipliceret med sig selv er lig eller større end n.

b. Man behøver ikke at multiplicere noget sammensat Tal med sig selv og de følgende Tal; thi i de derved erholdte Multipla af det sammensatte Tal maa dettes enkelte Faktorer gaa op; og da alle de Tal, hvori disse gaar op, allerede ved en tidligere Multiplikationsrække er udstrøgne, er altsaa ogsaa det sammensatte Tals Multipla udstrøgne.

c. Man behøver ikke at multiplicere noget Tal med de af de følgende Tal, der allerede ved en tidligere Multiplikationsrække er udstrøgne; thi i de Produkter, man saaledes vilde faa, vilde det udstrøgne Tal, altsaa ogsaa dettes enkelte Faktorer gaa op; men da Tallet ved en tidligere Multiplikationsrække skulde være udstrøget, maa man altsaa allerede have udstrøget alle de Tal, hvori idetmindste en af det udstrøgne Tals enkelte Faktorer gaar op; altsaa er alle Multipla af det udstrøgne Tal allerede tidligere udstrøgne.

5. *Naar et Primtal ikke gaar op i noget af flere Tal, gaar det heller ikke op i deres Produkt.*

Denne Sætning bevises først for det Tilfælde, at man kun har to Tal, hvori Primtallet ikke gaar op, og at det ene af disse er mindre end Primtallet. Er Primtallet p, de to andre Tal a og b, og er $p > a$, og gaar p ikke op i b, saa skal man altsaa bevise, at p ikke gaar op i ab.

Man dividerer da p med a, hvorved man faar en ufuldstændig Kvotient q og en Rest a':

$$p - aq = a'$$

Multipliceres med: $\underline{\phantom{p - aq}\ b = b}$

faar man: $pb - aqb = a'b.$

Nu gaar p op i pb, da p er den ene Faktor. Dersom p gik op i ab, maatte p ogsaa gaa op i aqb, altsaa ogsaa i $pb - aqb$ eller $a'b$, hvor $a' < a$, da a' er Rest, hvor a er Divisor. Derpaa divideres p med a', hvorved man faar en ufuldstændig Kvotient q' og en Rest a'':

$$\begin{array}{r} p - a'q' = a'' \\ b = b \\ \hline pb - a'q'b = a''b. \end{array}$$

Dersom p gik op i a'b, saa maatte p ogsaa gaa op i a'q'b. Da p gaar op i pb, maatte altsaa p ogsaa gaa op i pb — a'q'b eller i a''b, hvor $a'' < a'$, da a'' er Rest, hvor a' er Divisor. Fortsætter man paa denne Maade, saa faar man, at dersom p gik op i a''b, saa maatte p ogsaa gaa op i a'''b, i a''''b o. s. v., hvor enhver a er mindre end den foregaaende, da den er Rest, hvor denne er Divisor og p Dividend. Man faar altsaa, at dersom p gik op i ab, saa maatte p gaa op i:

$$a'b,\ a''b,\ a'''b \ldots a^{(n)}b,\ a^{(n+1)}b \ldots$$

Da nu disse a^er^ bliver mindre og mindre, kan man fortsætte Rækken saa langt, at den sidste a bliver lig Nul. Denne være $a^{(n+1)}$. Nu er $a^{(n+1)}$ Rest, bvor $a^{(n)}$ er Divisor og p Dividend. Men naar Resten er Nul, saa gaar Divisor op i Dividenden, altsaa gaar $a^{(n)}$ op i p, der er et Primtal. I et Primtal kan nu intet andet Tal end Tallet selv og 1 gaa op, hvoraf følger, at $a^{(n)}$ enten maa være lig p eller lig 1. Lig p kan $a^{(n)}$ ikke være, da $p > a$ og $a > a^{(n)}$; altsaa er $a^{(n)} = 1$ og $a^{(n)}b = 1 \cdot b = b$. Men i b gaar p ifølge Betingelsen ikke op; altsaa kan p heller ikke gaa op i ab.

Vi gaar nu over til det Tilfælde, at p ikke gaar op i noget af to givne Tal, a og b, og at $p < a$. Man dividerer da a med p, hvorved man faar en ufuldstændig Kvotient q og en Rest a':

$$\begin{array}{r} a - pq = a' \\ b = b \\ \hline ab - pqb = a'b. \end{array}$$

Nu gaar p op i pqb. Dersom p gik op i ab, maatte p altsaa ogsaa gaa op i $ab - pqb$ eller i $a'b$; men dette er ifølge forrige Tilfælde umulig, da $p > a'$, idet $a'$ er Rest, hvor $p$ er Divisor.

Endelig staar det Tilfælde tilbage, at Faktorernes Antal er større end 2. Dette Tilfælde følger let af de foregaaende. Gaar saaledes $p$ hverken op i $a$ eller $b$, saa gaar $p$ heller ikke op i $ab$. Gaar $p$ heller ikke op i $c$, saa gaar altsaa $p$ heller ikke op i $abc$. Gaar $p$ heller ikke op i $d$, saa gaar $p$ heller ikke op i $abcd$ o. s. v.

6. Af foregaaende Sætning følger omvendt, at *naar et Primtal gaar op i et Produkt af flere Tal, saa maa det idetmindste gaa op i et af dem.* Dersom nemlig Primtallet ikke gik op i noget af dem, saa kunde det heller ikke gaa op i deres Produkt.

Derimod kan et sammensat Tal gaa op i et Produkt af flere Tal uden at gaa op i noget af dem, idet de enkelte Faktorer i det sammensatte Tal kan gaa op i forskjellige af de givne Tal, i hvilket Tilfælde Produktet af de sammensatte Tals enkelte Faktorer eller det sammensatte Tal vil gaa op i Produktet af de givne Tal.

## § 24.

### Om Tals Sammensætning af Primtal.

1. De sammensatte Tal kan udtrykkes som Produkter af Faktorer, der igjen enten er Primtal eller sammensatte Tal. Disse Faktorer kan igjen, forsaavidt som de er sammensatte Tal, udtrykkes som Produkter. Fortsætter man paa denne Maade, indtil alle Faktorer bliver Primtal, saa har man altsaa udtrykt det oprindelige sammensatte Tal som et Produkt af blot Primtal. Disse

Primtal kaldes Tallets *enkelte Faktorer;* og at udtrykke Tallet som et Produkt af dem kaldes *at opløse Tallet i sine enkelte Faktorer.*

2. *At opløse et Tal i sine enkelte Faktorer.*

Man dividerer Tallet med alle Primtallene efter deres Orden, idet man begynder med 2, indtil man kommer til et, der gaar op i Tallet. Den Kvotient, som dette giver, divideres paany med Primtallene efter deres Orden, indtil man kommer til et, som gaar op. Og saaledes fortsætter man, indtil den sidste Kvotient er et Primtal. Produktet af alle Divisorerne og den sidste Kvotient er da lig det oprindelige Tal, der saaledes er udtryk som et Produkt af Primtal eller opløst i sine enkelte Faktorer. Herved mærkes følgende Regler:

a. Man behøver ikke at dividere en Kvotient med de Primtal, man har seet, ikke gaar op i Dividenden; thi de Primtal, som ikke gaar op i Produktet af Divisor og Kvotienten, Dividenden nemlig, kan heller ikke gaa op i den ene Faktor, Kvotienten.

b. Naar intet Primtal gaar op i et Tal, førend man kommer til et Primtal, som ophøiet i anden Potents er større end Tallet, saa er dette et Primtal. Dersom nemlig et større Primtal end det omtalte skulde gaa op i Tallet, saa maatte Kvotienten blive mindre end dette Primtal. Men denne mindre Kvotient maatte ogsaa gaa op i Tallet, da dette vilde være lig Produktet af Divisor og denne Kvotient, der altsaa blev en Faktor i Tallet. Men dette er umulig, da Kvotienten enten selv maatte være et Primtal, som man altsaa tidligere havde fundet, ikke gik op i Tallet, eller Kvotienten maatte være et sammensat Tal, hvis enkelte Faktorer maatte gaa op i Tallet; men ogsaa disse havde man tidligere fundet ikke gik op. Er det omtalte

Tal det oprindelige Tal, som man skulde opløse i sine enkelte Faktorer, viser dette sig altsaa at være et Primtal; er det en ved en tidligere Division fremkommen Kvotient, bliver det den sidste af det oprindelige Tals enkelte Faktorer.

3. *Et Tal kan ikke opløses i mere end et System enkelte Faktorer.*

Er saaledes Tallet T opløst i følgende to Rækker Primtal:

$$T = a_1 a_2 a_3 \dots.$$
$$T = b_1 b_2 b_3 \dots$$

saa kan man bevise, at disse to Rækker bestaar af de samme Primtal. Man har nemlig:

$$a_1 a_2 a_3 \dots = b_1 b_2 b_3 \dots = T.$$

Nu gaar $a_1$ op i $a_1 a_2 a_3$, altsaa ogsaa i det lige store Produkt $b_1 b_2 b_3 \dots.$ Men $a_1$ er et Primtal; altsaa gaar $a_1$ op i en Faktor i $b_1 b_2 b_3 \dots$, f. Ex. i $b_1$. Men $b_1$ er ogsaa et Primtal, hvori følgelig intet andet Tal end 1 og $b_1$ gaar op. Da $a_1$ ikke er lig 1, er:

$$a_1 = b_1$$

Divideres dette i: $\underline{a_1 a_2 a_3 \dots = b_1 b_2 b_3 \dots}$

faar man: $a_2 a_3 \dots = b_2 b_3 \dots$

Nu gaar $a_2$ op i $a_2 a_3 \dots$, altsaa ogsaa i $b_2 b_3 \dots$ Men da maa $a_2$ som Primtal gaa op i en Faktor i $b_2 b_3 \dots$ f. Ex. i $b_2$. Og da $b_2$ ogsaa er et Primtal, bliver:

$$a_2 = b_2$$

Divideres dette i: $\underline{a_2 a_3 \dots = b_2 b_3 \dots}$

faar man: $a_3 \dots = b_3 \dots$

Fortsætter man saaledes videre, faar man, et til hver Faktor i $a_1 a_2 a_3 \dots$ svarer en ligestor i $b_1 b_2 b_3 \dots$, at altsaa begge disse Rækker enkelte Faktorer udgjør et og samme System.

4. *Naar et Tal gaar op i et andet, saa maa alle Divisors enkelte Faktorer findes blandt Dividendens.*

Gaar nemlig b op i a og giver en Kvotient c, saa er:

$$a : b = c$$

$$a = bc.$$

a og bc indeholder altsaa de samme Faktorer, hvoraf følger, at alle b's Faktorer findes blandt a's.

Dersom omvendt alle b's enkelte Faktorer findes blandt a's, saa kan a og b betragtes som Produkter, hvor alle Divisors Faktorer gaar op i hver sin af Dividendens; altsaa gaar b op i a.

## § 25.

### Om indbyrdes Primtal og indbyrdes delelige Tal.

1. Et Tal, hvori flere Tal gaar op, kaldes et *fælles Multiplum* af disse. Et Tal, der gaar op i flere Tal, kaldes et *fælles Maal* for disse. Tal, som har et fælles Maal, kaldes *indbyrdes delelige Tal;* har de intet fælles Maal, kaldes de *indbyrdes Primtal.*

2. *Naar to Tal ikke har nogen enkelt Faktor tilfælles, saa gaar heller intet sammensat Tal op i dem begge, eller de er indbyrdes Primtal.* Dersom nemlig et sammensat Tal gik op i dem begge, saa maatte ogsaa dettes enkelte Faktorer gaa op i begge.

3. *Naar et Tal gaar op i Produktet af to andre, og det er indbyrdes Primtal med den ene Faktor, saa gaar det op i den anden Faktor.*

Gaar nemlig a op i bc, saa maa alle a's enkelte Faktorer findes blandt bc's enkelte Faktorer. Er nu a og b indbyrdes Primtal, saa findes ingen af a's enkelte Faktorer blandt b's; altsaa findes de alle blandt c's, eller a gaar op i c.

4. *Naar to Tal er indbyrdes Primtal, saa er ogsaa alle Potentser af dem indbyrdes Primtal.*

Er nemlig a og b indbyrdes Primtal, saa har de ingen enkelte Faktorer tilfælles. Nu indeholder $a^n = aaa\ldots$ de samme enkelte Faktorer som a, kun staar hver af dem n Gange saa ofte; ligesaa indeholder $b^p$ de samme enkelte Faktorer som b. Har altsaa a og b ingen enkelte Faktorer tilfælles, saa har heller ikke $a^n$ og $b^p$ nogen enkelte Faktorer tilfælles, eller $a^n$ og $b^p$ er indbyrdes Primtal.

5. *At søge det mindste fælles Multiplum for flere givne Tal.*

Man opløser Tallene i sine enkelte Faktorer. Derpaa tager man hver af de enkelte Faktorer saa mange Gange, som den forekommer i det Tal, hvori den indeholdes flest Gange. Produktet af disse vil da være det mindste fælles Multiplum.

At dette Produkt vil være et fælles Multiplum for de givne Tal, indsees ved at bemærke, at de enkelte Faktorer, hvoraf hver af de givne Tal bestaar, forekommer i Produktet mindst saa mange Gange som i hvert af de givne Tal. At det omtalte Produkt er det mindste fælles Multiplum, fremgaar af, at dersom man borttog nogen af de enkelte Faktorer, saa vilde denne Faktor indeholdes færre Gange i Produktet end idetmindste i et af de givne Tal; dette Tal kunde da ikke gaa op i Produktet (se § 24 No. 4), der altsaa ikke blev noget fælles Multiplum.

6. *At søge det største fælles Maal for flere givne Tal.*

Man opløser Tallene i sine enkelte Faktorer. Derpaa tager man hver af de enkelte Faktorer saa mange Gange, som den forekommer i det Tal, hvori den indeholdes færrest Gange. Produktet af disse vil da være det største fælles Maal.

At dette Produkt er et fælles Maal for de givne Tal, fremgaar af, at de enkelte Faktorer, det indeholder, findes i hvert af de givne Tal mindst saa mange Gange som i Prodnktet. At det er det største fælles Maal, fremgaar af, at dersom man tilføiede nogen enkelt Faktor, saa vilde Produktet indeholde denne nye enkelte Faktor en Gang mere, end den forekommer idetmindste i et af de givne Tal; i dette Tal kunde Produktet altsaa ikke gaa op, eller det blev intet fælles Maal.

# Andet Afsnit.

## Om Brok.

### Indledning.

§ 26.

Bestemmelse af Begrebet Brøk.

1. *En Brøk er den Del, som fremkommer, naar et Tal deles i et vist Antal lige store Dele.* Det Tal, som deles, kaldes *Tælleren;* det Tal, som angiver, hvormange Dele Tælleren deles i, kaldes *Nævneren.* En Brøk betegnes ved, at man over en horizontal Streg, *Brøkstregen,* sætter Tælleren, og under Stregen Nævneren. $\frac{a}{b}$ betegner altsaa, at a er delt i b lige store Dele. Brøken benævnes ved, at man først nævner Tælleren, derpaa Nævnerens Ordenstal med Tilføielse af Stavelsen *del;* dog undtages herfra $\frac{1}{2}$, der benævnes *en Halv.* Brøker med samme Nævner siges at være *af samme Benævning.* I Modsætning til Brøker holdes de hidtil betragtede Tal *hele Tal.*

Et Tal kan i Almindelighed ikke umiddelbart deles i et vilkaarligt Antal lige store Dele; derimod kan Enheden tænkes delt i saa mange Dele, man vil. Naar a skal deles i b lige store Dele, tænker man sig derfor dette at foregaa saaledes, at Enheden deles i b lige store Dele, og at man af disse Dele tager a. En saadan Del kaldes en *Brøkenhed.*

2. *Naar to Brøker har samme Nævner, saa er den størst, hvis Tæller er størst.* Thi jo større det Tal er, som deles i et vist Antal lige store Dele, desto større bliver hver af Delene.

3. *En Brøk, hvis Tæller og Nævner er lige, er lig Enheden.* Thi naar a deles i a lige store Dele, saa bliver hver Del lig 1:

$$\frac{a}{a} = 1.$$

4. *En Brøk, hvis Tæller er mindre end Nævneren, er mindre end 1.* Er nemlig $a < b$, saa er $\frac{a}{b} < \frac{b}{b}$, eller $\frac{a}{b} < 1$. En saadan Brøk kaldes *ægte.*

*En Brøk, hvis Tæller er større end Nævneren, er større end 1.* Er nemlig $a > b$, saa er $\frac{a}{b} > \frac{b}{b}$ eller $\frac{a}{b} > 1$. En saadan Brøk kaldes *uægte.*

5. *Naar Divisor gaar op i Dividenden, saa er Kvotienten lig en Brøk, hvis Tæller er Dividenden, og hvis Nævner er Divisor.*

Gaar b op i a, saa er altsaa:

$$\text{Sats: } a : b = \frac{a}{b}$$

Er nemlig: $a : b = c$

saa er $a = cb = c + c + c + \ldots b$ Gange.

Kvotienten, c, er altsaa Størrelsen af hver af de Dele, som fremkommer, naar a deles i b lige store Dele. Men disse Dele betegnes med $\frac{a}{b}$; altsaa er:

$$a : b = \frac{a}{b}$$

6. *Naar Divisor ikke gaar op i Dividenden, saa forstaar man ved Division at dele Dividenden i saa mange lige store Dele, som Divisor indeholder Enheder.* En saadan Del betegnes ved en Brøk, hvis Tæller er Dividenden, og hvis Nævner er Divisor. Man har altsaa i ethvert Tilfælde:

$$a : b = \frac{a}{b}$$

7. *Naar en Brøk skal divideres med et Tal, saa kan man multiplicere Nævneren med Divisor og beholde Tælleren uforandret.*

$$\text{Sats: } \underline{\frac{t}{n} : p = \frac{t}{np}}$$

Naar nemlig t skal deles i n lige store Dele, og det Udkomne atter divideres med p eller deles i p lige store Dele, saa kan man paa engang dele t i np lige store Dele, eller:

$$\frac{t}{n} : p = \frac{t}{np}$$

8. *Et helt Tal kan omgjøres til en Brøk af en given Benævning, idet Tælleren bliver Produktet af det hele Tal og den givne Nævner.*

$$\text{Sats: } \underline{\underline{a = \frac{an}{n}}}$$

$$a = an : n = \frac{an}{n}$$

9. *En Brøks Værdi bliver uforandret, naar Tæller og Nævner multipliceres med samme Tal.*

$$\text{Sats: } \frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$$

$$a = \frac{an}{n}$$

Divideres med: $b = b$

faar man: $\frac{a}{b} = \frac{an}{n} : b = \frac{an}{bn}$

10. *En Brøks Værdi bliver uforandret, naar Tæller og Nævner divideres med samme Tal.*

$$\text{Sats: } \frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$$

$$\frac{a:n}{b:n} = \frac{(a:n)n}{(b:n)n} = \frac{a}{b}$$

11. *En Brøk kan bringes til en anden Benævning ved at multiplicere den givne Tæller med den nye Nævner og dividerer Produktet med den givne Nævner, eller ved at dividere den nye Nævner med givne Nævner og multiplicere Kvotienten med den givne Tæller.*

$$\text{Sats: } \frac{a}{b} = \frac{an:b}{n} = \frac{(n:b)a}{n}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{an:b}{bn:b} = \frac{an:b}{n} = \frac{(n:b)a}{n} \quad (\S\ 14\ \text{No. } 2)$$

# Første Kapitel.

## Addition og Subtraktion.

### I. Addition.

### § 27.

Begrebsbestemmelse ved Addition med Brøk.

At addere Brøker er et nyt Begreb, som ikke kan forstaaes ifølge det Foregaaende, idet man hverken finder første Addend i Talrækken, der jo kun bestaar af hele Tal, og heller ikke kan tælle et Brøkantal Pladse fremad.

Man maa derfor opstille en ny Difinition for dette Tilfælde, og man har valgt følgende:

*Ved at addere Brøker med samme Nævner forstaar man at addere Tællerne og beholde den fælles Nævner.*

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$$

Idet man ifølge § 26 No. 8 og 11 altid kan bringe to Brøker eller et helt Tal og en Brøk til samme Benævning, bliver det saaledes altid mulig at addere to Tal, hvilken Benævning de end er af.

## § 28.

### Additionslæren med Brøk.

Naar en Sætning er bevist for en Slags Tal, f. Ex. for hele Tal, og den derpaa skal bevises for en ny Slags Tal, f. Ex. for Brøker, saa benytter man altid samme Fremgangsmaade, nemlig at udregne begge Led i Satsen og paavise, at de giver samme Resultat. Paa denne Maade bevises da ogsaa de i § 5 og 6 opførte Sætninger, dersom nogle af Størrelserne eller alle er Brøker. Som Exempel anføres følgende Sætning (§ 5).

*Naar en Størrelse adderes til første Addend, bliver derved samme Størrelse adderet til Summen.*

Da Brøker altid kan bringes til samme Benævning, behøver Sætningen kun at bevises for det Tilfælde, at alle Tal har samme Nævner.

Sats: $\underline{\underline{\left(\frac{a}{n} + \frac{k}{n}\right) + \frac{b}{n} = \left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right) + \frac{k}{n}}}$

$$\left(\frac{a}{n} + \frac{k}{n}\right) + \frac{b}{n} = \frac{a+k}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+k+b}{n}$$

$$\underline{\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right) + \frac{k}{n} = \frac{a+b}{n} + \frac{k}{n} = \frac{a+b+k}{n}}$$

$$\left(\frac{a}{n} + \frac{k}{n}\right) + \frac{b}{n} = \left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right) + \frac{k}{n}$$

## II. Subtraktion.

### § 29.

Begrebsbestemmelse ved Subtraktion med Brøk.

*Man subtraherer Brøker med samme Nævner ved at subtrahere Tællerne og beholde den fælles Nævner.*

Sats: $\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}$

Kaldes Minuenden m, Subtraktor s og Differentsen d, bliver:

$$d + s = \frac{a-b}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a-b+b}{n} = \frac{a}{n} = m$$

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}$$

Da man ifølge § 26 No. 8 og 11 altid kan bringe to Brøker eller et helt Tal og en Brøk til samme Benævning, bliver det saaledes altid mulig at subtrahere to Tal, hvilken Benævning de end er af.

### § 30.

Subtraktionslæren med Brøk.

Sætningerne i § 8 og 9, naar en af Størrelserne eller alle er Brøker, bevises paa den i § 28 angivne Maade. Som Exempel anføres følgende Sætning (§ 8 No. 2).

*Naar et Tal adderes til Subtraktor, bliver derved samme Tal subtraheret fra Differentsen.*

Da Brøker altid kan bringes til samme Benævning, behøver Sætningen kun at bevises for det Tilfælde, at alle Tal har samme Nævner.

Sats: $\frac{a}{n} - \left(\frac{b}{n} + \frac{k}{n}\right) = \left(\frac{a}{n} - \frac{b}{n}\right) - \frac{k}{n}$

$$\frac{a}{n} - \left(\frac{b}{n} + \frac{k}{n}\right) = \frac{a}{n} - \frac{b+k}{n} = \frac{a-(b+k)}{n} = \frac{a-b-k}{n}$$

$$\left(\frac{a}{n} - \frac{b}{n}\right) - \frac{k}{n} = \frac{a-b}{n} - \frac{k}{n} = \frac{a-b-k}{n}$$

$$\frac{a}{n} - \left(\frac{b}{n} + \frac{k}{n}\right) = \left(\frac{a}{n} - \frac{b}{n}\right) - \frac{k}{n}$$

# Andet Kapitel.

## Multiplikation og Division.

### § 31.

Begrebsbestemmelser ved Multiplikation med Brøk.

1. *Man multiplicerer en Brøk med et helt Tal ved at multiplicere Tælleren med Tallet og beholde Nævneren uforandret, eller ved at dividere Nævneren med Tallet og beholde Tælleren uforandret.*

Sats: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b} = \frac{a}{b:c}$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots \text{ c Gange}$$

$$= \frac{a + a + a + \ldots \text{ c Gange}}{b}$$

$$= \frac{ac}{b}$$

Heraf faar man let den anden Del af Satsen. Man har nemlig:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b} = \frac{ac:c}{b:c} = \frac{a}{b:c}$$

2. At multiplicere med en Brøk er et nyt Begreb, som ikke kan forstaaes ifølge det Foregaaende, idet man ikke kan sætte et Tal et Brøkantal Gange som Addend. Man maa derfor opstille en ny Definition for dette Tilfælde, og man har valgt følgende: *Ved at multiplicere*

*med en Brøk forstaar man at multiplicere med Tælleren og dividere det Udkomne med Nævneren.*

$$a \cdot \frac{b}{c} = ab : c$$

3. *Man multiplicerer to Brøker ved at multiplicere Tæller med Tæller og Nævner med Nævner.*

$$\text{Sats: } \underline{\underline{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot c : d = \frac{ac}{b} : d = \frac{ac}{bd} \quad (\S\ 26\ \text{No. } 7)$$

## § 32.

### Multiplikationslæren med Brøk.

Sætningerne i § 11 og 12, naar nogle af Størrelserne eller alle er Brøker, bevises paa den i § 28 angivne Maade. Som Exempel anføres følgende Sætning (§ 11 No. 1).

*Naar en Sum skal multipliceres med et Tal, kan man multiplicere hver af Addenderne med Tallet og addere de udkomne Produkter.*

$$\text{Sats: } \underline{\underline{\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\frac{t}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{t}{n} + \frac{c}{d} \cdot \frac{t}{n}}}$$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\frac{t}{n} = \left(\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}\right)\frac{t}{n} = \frac{ad + bc}{bd} \cdot \frac{t}{n} =$$

$$\frac{(ad + bc)t}{bdn} = \frac{adt + bct}{bdn}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{t}{n} + \frac{c}{d} \cdot \frac{t}{n} = \frac{at}{bn} + \frac{ct}{dn} = \frac{atd + ctb}{bdn}$$

---

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\frac{t}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{t}{n} + \frac{c}{d} \cdot \frac{t}{n}$$

## II. Division.

### § 33.

Begrebsbestemmelser ved Division med Brøk.

1. I § 26 har vi opstillet en ny Definition paa Division, og i samme § No. 7 har vi deraf udledet, hvorledes en Brøk bliver at dividere med et helt Tal. Efterat Multiplikation med Brøk nu er fremstillet, skal vi imidlertid atter optage den gamle Definition, nemlig at Kvotienten er et Tal, som multipliceret med Divisor giver et Produkt lig Dividenden; og vi skal da først bevise, at denne Definition fører til samme Resultat som den i § 26 No. 6 opstillede, nemlig de i samme § No. 6 og 7 fremsatte Sætninger.

a. *Naar Divisor ikke gaar op i Dividenden, saa er Kvotienten en Brøk, hvis Tæller er Dividenden, og hvis Nævner er Divisor.*

$$\text{Sats: } a : b = \frac{a}{b}$$

I denne § vil vi kalde Satsens Dividend D, dens Divisor d og dens Kvotient K. Man faar da:

$$Kd = \frac{a}{b} \cdot b = \frac{ab}{b} = a = D$$

$$a : b = \frac{a}{b}$$

b. *Naar en Brøk skal divideres med et Tal, saa kan man multiplicere Nævneren med Tallet og beholde Tælleren uforandret.*

$$\text{Sats: } \frac{t}{n} : p = \frac{t}{np}$$

$$Kd = \frac{t}{np} \cdot p = \frac{tp}{np} = \frac{t}{n} = D$$

$$\frac{t}{n} : p = \frac{t}{np}$$

2. *Naar en Brøk skal divideres med et Tal, saa kan man ogsaa dividere Tælleren med Tallet og beholde Nævneren uforandret.*

$$\text{Sats: } \frac{t}{n} : p = \frac{t:p}{n}$$

$$Kd = \frac{t:p}{n} \,.\, p = \frac{(t:p)p}{n} = \frac{t}{n} = D$$

$$\frac{t}{n} : p = \frac{t:p}{n}$$

3. *Et Tal divideres med en Brøk ved at vende Divisor om, saa Tælleren bliver Nævner og Nævneren Tæller, og derpaa multiplicere med denne omvendte Brøk.*

$$\text{Sats: } a : \frac{t}{n} = a \,.\, \frac{n}{t}$$

$$Kd = a \,.\, \frac{n}{t} \,.\, \frac{t}{n} = \frac{ant}{tn} = a = D$$

$$a : \frac{t}{n} = a \,.\, \frac{n}{t}$$

4. *To Brøker kan ogsaa divideres ved at dividere Tæller med Tæller og Nævner med Nævner.*

$$\text{Sats: } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a:c}{b:d}$$

$$Kd = \frac{a:c}{b:d} \,.\, \frac{c}{d} = \frac{(a:c)c}{(b:d)d} = \frac{a}{b} = D$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a:c}{b:d}$$

## § 34.

### Divisionslæren med Brøk.

Sætningerne i § 14 og 15, naar nogle af Størrelserne eller alle er Brøker, bevises paa den i § 28 angivne Maade. Som Exempel anføres følgende Sætning (§ 15 No. 1.)

*Naar en Differents skal divideres med et Tal, kan* *man dividere Minuenden og Subtraktor med Tallet og subtrahere de udkomne Kvotienter.*

$$\text{Sats: } \underline{\underline{\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) : \frac{t}{n} = \frac{a}{b} : \frac{t}{n} - \frac{c}{d} : \frac{t}{n}}}$$

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) : \frac{t}{n} = \left(\frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd}\right) . \frac{n}{t} = \frac{ad - bc}{bd} . \frac{n}{t} =$$
$$\frac{(ad - bc)n}{bdt} = \frac{adn - bcn}{bdt}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{t}{n} - \frac{c}{d} : \frac{t}{n} = \frac{a}{b} . \frac{n}{t} - \frac{c}{d} . \frac{n}{t} = \frac{an}{bt} - \frac{cn}{dt} =$$
$$\frac{and}{bdt} - \frac{cnb}{bdt} = \frac{and - cnb}{bdt}$$

---

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) : \frac{t}{n} = \frac{a}{b} : \frac{t}{n} - \frac{c}{d} : \frac{t}{n}$$

# Tredie Kapitel.

## Potentser og Rødder.

### I. Potentser.

§ 35.

Begrebsbestemmelser ved Potentser med Brøk.

1. *Man ophøier en Brøk til en Potents ved at ophøie Tæller og Nævner hver for sig.*

$$\text{Sats: } \underline{\underline{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} . \frac{a}{b} . \frac{a}{b} \ldots \text{n Gange}$$
$$= \frac{aaa \ldots \text{n Gange}}{bbb \ldots \text{n Gange}}$$
$$= \frac{a^n}{b^n}$$

2. At ophøie et Tal til en Brøkexponent er et nyt Begreb, som ikke kan forstaaes ifølge det Foregaaende, idet man ikke kan sætte et Tal et Brøkantal Gange som

Faktor. Man maa derfor opstille en ny Definition for dette Tilfælde, og man har valgt følgende: *Ved at ophøie et Tal til en Brøkexponent forstaar man at ophøie det til én Potents, hvis Exponent er Tælleren og deraf uddrage en Rod, hvis Exponent er Nævneren.*

$$a^{\frac{t}{n}} = \sqrt[n]{a^t} = (\sqrt[n]{a})^t \quad (\S\ 20\ \text{No. } 2).$$

## § 36.

### Potentslæren med Brøk.

Sætningerne i § 17 og 18, naar nogle af Størrelserne eller alle er Brøker, bevises paa den i § 28 angivne Maade. Som Exempler anføres følgende Sætninger (§ 17 No. 1, 2 og 3).

1. *Man kan ophøie et Produkt til en Potents ved at ophøie hver af Faktorerne.*

$$\text{Sats: } \underline{\underline{(ab)^{\frac{t}{n}} = a^{\frac{t}{n}} b^{\frac{t}{n}}}}$$

$$(ab)^{\frac{t}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^t} = \sqrt[n]{a^t b^t} = \sqrt[n]{a^t}\sqrt[n]{b^t}$$

$$\underline{a^{\frac{t}{n}} b^{\frac{t}{n}} = \sqrt[n]{a^t}\sqrt[n]{b^t}}$$

$$(ab)^{\frac{t}{n}} = a^{\frac{t}{n}} b^{\frac{t}{n}}$$

2. *Man kan multiplicere to Potentser med samme Rod ved at ophøie Roden til Summen af Exponenterne.*

$$\text{Sats: } \underline{\underline{a^{\frac{t}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{t}{n} + \frac{p}{q}}}}$$

$$a^{\frac{t}{n}} a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[n]{a})^t (\sqrt[q]{a})^p = (\sqrt[nq]{a})^{tq} (\sqrt[nq]{a})^{pn} = (\sqrt[nq]{a})^{tq + pn}$$

$$\underline{a^{\frac{t}{n} + \frac{p}{q}} = a^{\frac{tq + np}{nq}} = (\sqrt[nq]{a})^{tq + np}}$$

$$a^{\frac{t}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{t}{n} + \frac{p}{q}}$$

3. *Man kan ophøie en Potents til en Potents ved at ophøie Roden til Produktet af Exponenterne.*

$$\text{Sats: } \underline{\underline{\left(a^{\frac{t}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{t}{n} \cdot \frac{p}{q}}}}$$

$$\left(a^{\frac{t}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^t})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{(a^t)^p}} = \sqrt[qn]{a^{tp}}$$

$$\underline{a^{\frac{t}{n} \cdot \frac{p}{q}} = a^{\frac{tp}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{tp}}}$$

$$\left(a^{\frac{t}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{t}{n} \cdot \frac{p}{q}}$$

Vi skal nu ogsaa bevise følgende to Sætninger af Potentslæren:

4. *Naar et Tal, der er større end 1, ophøies til forskjellige Exponenter, bliver Potentsen størst, hvor Exponenten er størst.*

$$\text{Bet. } \underline{a > 1, n > p}$$

$$\text{Sats: } \underline{\underline{a^n > a^p}}$$

Da $n > p$, kan man sætte: $n = p + x$. Man faar da:

$$a > 1$$

$$a^x > 1$$

$$\underline{a^p = a^p}$$

$$\underline{a^x a^p > a^p}$$

$$\underline{a^{x+p} > a^p}$$

$$a^n > a^p$$

5. *Naar et Tal, der er mindre end 1, ophøies til forskjellige Exponenter, bliver Potentsen størst, hvor Exponenten er mindst.*

$$\text{Bet. } a < 1,\ n > p$$

$$\text{Sats: } a^n < a^p$$

Da $n > p$, kan man sætte $n = p + x$. Man faar da:

$$a < 1$$

$$a^x < 1$$

$$a^p = a^p$$

$$a^p a^x < a^p$$

$$a^{p+x} < a^p$$

$$a^n < a^p$$

## II. Rødder.

### § 37.

Begrebsbestemmelse ved Rødder med Brøk.

*Man uddrager en Rod af en Brøk ved at uddrage Roden af Tæller og Nævner hver for sig.*

$$\text{Sats: } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Kaldes Roden r, Exponenten e og Potentsen p, saa er:

$$r^e = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b} = p$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

## § 38.

### Rodlæren med Brøk.

Sætningerne i § 20 og 21, naar nogle af Størrelserne eller alle er Brøker, bevises paa den i § 28 angivne Maade.

Vi skal nu ogsaa bevise følgende Sætninger af Rodlæren:

1. *Naar man af et Tal, som er større end 1, uddrager Rødder med ulige Exponenter, saa er Roden størst, hvor Exponenten er mindst.*

$$\text{Bet. } \underline{a > 1,\ n > p}$$

$$\text{Sats: } \underline{\underline{\sqrt[n]{a} < \sqrt[p]{a}}}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p} \text{ og } \sqrt[p]{a} = \sqrt[np]{a^n} \quad (\text{§ 21 No. 2}).$$

Nu er:

$$\underline{a > 1 \text{ og } n > p}$$

$$\underline{a^n > a^p}$$

$$\underline{\sqrt[np]{a^n} > \sqrt[np]{a^p}}$$

$$\sqrt[p]{a} > \sqrt[n]{a}$$

2. *Naar man af et Tal, som er mindre end 1, uddrager Rødder med ulige Exponenter, saa er Roden størst, hvor Exponenten er størst.*

$$\text{Bet. } \underline{a < 1,\ n > p}$$

$$\text{Sats: } \underline{\underline{\sqrt[n]{a} > \sqrt[p]{a}}}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p} \text{ og } \sqrt[p]{a} = \sqrt[np]{a^n} \quad (\text{§ 21 No. 2})$$

Nu er:

$$\underline{a < 1 \text{ og } n > p}$$

$$\underline{a^n < a^p}$$

$$\underline{\sqrt[np]{a^n} < \sqrt[np]{a^p}}$$

$$\sqrt[p]{a} < \sqrt[n]{a}$$

# Tillæg til andet Afsnit.

## I. Om Proportioner.

### § 39.

Begrebsbestemmelser ved Proportioner.

1. Ved *Forholdet* mellem to Størrelser forstaar man Kvotienten mellem dem udtrykt som Dividend og Divisor. Udtrykker man Kvotienten som en enkelt Størrelse, kaldes den *Forholdsexponent.* Er saaledes:

$$a : b = c$$

saa er $a : b$ Forholdet mellem a og b, c Forholdsexponenten. Dividenden kaldes *Forled* og Divisor *Efterled.*

2. En Ligning, som udtrykker, at to Forhold er lige store, kaldes en *Proportion.* Saaledes er Ligningen:

$$a : b = c : d$$

der udtales: *a forholder sig til b som c til d*, en Proportion. De fire Størrelser, som danner en Proportion, kaldes dens *Led* og benævnes efter den Orden, hvori de staar, første, andet, tredie og fjerde Led. Første og tredie Led kaldes ogsaa *første Par ensliggende Led*, andet og fjerde *andet Par ensliggende Led.* Første og fjerde Led kaldes *Yderleddene*, andet og tredie *Mellemleddene.* Er Mellemleddene lige store, kaldes de *Mellemproportionalleddet*, og Proportionen kaldes isaafald *sammenhængende.*

3. To Størrelser siges at være *proportionale* med to andre, naar det ene Par Størrelser danner Forleddene i en Proportion, hvori det andet Par i samme Orden danner Efterleddene. Derimod siges to Størrelser at være *omvendt proportionale* med to andre, naar det ene Par danner Yderleddene i en Proportion, hvori det andet Par danner Mellemleddene.

## § 40.

### Proportionslærens Fundamentalsætninger.

1. *I enhver Proportion er Produktet af Yderleddene lig Produktet af Mellemleddene.*

$$\text{Bet. } \underline{a : b = c : d}$$

$$\text{Sats: } \underline{\underline{ad = bc}}$$

$$a : b = c : d$$

$$\underline{bd = bd}$$

$$\underline{a : b \,.\, bd = c : d \,.\, bd}$$

$$ad = cb$$

2. *Naar to Produkter er lige store, saa er Faktorerne i det ene Produkt omvendt proportionale med Faktorerne i det andet.*

$$\text{Bet. } \underline{ab = cd}$$

$$\text{Sats: } \underline{\underline{a : c = d : b}}$$

$$ab = cd$$

$$\underline{bc = bc}$$

$$\underline{ab : bc = cd : bc}$$

$$a : c = d : b$$

For at bevise Rigtigheden af en Proportion behøver man altsaa kun at bevise, at Produktet af dens Yderled er lig Produktet af dens Mellemled.

## § 41.

### Omdannelse af en Proportion til en anden.

Man kan af en Proportion danne en anden paa følgende Maader:

a. Ved Ombytning af Leddene.

*I. Man kan ombytte Yderleddene.*

$$\text{Bet.}\quad \underline{a : b = c : d}$$

$$\text{Sats:}\quad \underline{\underline{d : b = c : a}}$$

I denne og følgende § vil vi kalde Produktet af Satsens Yderled y og af dens Mellemled m. Man har da:

$$y = da$$
$$m = bc$$
$$\text{Ifølge Bet. er:}\quad \underline{da = bc}$$
$$\underline{y = m}$$
$$d : b = c : a$$

*II. Man kan ombytte Mellemleddene.*

$$\text{Bet.}\quad \underline{a : b = c : d}$$

$$\text{Sats:}\quad \underline{\underline{a : c = b : d}}$$

$$y = ad$$
$$m = cb$$
$$\text{Ifølge Bet. er:}\quad \underline{ad = cb}$$
$$\underline{y = m}$$
$$a : c = b : d$$

*III. Man kan gjøre Yderleddene til Mellemled og Mellemleddene til Yderled*, hvilket ogsaa kaldes at *invertere* Proportionen.

$$\text{Bet.}\quad \underline{a : b = c : d}$$

$$\text{Sats:}\quad \underline{\underline{b : a = d : c}}$$

$$y = bc$$
$$m = ad$$
$$\text{Ifølge Bet. er:}\quad \underline{bc = ad}$$
$$\underline{y = m}$$
$$b : a = d : c$$

### b. Ved Addition.

*I. Summen af Leddene i det ene Forhold forholder sig til sit Forled eller Efterled som Summen af Leddene i det andet Forhold til sit Forled eller Efterled.*

Bet. $a : b = c : d$

Sats: $(a + b) : a = (c + d) : c$

eller: $(a + b) : b = (c + d) : d$

I første Sats er: $y = (a + b)c = ac + bc$

$$m = a(c + d) = ac + ad$$

$$ac = ac$$

Ifølge Bet. er: $bc = ad$

$$ac + bc = ac + ad$$

$$y = m$$

$$(a + b) : a = (c + d) : c$$

I anden Sats er: $y = (a + b)d = ad + bd$

$$m = b(c + d) = bc + bd$$

Ifølge Bet. er: $ad = bc$

$$bd = bd$$

$$ad + bd = bc + bd$$

$$y = m$$

$$(a + b) : b = (c + d) : d$$

*II. Summen af Forleddene forholder sig til Summen af Efterleddene som et Forholds Forled til sit Efterled.*

Bet. $a : b = c : d$

Sats: $(a + c) : (b + d) = a : b = c : d$

I første Sats er: $y = (a + c)b = ab + cb$

$$m = (b + d)a = ba + da$$

$$ab = ba$$

Ifølge Bet. er: $cb = da$

$$ab + cb = ba + da$$

$$y = m$$

$$(a + c) : (b + d) = a : b$$

Og da endvidere: $a : b = c : d$

bliver: $(a + c) : (b + d) = c : d$

Sættes denne Sætning i Brøkform, faar man:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}.$$

*Naar to Brøker er lige store, saa er altsaa enhver af dem lig en Brøk, hvis Tæller er Summen af Tællerne, og hvis Nævner er Summen af Nævnerne.*

c. Ved Subtraktion.

I. *Differentsen mellem Leddene i det ene Forhold forholder sig til sit Forled eller Efterled som Differentsen mellem Leddene i det andet Forhold til sit Forled eller Efterled.*

Bet. $a : b = c : d$

Sats: $(a - b) : a = (c - d) : c$

$(a - b) : b = (c - d) : d$

I første Sats er: $y = (a - b)c = ac - bc$

$$m = a(c - d) = ac - ad$$

$$ac = ac$$

Ifølge Bet. er: $bc = ad$

$$ac - bc = ac - ad$$

$$y = m$$

$$(a - b) : a = (c - d) : c$$

I anden Sats er: $y = (a - b)d = ad - bd$

$$m = b(c - d) = bc - bd$$

Ifølge Bet. er: $ad = bc$

$$bd = bd$$

$$ad - bd = bc - bd$$

$$y = m$$

$$(a - b) : b = (c - d) : d$$

*II. Differentsen mellem Forleddene forholder sig til Differentsen mellem Efterleddene som et Forholds Forled til sit Efterled.*

$$\text{Bet. } \underline{a : b = c : d}$$

$$\text{Sats: } \underline{\underline{(a - c) : (b - d) = a : b = c : d}}$$

I første Sats er: $y = (a - c)b = ab - cb$

$$m = (b - d)a = ba - da$$

$$ab = ba$$

Ifølge Bet. er:

$$\underline{cb = da}$$

$$\underline{ab - cb = ba - da}$$

$$\underline{y = m}$$

$$(a - c) : (b - d) = a : b$$

Og da endvidere: $\underline{a : b = c : d}$

bliver: $(a - c) : (b - d) = c : d$

## d. Ved Addition og Subtraktion.

*Summen af Forleddene forholder sig til Differentsen mellem dem som Summen af Efterleddene til Differentsen mellem dem.*

$$\text{Bet. } \underline{a : b = c : d}$$

$$\text{Sats: } \underline{\underline{(a + c) : (a - c) = (b + d) : (b - d)}}$$

$$\underline{a : b = c : d}$$

$$(a + c) : (b + d) = a : b$$

$$\text{og } \underline{(a - c) : (b - d) = a : b}$$

$$\underline{(a + c) : (b + d) = (a - c) : (b - d)}$$

$$(a + c) : (a - c) = (b + d) : (b - d)$$

## e. Ved Multiplikation.

*Man kan multiplicere et Yderled og et Mellemled med samme Tal.*

$$\text{Bet.}\quad a:b = c:d$$

$$\text{Sats:}\quad ak:bk = c:d$$
$$ak:b = ck:d$$
$$a:bk = c:dk$$
$$a:b = ck:dk$$

I alle disse Satser er: $y = adk$

$m = bck$

Ifølge Bet. er: $ad = bc$

$k = k$

$adk = bck$

$y = m$

Altsaa er alle fire Satser rigtige.

## f. Ved Division.

*Man kan dividere et Yderled og et Mellemled med samme Tal.*

$$\text{Bet.}\quad a:b = c:d$$

$$\text{Sats:}\quad \frac{a}{k}:\frac{b}{k} = c:d$$
$$\frac{a}{k}:b = \frac{c}{k}:d$$
$$a:\frac{b}{k} = c:\frac{d}{k}$$
$$a:b = \frac{c}{k}:\frac{d}{k}$$

I alle disse Satser er: $y = \frac{ad}{k}$

$m = \frac{bc}{k}$

Ifølge Bet. er: $ad = bc$

$k = k$

$\frac{ad}{k} = \frac{bc}{k}$

$y = m$

Altaa er alle fire Satser rigtige.

g. Ved Potentseren.

*Man kan ophøie alle Led i en Proportion til samme Potents.*

$$a : b = c : d$$

Sats: $a^n : b^n = c^n : d^n$

$$y = a^n . d^n = (ad)^n$$

$$m = b^n . c^n = (bc)^n$$

Ifølge Bet. er: $ad = bc$

$$(ad)^n = (bc)^n$$

$$y = m$$

$$a^n : b^n = c^n : d^n$$

§ 42.

Omdannelse af to Proportioner til en tredie.

a. Ved Addition.

*Naar to Proportioner har samme Forholdsexponent, saa kan de adderes Led for Led.*

Bet. $a : b = c : d = k$

$$a' : b' = c' : d' = k$$

Sats: $(a + a') : (b + b') = (c + c') : (d + d')$

$$a : b = a' : b' = k$$

$$(a + a') : (b + b') = a : b = k$$

$$c : d = c' : d' = k$$

$$(c + c') : (d + d') = c : d = k$$

$$(a + a') : (b + b') = (c + c') : (d + d').$$

b. Ved Subtraktion.

*Naar to Proportioner har samme Forholdsexponent, saa kan de subtraheres Led for Led.*

$$\text{Bet.}\quad a : b = c : d = k$$
$$a' : b' = c' : d' = k$$
$$\text{Sats:}\quad (a - a') : (b - b') = (c - c') : (d - d')$$
$$a : b = a' : b' = k$$
$$(a - a') : (b - b') = a : b = k$$
$$c : d = c' : d' = k$$
$$(c - d) : (c' - d') = c : d = k$$
$$(a - a') : (b - b') = (c - c') : (d - d')$$

c. Ved Multiplikation.

*To Proportioner kan multipliceres Led for Led.*

$$\text{Bet.}\quad a : b = c : d$$
$$a' : b' = c' : d'$$
$$\text{Sats:}\quad aa' : bb' = cc' : dd'$$
$$y = aa' \,.\, dd' = ad \,.\, a'd'$$
$$m = bb' \,.\, cc' = bc \,.\, b'c'$$

Ifølge Bet. er: $ad = bc$

$$a'd' = b'c'$$
$$ad \,.\, a'd' = bc \,.\, b'c'$$
$$y = m$$
$$aa' : bb' = cc' : dd'$$

d. Ved Division.

*To Proportioner kan divideres Led for Led.*

$$\text{Bet.}\quad a : b = c : d$$
$$a' : b' = c' : d'$$
$$\text{Sats:}\quad \frac{a}{a'} : \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} : \frac{d}{d'}$$
$$y = \frac{a}{a'} \cdot \frac{d}{d'} = \frac{ad}{a'd'}$$
$$m = \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'} = \frac{bc}{b'c'}$$

Ifølge Bet. er:

$$\begin{array}{c} ad = bc \\ \underline{a'd' = b'c'} \\ \underline{\frac{ad}{a'd'} = \frac{bc}{b'c'}} \\ \underline{y = m} \\ \frac{a}{a'} : \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} : \frac{d}{d'} \end{array}$$

§ 43.

Leddenes Afhængighed af hinanden.

1. *I en Proportion er et Yderled lig Produktet af Mellemleddene divideret med det andet Yderled og et Mellemled lig Produktet af Yderleddene divideret med det andet Mellemled.*

Bet. $\underline{a : b = c : d}$

Sats: $\underline{\underline{a = \frac{bc}{d}}}$; $\underline{\underline{b = \frac{ad}{c}}}$; $\underline{\underline{c = \frac{ad}{b}}}$; $\underline{\underline{d = \frac{bc}{a}}}$

$$\begin{array}{cccc} ad = bc & ad = bc & ad = bc & ad = bc \\ \underline{d = d} & \underline{c = c} & \underline{b = b} & \underline{a = a} \\ a = \frac{bc}{d} & \frac{ad}{c} = b & \frac{ad}{b} = c & d = \frac{bc}{a} \end{array}$$

2. *I en sammenhængende Proportion er Mellemproportionalleddet lig Kvadratroden af Yderleddenes Produkt.*

Bet. $\underline{a : x = x : b}$

Sats: $\underline{\underline{x = \sqrt{ab}}}$

$$\begin{array}{c} \underline{a : x = x : b} \\ \underline{x \,.\, x = x^2 = ab} \\ x = \sqrt{ab} \end{array}$$

3. *Naar i to Proportioner de tre Led er parvis lige store, saa er ogsaa de fjerde Led lige store.*

$$\begin{array}{rl}
\text{Bet.} & a : b = c : d \\
& a' : b' = c' : d' \\
& a = a';\ b = b';\ c = c' \\
\hline
\text{Sats:} & \underline{\underline{d = d'}}
\end{array}$$

$$d = \frac{bc}{a}$$

$$d' = \frac{b'c'}{a'}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Nu er:} & bc = b'c' \\
& \underline{a = a'} \\
& \underline{\frac{bc}{a} = \frac{b'c'}{a'}} \\
& d = d'
\end{array}$$

## II. Om irrationale Tal.

### § 44.

Bestemmelse af Begrebet irrationalt Tal.

1. *Naar en Brøk, som ikke er lig et helt Tal, ophøies til en Potents, hvis Exponent er et helt Tal, saa er Potentsen ikke lig et helt Tal.*

Er nemlig $\frac{a}{b}$ en Brøk, som ikke er lig et helt Tal, saa kan Tæller og Nævner divideres med samme Tal, indtil de er indbyrdes Primtal. Er den derved erholdte Brøk $\frac{r}{s}$, saa er:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{r}{s}\right)^n = \frac{r^n}{s^n}$$

Men naar r og s er indbyrdes Primtal, saa er ogsaa $r^n$ og $s^n$ indbyrdes Primtal. $\frac{r^n}{s^n}$ kan altsaa ikke forkortes, og er følgelig ikke lig noget helt Tal.

2. *Naar en Rod af et helt Tal ikke er et helt Tal, saa er den heller ingen Brøk.*

Er nemlig T et helt Tal og $\sqrt[n]{T}$ ikke et et helt Tal, saa blev, dersom $\sqrt[n]{T}$ var en Brøk $\frac{p}{q}$:

$$\frac{\sqrt[n]{T}=\frac{p}{q}}{T=\left(\frac{p}{q}\right)^n}$$

Men naar $\frac{p}{q}$ ikke er lig et helt Tal, saa er $\left(\frac{p}{q}\right)^n$ heller ikke lig et helt Tal, altsaa ikke lig T. $\sqrt[n]{T}$ kan altsaa ikke være en Brøk.

3. Naar en Rod af et helt Tal ikke er et helt Tal og altsaa heller ingen Brøk, saa kan man dog stedse finde to Tal, hvis Differents er en given Brøkenhed, og som ved at ophøies til Rodexponenten giver to Potentser, mellem hvilke det givne Tal ligger. Er saaledes $\sqrt[n]{T}$ ikke et helt Tal, og er den givne Brøkenhed $\frac{1}{q}$, saa kan man udregne:

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n \quad \left(\frac{2}{q}\right)^n \quad \left(\frac{3}{q}\right)^n \dots$$

og fortsætte, indtil man finder en Brøk, hvoraf $n^{te}$ Potents er større end T, men saaledes, at den foregaaende Brøk ophøiet i $n^{te}$ Potents er mindre end T. Kaldes disse Brøker $\frac{p}{q}$ og $\frac{p+1}{q}$, saa er altsaa:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n < T < \left(\frac{p+1}{q}\right)^n$$

4. *Et irrationalt Tal er et Tal, som hverken er et helt Tal eller en Brøk, men som er af en saadan Beskaffenhed, at man altid kan finde to Brøker, hvis Differents kan gjøres saa liden, man vil, og mellem hvilke det ligger.* Disse to Brøker kaldes det irrationale Tals *Grændser.* I Modsætning til irrationale Tal kaldes alle hele Tal og Brøker *rationale.*

Naar en Rod af et helt Tal ikke er et helt Tal, saa er den irrational. Er nemlig $\sqrt[n]{T}$ ikke et helt Tal, og:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n < T < \left(\frac{p+1}{q}\right)^n$$

saa er:
$$\frac{p}{q} < \sqrt[n]{T} < \frac{p+1}{q}$$

$\sqrt[n]{T}$ er altsaa hverken et helt Tal eller en Brøk, men den ligger mellem to Brøker, hvis Differents er $\frac{1}{q}$; og da q kan vælges vilkaarligt, kan $\frac{1}{q}$ gjøres saa liden man vil.

Et Udtryk, som i Almindelighed er irrationalt, kan under visse Betingelser blive rationalt. Saaledes er i Regelen $\sqrt[n]{T}$ irrational; men f. Ex. naar $n = 2$ og $T = 4$, er $\sqrt[n]{T}$ rational.

5. Af at irrationale Tals Storhed alene bestemmes ved Grændsernes Storhed følger, at *to irrationale Tal siges at være lige store, naar deres Grændser er lige stor.*

6. *Naar to rationale Tal ligger mellem de samme Grændser, saa er de lige store.*

$$\text{Bet.} \quad \frac{t}{n} < a < \frac{t+1}{n}$$
$$\frac{t}{n} < b < \frac{t+1}{n}$$

hvor $\frac{1}{n}$ kan gjøres saa liden, man vil.

$$\text{Sats:} \quad \underline{\underline{a = b}}$$

Dersom ikke a var lig b, kunde man sætte:

$$\underline{a > b} \qquad \text{eller} \qquad \underline{b > a}$$

$$a = b + k < \frac{t+1}{n} \qquad\qquad b = a + k < \frac{t+1}{n}$$

$$\underline{\quad b \quad > \frac{t}{n}} \qquad\qquad \underline{\quad a \quad > \frac{t}{n}}$$

$$k < \frac{1}{n} \qquad\qquad k < \frac{1}{n}$$

Men dette er umuligt, da $\frac{1}{n}$ kan gjøres saa liden, man vil, altsaa ogsaa mindre end k. Altsaa er:

$$a = b$$

7. Man regner med irrationale Tal ved at regne med deres Grændser. Er saaledes:

$$\frac{t}{n} < a < \frac{t+1}{n}$$

ligger a . b mellem $\frac{t}{n}$ . b og $\frac{t+1}{n}$ . b:

$$\frac{t}{n} . b < a . b < \frac{t+1}{n} . b$$

---

# Tredie Afsnit.

## Om negative Tal.

### Indledning.

§ 45.

Bestemmelse af Begrebet negativt Tal.

1. Man tænker sig Talrækken forlænget tilbage fra Nul, saaledes at hvert følgende Tal er en Enhed mindre end det foregaaende, og kalder de saaledes erholdte Tal *negative*. Ved et negativt Tals *Talværdi* forstaar man det Tal, som angiver, hvormange Pladse det staar tilbage fra Nul, altsaa hvormange Enheder det er mindre end Nul. Man betegner de negative Tal ved, at man opskriver deres Talværdi med almindelige Taltegn, og derpaa sætter et Mærke til for at betegne, at de er negative. Vælger man til Mærke et n nedenfor Tallet til Høire, saa bliver altsaa Talrækken:

$$\ldots\ldots\ 6_n\ \ 5_n\ \ 4_n\ \ 3_n\ \ 2_n\ \ 1_n\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ldots\ldots$$

I Modsætning til de negative Tal kaldes de hidtil betragtede Tal *positive*. Man ser, at den oprindelige Definition ikke passer for de negative Tals Vedkommende, idet der ikke kan tænkes nogen Mængde, som er mindre end Nul. Forstaar man derimod ved et Tal den Størrelse, som staar paa en bestemt Plads i Talrækken, saa omfatter denne Definition ogsa de negative Tal.

2. *Er Minuenden ikke mindre end Subtraktor, saa kan Differentsen findes ved fra Minuenden at tælle saa mange Pladse baglænds i Talrækken, som Subtraktor indeholder Enheder.*

Er nemlig: $a - b = c$

saa er: $c + b = a$

Man kommer altsaa til a ved at tælle b Pladse fremad fra c, eller c staar b Pladse bagenfor a.

3. Er Minuenden mindre end Subtraktor, saa passer ikke længer den gamle Definition paa Subtraktion, idet der ikke gives noget Tal saa stort, at naar den større Subtraktor adderes dertil, saa er Summen lig den mindre Minuend. *Man forstaar i dette Tilfælde ved Subtraktion at tælle saa mange Pladse baglænds fra Minuenden, som Subtraktor indeholder Enheder.*

4. Af No. 3 følger ligefrem:

$$0 - a = a_n$$

Man har derfor valgt at betegne de negative Tal som Differentser med Nul som Minuend og Talværdien som Subtraktor. Og for Kortheds Skyld udelades Nul, der da bliver at underforstaa, naar der ingen anden Minuend er. Istedetfor $a_n$ skrives altsaa stedse $-a$. Paa samme Maade skrives ofte $0 + a$ eller blot $+ a$ istedetfor a. Plus og minus kaldes Størrelsens *Fortegn*.

5. *Naar Minuenden er positiv og mindre end Subtraktor, saa er Differentsen negativ, og dens Talværdi er lig Subtraktor minus Minuenden.*

Bet. $\underline{a < b}$

Sats: $\underline{\underline{a - b = -(b - a)}}$

Naar man fra a tæller b Pladse baglænds, saa kommer man saa langt bagenfor Nul, som b indeholder Enheder flere end a, det vil sige, man kommer b — a Pladse bagenfor Nul. Altsaa:

$$a - b = -(b - a)$$

6. *Naar Minuenden er negativ, saa er Differentsen negativ, og dens Talværdi er lig Summen af Minuendens Talværdi og Subtraktor.*

Sats: $\underline{\underline{-a - b = -(a + b)}}$

— a staar a Pladse bagenfor Nul. Naar man nu derfra subtraherer b eller tæller b Pladse videre tilbage, kommer man i det Hele a + b Pladse bagenfor Nul. Altsaa:

$$-a - b = -(a + b)$$

# Første Kapitel.

## Addition og Subtraktion.

### I. Addition.

Begrebsbestemmelser ved Addition med negative Tal.

1. *Naar første Addend er negativ, saa er Summen lig Differentsen mellem anden Addend og første Addends Talværdi.*

Sats: $\underline{\underline{-a + b = b - a}}$

Hvad enten man fra Nul tæller a Pladse baglænds og derpaa b Pladse fremad, eller man fra Nul tæller b Pladse fremad og derpaa a Pladse tilbage, maa man komme til samme Punkt i Talrækken. Det første udtrykkes ved — a + b, det andet ved b — a. Altsaa:

$$-a + b = b - a$$

2. Er anden Addend negativ, saa passer ikke længere den gamle Definition paa Addition, idet man ikke fra første Addend kan tælle et negativt Antal Pladse fremad. Man maa derfor opstille en ny Definition for dette Tilfælde, og man har valgt følgende: *Ved til et Tal at addere et negativt Tal forstaar man fra første Addend at subtrahere anden Addends Talværdi.*

$$a + (-b) = a - b$$

3. *Er begge Addender negative, saa er Summen et negativt Tal, hvis Talværdi er Summen af begge Addenders Talværdier.*

Sats: $\underline{\underline{(-a) + (-b) = -(a + b)}}$

$(-a) + (-b) = (-a) - b = -(a + b)$ (se § 45 No. 6).

## § 47.

### Additionslæren med negative Tal.

Sætningerne i § 5 og 6, naar nogle af eller alle Størrelserne er negative, bevises paa den i § 28 angivne Maade. Som Exempel anføres følgende Sætning (§ 5).

*Naar en Størrelse adderes til første Addend, bliver derved samme Størrelse adderet til Summen.*

Sats:

$$\underline{\underline{[(-a) + (-k)] + (-b) = [(-a) + (-b)] + (-k)}}$$

$$[(-a) + (-k)] + (-b) = [-(a + k)] + (-b) = -(a + k + b)$$

$$[(-a) + (-b)] + (-k) = [-(a + b)] + (-k) = -(a + b + k)$$

$$\overline{[(-a) + (-k)] + (-b) = [(-a) + (-b)] + (-k)}$$

## II. Subtraktion.

### § 48.

Begrebsbestemmelser ved Subtraktion med negative Tal.

1. I § 45 No. 3 har vi opstillet en ny Definition paa Subtraktion, og i samme § No. 5 og 6 har vi deraf udledet, hvorledes Differentsen bliver at bestemme, naar Minuenden er mindre end Subtraktor eller negativ. Efterat Addition med negative Tal nu er fremstillet, skal vi imidlertid optage den gamle Definition, nemlig at Differentsen er et saa stort Tal, at naar Subtraktor adderes dertil, bliver Summen lig Minuenden; og vi skal da først bevise, at denne Definition fører til samme Resultat som den i § 45 No. 3 opstillede, nemlig til de i samme § No. 5 og 6 fremsatte Sætninger.

*a. Naar Minuenden er positiv og mindre end Subtraktor, saa er Differentsen negativ, og dens Talværdi er lig Subtraktor minus Minuenden.*

Bet. $\underline{a < b}$

Sats: $\underline{\underline{a - b = -(b - a)}}$

I denne § vil vi kalde Satsens Minuend m, dens Subtraktor s og dens Differents d. Man faar da:

$$\underline{d + s = -(b - a) + b = b - (b - a) = b - b + a = a = m}$$

$$a - b = -(b - a)$$

*b. Naar Minuenden er negativ, saa er Differentsen negativ, og dens Talværdi er lig Summen af Minuendens Talværdi og Subtraktor.*

Sats: $\underline{\underline{-a - b = -(a + b)}}$

$$d + s = -(a + b) + b = b - (a + b) = -(a + b - b) =$$
$$\underline{-a = m}$$

$$-a - b = -(a + b)$$

2. *Naar Subtraktor er negativ, saa er Differentsen lig Summen af Minuenden og Subtraktors Talværdi.*

$$\text{Sats: } \underline{\underline{a - (-b) = a + b}}$$

$$\underline{d + s = a + b + (-b) = a + b - b = a = m}$$

$$a - (-b) = a + b$$

## § 49.

### Subtraktionslæren med negative Tal.

1. Sætningerne i § 8 og 9, naar nogle af eller alle Størrelserne er negative, bevises paa den i § 28 angivne Maade. Som Exempel anføres følgende Sætning (§ 8 No. 1).

*Naar en Størrelse adderes til Minuenden, bliver derved samme Størrelse adderet til Differentsen.*

$$\text{Sats: } \underline{\underline{[(-a) + (-k)] - (-b) = [(-a) - (-b)] + (-k)}}$$

$$[(-a) + (-k)] - (-b) = [-(a + k)] + b =$$
$$b - (a + k) = b - a - k$$
$$\underline{[(-a) - (-b)] + (-k) = [-a + b] - k = b - a - k}$$
$$[(-a) + (-k)] - (-b) = [(-a) - (-b)] + (-k)$$

2. Det hænder undertiden, at en Størrelse faar to Fortegn, og i dette Tilfælde bestemmes det endelige Fortegn af Regelen: *Lige Fortegn giver plus, ulige minus.* Man har nemlig:

$$+ (+ a) = 0 + (0 + a) = 0 + 0 + a = + a$$
$$+ (- a) = 0 + (0 - a) = 0 + 0 - a = - a$$
$$- (+ a) = 0 - (0 + a) = 0 - 0 - a = - a$$
$$- (- a) = 0 - (0 - a) = 0 - 0 + a = + a$$

# Andet Kapitel.

## Multiplikation og Division.

### I. Multiplikation.

### § 50.

Begrebsbestemmelser ved Multiplikation med negative Tal.

1. *Naar Multiplikanden er negativ, saa er Produktet et negativt Tal, hvis Talværdi er Produktet af Multiplikandens Talværdi og Multiplikator.*

Sats: $\underline{\underline{(-a)b = -ab}}$

$$\begin{aligned}(-a)b &= (-a) + (-a) + (-a) + \ldots \text{b Gange} \\ &= -(a + a + a + \ldots \text{b Gange}) \\ &= -ab\end{aligned}$$

2. Er Multiplikator negativ, saa passer ikke længer den gamle Definition paa Multiplikation, idet man ikke kan sætte et Tal et negativt Antal Gange som Addend. Man maa derfor opstille en ny Definition for dette Tilfælde, og man har valgt følgende: *Ved at multiplicere et Tal med et negativt Tal forstaar man at multiplicere det med Multiplikators Talværdi og give Produktet Fortegnet minus.*

$$a(-b) = -ab$$

3. *Er begge Faktorer negative, saa er Produktet lig Produktet af Faktorernes Talværdier.*

Sats: $\underline{\underline{(-a)(-b) = ab}}$

$$(-a)(-b) = -[(-a)b] = -(-ab) = ab$$

Disse tre Sætninger kan sammenfattes i de Ord: *Naar to Størrelser skal multipliceres, saa multiplicerer man deres Talværdier og giver Produktet det Fortegn, som fremgaar af Regelen: Lige Fortegn giver plus, ulige minus.*

## § 51.

### Multiplikationslæren med negative Tal.

Sætningerne i § 11 og 12, naar nogle af Størrelserne eller alle er negative, bevises paa den i § 28 angivne Maade. Som Exempel anføres følgende Sætning (§ 11 No. 1).

*En Sum multipliceres med et Tal ved at multiplicere hver af Addenderne med Tallet.*

Sats: $\underline{\underline{[(-a)+(-k)](-b) = (-a)(-b)+(-k)(-b)}}$

$$[(-a)+(-k)](-b) = [-(a+k)](-b) = (a+k)b = ab + kb$$

$$\frac{(-a)(-b)+(-k)(-b) = ab + kb}{[(-a)+(-k)](-b) = (-a)(-b)+(-k)(-b)}$$

## II. Division.

## § 52.

### Begrebsbestemmelser ved Division med negative Tal.

1. *Naar Dividenden er negativ, saa er Kvotienten et negativt Tal, hvis Talværdi er Kvotienten mellem Dividendens Talværdi og Divisor.*

Sats: $\underline{\underline{(-a):b = -(a:b)}}$

I denne § vil vi betegne Satsens Dividend med D, dens Divisor med d og dens Kvotient med k. Man har da:

$$\frac{kd = [-(a:b)]b = -[(a:b)b] = -a = D}{(-a):b = -(a:b)}$$

2. *Naar Divisor er negativ, saa er Kvotienten et negativt Tal, hvis Talværdi er Kvotienten mellem Dividenden og Divisors Talværdi.*

Sats: $\underline{\underline{a:(-b) = -(a:b)}}$

$$\frac{kd = [-(a:b)](-b) = (a:b)b = a = D}{a:(-b) = -(a:b)}$$

3. *Naar baade Dividenden og Divisor er negative, saa er Kvotienten lig Kvotienten mellem deres Talværdier.*

Sats: $\underline{\underline{(-a):(-b) = a:b}}$

$$\frac{kd = (a:b)(-b) = -[(a:b)b] = -a = D}{(-a):(-b) = a:b}$$

Disse tre Sætninger kan sammenfattes i de Ord: *Man dividerer to Størrelser ved at dividere deres Talværdier og give Kvotienten det Fortegn, som fremgaar af Regelen: Lige Fortegn giver plus, ulige minus.*

## § 53.

### Divisionslæren med negative Tal.

Sætningerne i § 14 og 15, naar nogle af Størrelserne eller alle er negative, bevises paa den i § 28 angivne Maade. Som Exempel anføres følgende Sætning (§ 15 No. 1).

*En Differents divideres med et Tal ved at dividere Minuenden og Subtraktor med Tallet.*

Sats:

$$\underline{\underline{[(-a)-(-k)]:(-b) = (-a):(-b)-(-k):(-b)}}$$

$$[(-a)-(-k)]:(-b) = -[(k-a):b] =$$
$$-(k:b-a:b) = a:b-k:b$$
$$\frac{(-a):(-b)-(-k):(-b) = a:b-k:b}{[(-a)-(-k)]:(-b) = (-a):(-b)-(-k):(-b)}$$

# Tredie Kapitel.

## Potentser og Rødder.

### I. Potentser.

### § 54.

Begrebsbestemmelser ved Potentser med negative Tal.

1. *Naar Roden er negativ, saa er Potentsen positiv, dersom Exponenten er et lige Tal, negativ, dersom Exponenten er et ulige Tal; og Potentsens Talværdi er lig Rodens Talværdi ophøiet til Exponenten.*

$$\text{Sats:}\quad (-a)^{2n} = a^{2n}$$

$$\underline{(-a)^{2n+1} = -(a^{2n+1})}$$

$$(-a)^2 = (-a)\,(-a) = a^2$$
$$(-a)^3 = (-a)^2(-a) = a^2\,(-a) = -a^3$$
$$(-a)^4 = (-a)^3(-a) = (-a^3)\,(-a) = a^4$$

Fortsættes saaledes, saa faar man, at hveranden Potents er positiv og hveranden negativ, og at de Potentser er positive, hvis Exponenter er lige, medens de er negative, hvis Exponenter er ulige.

2. Er Exponenten negativ, saa passer ikke længer den gamle Definition paa en Potents, idet man ikke kan sætte Roden et negativt Antal Gange som Faktor. Man maa da opstille en ny Definition for dette Tilfælde, og man har valgt følgende: *Ved en Potents, hvis Exponent er negativ, forstaar man en Brøk, hvis Tæller er 1, og hvis Nævner er Roden ophøiet til Exponentens Talværdi:*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Er Exponenten Nul, saa tiltrænger man ogsaa en ny Definition, og *man forstaar i dette Tilfælde ved Potentsen Enheden*: $a^0 = 1.$

## § 55.

### Potentslæren med negative Tal.

Sætningerne i § 17 og 18, naar nogle af eller alle Størrelserne er lig Nul eller negative, bevises paa den i § 28 angivne Maade. Som Exempler anføres følgende Sætninger (§ 17 No. 1, 2 og 3).

1. *Et Produkt ophøies til en Potents ved at ophøie hver af Faktorerne til Exponenten.*

$$\text{Sats: } \underline{\underline{(ab)^{-n} = a^{-n}\,b^{-n}}}$$

$$(ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n b^n}$$

$$a^{-n} b^{-n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{1}{a^n b^n}$$

$$(ab)^{-n} = a^{-n} b^{-n}$$

2. *To Potentser med samme Rod multipliceres ved at beholde Roden og addere Exponenterne.*

$$\text{Sats: } \underline{\underline{a^{-n}a^{-p} = a^{(-n)+(-p)}}}$$

$$a^{-n}a^{-p} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^n \cdot a^p} = \frac{1}{a^{n+p}}$$

$$a^{(-n)+(-p)} = a^{-(n+p)} = \frac{1}{a^{n+p}}$$

$$a^{-n}a^{-p} = a^{(-n)+(-p)}$$

3. *En Potents af en Potents er lig Roden ophøiet til Produktet af Exponenterne.*

$$\text{Sats: } \underline{\underline{(\ ^{-n})^{-p} = a^{(-n)(-p)}}}$$

$$(a^{-n})^{-p} = \left(\frac{1}{a^n}\right)^{-p} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{np}}\right)^p} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{np}}\right)} = a^{np}$$

$$a^{(-n)(-p)} = a^{np}$$

$$(a^{-n})^{-p} = a^{(-n)(-p)}$$

Er kun den ene Exponent negativ, faar man:

Sats: $(a^n)^{-p} = a^{n(-p)}$

$$(a^n)^{-p} = \frac{1}{(a^n)^p} = \frac{1}{a^{np}}$$

$$a^{n(-p)} = a^{-np} = \frac{1}{a^{np}}$$

$$(a^n)^{-p} = a^{n(-p)}$$

## II. Rødder.

§ 56.

Begrebsbestemmelser ved Rødder med negative Tal.

1. *En lige Rod af et positivt Tal har to Værdier, en positiv og en negativ, med lige store Talværdier.*

Bet. $\sqrt[2n]{a} = b$

Sats: $\sqrt[2n]{a} = -b$

Kaldes Roden r, Exponenten e og Potentsen p, saa er:

$$r^e = (-b)^{2n} = b^{2n} = a = p.$$

$$-b = \sqrt[2n]{a}$$

En bestemt af disse Værdier betegnes ved det positive eller negative Fortegn: $+\sqrt[2n]{a}$ eller $-\sqrt[2n]{a}$. En hvilkensomhelst af dem betegnes ved det ubestemte Fortegn: $\pm\sqrt[2n]{a}$.

2. *En ulige Rod af et negativt Tal er negativ, og dens Talværdi er den samme Rod af Potentsens Talværdi.*

Bet. $\sqrt[2n+1]{a} = b$

Sats: $\sqrt[2n+1]{-a} = -b$

$$r^e = (-b)^{2n+1} = -(b^{2n+1}) = -a = p$$

$$-b = \sqrt[2n+1]{-a}$$

3. *En lige Rod af et negativt Tal er hverken positiv eller negativ.*

Sættes nemlig: $\sqrt[2n]{-a} = x$, saa kan x hverken være positiv eller negativ, da ethvert positivt og negativt Tal ved at ophøies til den lige Exponent 2n giver et positivt Tal, og altsaa ikke kan være lig — a. Et saadant Tal, der hverken er positivt eller negativt, kaldes *imaginært.* I Modsætning hertil kaldes alle positive og negative Tal *reelle.*

# Tillæg til tredie Afsnit.

## I. Den arithmetiske Række.

### § 57.

Begrebsbestemmelse ved og Summation af den arithmetiske Række.

1. Ved den *arithmetiske Række* forstaar man en Række Tal af en saadan Beskaffenhed, at Differentsen mellem hvert Tal og det foregaaende er den samme. Ethvert af Tallene kaldes et *Led* i Rækken, og Differentsen mellem et Led og det foregaaende kaldes Rækkens *Differents.*

En Række, hvis Differents er positiv, kaldes *tiltagende*, idet Leddene bliver større og større; er Differentsen negativ, kaldes Rækken *aftagende*, idet Leddene bliver mindre og mindre.

2. *Ethvert Led i en arithmetisk Række er lig Summen af det første Led og det Produkt, som fremkommer, naar Rækkens Differents multipliceres med Leddets Nummer minus Enheden.*

Er $a_1\ a_2\ a_3 \ldots$ Rækkens Led og d dens Differents, saa er altsaa:

Sats: $\underline{\underline{a_n = a_1 + (n - 1)\, d}}$

Naar menlig Differentsen mellem et Led og det foregaaende er d, saa maa et Led være lig det foregaaende forøget med d. Altsaa:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \\
&\ldots\ldots\ldots \\
a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d
\end{aligned}
$$

3. *Ethvert Led i den arithmetiske Række er lig Summen af Rækkens første Led og det Produkt, som fremkommer, naar Rækkens Differents multipliceres med Antallet af Rækkens Led minus Leddets Nummer fra Rækkens Ende.*

Er nemlig $t_1\, t_2\, t_3 \ldots$ Rækkens Led fra Enden og d dens Differents, og bestaar Rækken af n Led, saa er $t_n$ Rækkens sidste Led fra Enden eller dens første Led, og:

Sats: $\underline{\underline{t_x = t_n + (n-x)d}}$

Ifølge 2 er: $t_1 = t_n + (n-1)d$

Altsaa er:

$$
\begin{aligned}
t_2 &= t_n + (n-2)d \\
t_3 &= t_n + (n-3)d \\
&\ldots\ldots\ldots \\
t_x &= t_n + (n-x)d
\end{aligned}
$$

4. *Summen af to Led, hvoraf det ene staar ligesaa langt fra Rækkens Begyndelse som det andet fra dens Ende, er lig Summen af første og sidste Led.*

Kaldes Leddene fra Begyndelsen $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ og fra Enden $t_1\, t_2\, t_3 \ldots$, saa er $a_n = t_1$; $a_{n-1} + t_2 \ldots a_1 = t_n$, og

Sats: $\underline{\underline{a_x + t_x = a_1 + t_1}}$

| | |
|---|---|
| $a_x = a_1 + (x-1)d$ | $a_1 = a_1$ |
| $t_x = t_n + (n-x)d$ | $t_1 = t_n + (n-1)d$ |
| $a_x + t_x = a_1 + t_n + (x-1+n-x)d$ | $a_1 + t_1 = a_1 + t_n + (n-1)d$ |
| $= 2a_1 + (n-1)d$ | $= 2a_1 + (n-1)d$ |

$$a_x + t_x = a_1 + t_1$$

5. *Summen af en arithmetisk Række er lig det halve Produkt af Leddenes Antal og Summen af første og sidste Led.*

Er Rækkens Sum s, og benyttes samme Betegnelse som ovenfor, saa er:

Sats: $\underline{\underline{s = \frac{(a_1 + t_1)n}{2}}}$

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$s = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$$
$$2s = (a_1 + t_1) + (a_2 + t_2) + \ldots + (a_n + t_n)$$
$$= (a_1 + t_1) + (a_1 + t_1) + \ldots + (a_1 + t_1) \text{ (se No. 4)}$$
$$= (a_1 + t_1)n$$
$$s = \frac{(a_1 + t_1)n}{2}$$

## II. Den geometriske Række.

### § 58.

Begrebsbestemmelse ved og Summation af den geometriske Række.

1. Ved den *geometriske Række* forstaar man en Række Tal af en saadan Beskaffenhed, at Kvotienten mellem hvert Tal og det foregaaende overalt er den samme. Ethvert af Tallene kaldes et *Led* i Rækken, og Kvotienten mellem et Led og det foregaaende kaldes Rækkens *Exponent*.

En Række, hvis Exponenter er større end Enheden, kaldes *tiltagende*, idet Leddene bliver større og større; er Exponenten mindre end Enheden, kaldes Rækken *aftagende*, idet Leddene bliver mindre og mindre.

2. *Ethvert Led i en geometrisk Række er lig Produktet af Rækkens første Led og dens Exponent ophøiet til en Potents, hvis Exponent er Leddets Nummer minus Enheden.*

Er $a_1\ a_2\ a_3 \ldots$ Rækkens Led og dens Exponent m, saa er:

$$\text{Sats: } \underline{\underline{a_n = a_1 m^{n-1}}}$$

Er nemlig Kvotienten mellem et Led og det foregaaende m, saa er et Led lig det foregaaende multipliceret med m; altsaa:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 m \\ a_3 &= a_2 m = a_1 m^2 \\ a_4 &= a_3 m = a_1 m^3 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n &= a_{n-1} m = a_1 m^{n-1} \end{aligned}$$

3. *Summen af en geometrisk Række er en Brøk, hvis Tæller er Differentsen mellem det Produkt, der fremkommer, naar Rækkens første Led multipliceres med Exponenten ophøiet til Leddenes Antal, og første Led, og hvis Nævner er Exponenten minus Enheden.*

Benyttes de samme Betegnelser som ovenfor, og er s Rækkens Sum, saa er:

$$\text{Sats: } s = \frac{a_1 m^n - a_1}{m - 1}$$

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
$$= a_1 + a_1 m + a_1 m^2 + \ldots + a_1 m^{n-1}$$
$$m = m$$

$$ms = a_1 m + a_1 m^2 + a_1 m^3 + \ldots + a_1 m^n$$
$$\text{Subtraheres: } s = a_1 + a_1 m + a_1 m^2 + \ldots + a_1 m^{n-1}$$
$$ms - s = a_1 m^n - a_1$$
$$s(m - 1) = a_1 m^n - a_1$$
$$s = \frac{a_1 m^n - a_1}{m - 1}$$

# Fjerde Afsnit.

## Anvendelse af det Foregaaende.

### Første Kapitel.

#### De fire Regningsarter.

§ 59.

Addition og Subtraktion med hele Tal.

1. Etziffrede Tal adderes ifølge Definitionen ved at tælle saa mange Pladse frem i Talrækken fra første Addend, som anden Addend indeholder Enheder. Ved flerziffrede Tal vilde denne Fremgangsmaade blive meget besværlig; man benytter derfor en anden Fremgangsmaade, som bestaar i, at man adderer Addendernes Enere for sig, deres Tiere for sig o. s. v. For lettere at kunne udføre Additionen skriver man da gjerne Addenderne under hinanden saaledes, at deres Enheder af samme dekadiske

Orden kommer til at staa lige under hinanden. 2351 + 3425 findes f. Ex. saaledes:

$$\begin{array}{r} 2351 \\ 3425 \\ \hline 5776 \end{array}$$

Rigtigheden af denne Fremgangsmaade indsees saaledes. Et T og T' to Tal, som indeholder a og a' Enere, b og b' Tiere, c og c' Hundreder o. s. v., saa er:

$$\begin{array}{l} T = a + b \,.\, 10 + c \,.\, 100 + \ldots \\ T' = a' + b' \,.\, 10 + c' \,.\, 100 + \ldots \\ \hline T + T' = (a + a') + (b + b')\, 10 + (c + c')\, 100 + \ldots \end{array}$$

Det hænder undertiden, at det Antal Gange, en af de dekadiske Enheder forekommer i Summen, er større end ni. I dette Tilfælde opskrives kun Antallets Enere, medens Antallets Tiere adderes til Antallet af den næste dekadiske Enhed. 375 + 2387 + 3712 findes f. Ex. saaledes:

$$\begin{array}{r} 375 \\ 2387 \\ 3712 \\ \hline 6474 \end{array}$$

2. Etziffrede Tal subtraheres ifølge Definitionen ved at undersøge, hvilket Tal Subtraktor maa adderes til for at give en Sum lig Minuenden. Ved flerziffrede Tal vilde denne Fremgangsmaade blive meget besværlig; man benytter derfor en anden Fremgangsmaade, som bestaar i, at man subtraherer Enerne for sig, Tierne for sig o. s. v. For Letheds Skyld skrives da gjerne Subtraktor under Minuenden, saaledes at Enheder af samme dekadiske Orden sættes lige under hinanden. 8693 — 3461 findes f. Ex. saaledes:

$$\begin{array}{r} 8693 \\ \underline{3461} \\ 5232 \end{array}$$

Rigtigheden af denne Fremgangsmaade indsees saaledes. Benyttes samme Betegnelse som i No. 1, saa er:

$$\begin{array}{l} T = a + b \,.\, 10 + c \,.\, 100 + \ldots \\ \underline{T' = a' + b' \,.\, 10 + c' \,.\, 100 + \ldots} \end{array}$$

$$T - T' = (a - a') + (b - b')\, 10 + (c - c')\, 100 + \ldots$$

Det hænder undertiden, at Minuenden indeholder flere Enheder af en dekadisk Orden end Subtraktor. I dette Tilfælde borttages eller *laanes* en af Minuendens Enheder af næste Orden; denne opløses i ti Enheder af den første Orden og adderes til de, man før havde. At man har laant en Enhed af en dekadisk Orden, betegnes ved at sætte en Prik over de dekadiske Enheder, hvoraf en er bortlaant. 6225 — 3742 findes f. Ex. saaledes:

$$\begin{array}{r} \dot{6}\dot{2}25 \\ \underline{3742} \\ 2483 \end{array}$$

## § 60.

### Multiplikation og Division med hele Tal.

1. To etziffrede Tal multipliceres ifølge Definitionen. For at slippe hvergang at udføre denne Regning, har man en Gang for alle udført den og opskrevet Produkterne i et Schema, som kaldes den lille Multiplikationstabel.

Naar man skal multiplicere flerziffrede Tal, skrives Multiplikator under Multiplikanden. Derpaa multipliceres Multiplikandens Ziffre fra Høire mod Venstre med Multiplikators Enere, og de udkomne Produkter opskrives ligeledes fra Høire til Venstre, dog saaledes, at dersom et Produkt er over 9, opskrives kun dette Produkts Enere, medens dets Tiere adderes til det næste Produkt. Derpaa multipliceres paa samme Maade Multiplikanden med Multiplikators Tiere, og Produkterne opskrives under de foregaaende, dog saaledes, at enhver dekadisk Enhed rykkes et Skridt mod Venstre. Saaledes fortsættes videre, og tilsidst adderer man de under hinanden staaende Tal. Ex.: 1243 . 325 findes saaledes:

$$\begin{array}{r} 1243 \\ 325 \\ \hline 6215 \\ 2486\phantom{0} \\ 3729\phantom{00} \\ \hline 403975 \end{array}$$

Rigtigheden af denne Fremgangsmaade indsees saaledes. Med Betegnelserne fra § 59 er:

$$\begin{aligned} T.T' &= (a + b.10 + c.100 + \ldots)(a' + b'.10 + c'.100 + \ldots) \\ &= aa' + ba'.10 + ca'.100 + \ldots \\ &\quad + ab'.10 + bb'.100 + cb'.1000 + \ldots \\ &\quad + ac'.100 + bc'.1000 + cc'.10000 + \ldots \\ \hline T.T' &= aa' + (ba' + ab')\,10 + (ca' + bb' + ac')\,100 + \ldots \end{aligned}$$

2. Naar et Tal skal divideres med et andet, saa afskjærer man først af Dividendens høieste Enheder saa mange Ziffre, som Divisor har, og man søger den fuldstændige eller ufuldstændige Kvotient mellem dette Tal og Divisor. Denne Kvotient er Antallet af Divisors høieste Enheder. Til den Rest, denne Kvotient giver, tilføies næste Ziffer i Dividenden, og Kvotienten mellem det derved erholdte Tal og Divisor er Kvotientens næste Ziffer.

Saaledes fortsætter man, saalænge der er noget Ziffer tilbage i Dividenden. Regningen opskrives som i følgende Exempel: 3276 : 25.

$$
\begin{array}{l}
25)3276(131 \\
\phantom{25)}\underline{25} \\
\phantom{25)3}77 \\
\phantom{25)3}\underline{75} \\
\phantom{25)32}26 \\
\phantom{25)32}\underline{25} \\
\phantom{25)327}1
\end{array}
$$

Rigtigheden af denne Fremgangsmaade beror paa, at Dividenden opløses i en Række Addender, der hver for sig divideres med Divisor. Saaledes er:

$$
\begin{aligned}
3276 : 25 &= (2500 + 776) : 25 \\
&= (2500 + 750 + 26) : 25 \\
&= (2500 + 750 + 25 + 1) : 25 \\
&= 2500 : 25 + 750 : 25 + 25 : 25 + 1 : 25 \\
&= 100 + 30 + 1 + 1 : 25 \\
&= 131 + 1 : 25
\end{aligned}
$$

## § 61.

### Regler for hvorvidt de simpleste Tal gaar op i andre.

1. *Naar $2^n$ eller $5^n$ gaar op i det med et Tals n sidste Ziffre til Høire skrevne Tal, saa gaar $2^n$ eller $5^n$ op i Tallet.*

Ethvert Tal T kan nemlig sættes under Formen:

$$T = a \,.\, 10^n + b$$

hvor b betegner det med de n sidste Ziffre til Høire og a det med de foranstaaende Ziffre skrevne Tal. Nu er:

$$
\begin{array}{c}
\underline{10 = 2 \,.\, 5} \\
\underline{10^n = 2^n \,.\, 5^n} \\
T = a \,.\, 2^n \,.\, 5^n + b
\end{array}
$$

Nu gaar $2^n$ og $5^n$ op i $a \cdot 2^n \cdot 5^n$; dersom $2^n$ eller $5^n$ gaar op i b, saa gaar $2^n$ eller $5^n$ op i $a \cdot 2^n \cdot 5^n + b$ eller i T.

Omvendt er:

$$T - a \cdot 10^n = b$$

Dersom altsaa $2^n$ eller $5^n$ skal gaa op i T., saa maa ogsaa $2^n$ eller $5^n$ gaa op i $T - a \cdot 10^n$ eller i b.

2. Ved et Tals *Tversum* forstaar man Summen af Tallets Ziffre. Man kan bevise, at:

*Naar 3 eller 9 gaar op i et Tals Tversum, saa gaar 3 eller 9 op i Tallet.*

Opløser man nemlig Tallet T i sine dekadiske Enheder:

$$T = a + b \cdot 10 + c \cdot 100 + \ldots$$

saa er Tversummen S lig:

$$\underline{S = a + b + c + \ldots}$$

$$T - S = 9b + 99c + \ldots$$

Nu gaar 3 og 9 op i 9b, i 99c o. s. v. altsaa ogsaa i $9b + 99c + \ldots$ eller i $T - S$. Gaar da 3 eller 9 ogsaa op i S, saa gaar ogsaa 3 eller 9 op i $T - S + S = T$.

Omvendt er:

$$T - (T - S) = S.$$

Dersom altsaa 3 eller 9 skal gaa op i T, maa 3 eller 9 gaa op i $T - (T - S)$ eller i S.

## § 62.

### Det mindste fælles Multiplum og største fælles Maal.

Foruden de i første Afsnit udviklede Methoder til at finde det mindste fælles Multiplum og det største fælles Maal kan man ogsaa benytte følgende i Praxis ofte lettere Methoder.

1. *At søge det mindste fælles Multiplum for flere Tal.*

Man opskriver Tallene ved Siden af hinanden og dividerer dem med et Primtal, som gaar op mindst i to af dem. Kvotienterne skrives under Dividenderne; de Tal, hvori Primtallet ikke gaar op, nedskrives uforandrede. Den derved fremkomne Række divideres paany med et Primtal, som gaar op mindst i to af dem, og Kvotienterne og de Tal, hvori Primtallet ikke gaar op, nedskrives paany; og saaledes fortsætter man, indtil der ikke er noget Primtal, som gaar op i to af de nedskrevne Tal. Produktet af de sidste Kvotienter og alle Divisorerne er da det mindste fælles Multiplum.

Skal man saaledes søge det mindste fælles Multiplum for 45, 60 og 84, saa opskrives Regningen saaledes:

$$
\begin{array}{rl}
2) & \underline{45 - 60 - 84} \\
2) & \underline{45 - 30 - 42} \\
3) & \underline{45 - 15 - 21} \\
5) & \underline{15 - \;\;5 - \;\;7} \\
 & \;\;\;3 - \;\;1 - \;\;7
\end{array}
$$

Det mindste fælles Multiplum bliver $7 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 2 =$ 1260.

At dette Produkt er det mindste fælles Multiplum, fremgaar af, at det er fremkommet ved, at man af alle Tallene har udtaget de enkelte Faktorer, som to eller flere har tilfælles, og kun sat dem en Gang for hver Gang, de forekommer i alle eller flere af Tallene. Derved kommer hver af de enkelte Faktorer til at staa som Faktor saa mange Gange, som den forekommer i det Tal, hvor den findes flest Gange.

2. *At søge det største fælles Maal for to Tal.*

Man dividerer det mindste Tal i det største, den udkomne Rest i den foregaaende Divisor o. s. v. Den

Rest, som gaar op i den foregaaende Divisor, er da det største fælles Maal.

Ex. Det største fælles Maal for 20 og 112 findes saaledes:

$$
\begin{array}{l}
20)\ 112\ (5 \\
\underline{\ \ \ \ 100} \\
\ \ \ \ \ \ \ 12)\ 20\ (1 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{12} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 8)\ 12\ (1 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{8} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 4)\ 8\ (2 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{8} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0
\end{array}
$$

4 er altsaa det største fælles Maal.

At 4 er er fælles Maal, følger af, at 4 gaar op i $2 . 4 = 8$, altsaa i $8 + 4 = 12$, altsaa i $12 . 1 = 12$, altsaa i $12 + 8 = 20$, altsaa i $20 . 5 = 100$, altsaa i $100 + 12 = 112$.

At 4 er det største fælles Maal, følger af, at ethvert Tal, som skal gaa op i 20, maa gaa op i $20 . 5 = 100$; skal det ogsaa gaa op i 112, maa det gaa op i $112 - 100 = 12$, altsaa i $12 . 1 = 12$, altsaa i $20 - 12 = 8$, altsaa i $8 . 1 = 8$, altsaa i $12 - 8 = 4$. Men intet Tal større end 4 gaar op i 4.

## § 63.

### Addition og Subtraktion med Bogstavstørrelser.

1. Naar en Række positive og negative Størrelser skal adderes, sættes de gjerne op ved Siden af hinanden uden Additionstegn imellem. En saadan Række Størrelser kaldes et *Polynom*, og de enkelte Størrelser med sine Fortegn kaldes Polynomets *Led*. Bestaar Rækken af to

Led, kaldes den et *Binom;* bestaar den af tre Led, kaldes den et *Trinom.* En enkelt Størrelse kaldes et *Monom.* To Monomer kaldes *ensartede,* naar den karakteristiske Faktor er den samme; i modsat Fald kaldes de *uensartede.*

2. Naar et Polynom er indesluttet i en Parenthes, saa kan denne Parenthes udelades med Benyttelse at følgende Regler.

a. *En Parenthes med Fortegnet plus kan udelades uden Forandring.*

b. *En Parenthes med Fortegnet minus kan udelades, idet alle Fortegn i Parenthesen forandres til de modsatte.*

Disse Regler følger ligefrem af følgende Sætninger fra Additions- og Subtraktionslæren:

$a + (b + c) = a + b + c \qquad a - (b + c) = a - b - c$

$a + (b - c) = a + b - c$ (§8No. 1) $a - (b - c) = a - b + c$

3. Ensartede Monomer adderes eller subtraheres ved, at man adderer eller subtraherer deres Koefficienter; uensartede Monomer sættes kun ved Siden af hinanden med plus eller minus imellem. Saaledes er f. Ex.

$$\begin{aligned}(-3a) + (-5b) - (-2a) - (+3b) &= -3a - 5b + 2a - 3b \\ &= (-3 + 2)a + (-5 - 3)b \\ &= (-1)a + (-8)b \\ &= -a - 8b\end{aligned}$$

4. Polynomer adderes eller subtraheres ved, at man skriver dem under hinanden, saaledes at de ensartede Led kommer under hinanden; derpaa forandrer man alle Subtraktorernes Fortegn til de modsatte, idet man nemlig opløser deres Parentheser, som har minus foran; og endelig adderer man de under hinanden staaende Led som Monomer. Følgende Exempel udregnes altsaa saaledes:

$$(2a - 3b - 4c) + (5b - 3a + 2c) - (a - 5b + 6c) - (2c - a + b)$$

$$\begin{array}{r}
2a - 3b - 4c \\
-3a + 5b + 2c \\
\pm\, a \mp 5b \pm 6c \\
\mp\, a \pm b \pm 2c \\
\hline
-a + 6b - 10c
\end{array}$$

## § 64.

### Multiplikation og Division med Bogstavstørrelser.

1. Monomer multipliceres eller divideres, ved at man multiplicerer eller dividerer Bogstavfaktorerne for sig og Koefficienterne for sig. Saaledes er f. Ex.

$3x \,.\, 5y = 15xy$; $2x^2 \,.\, 3x^3 = 6x^5$ (se § 12 No. 5)

$8x^5 : 4x^3 = 2x^2$; $5x : 2y = \frac{5}{2} \,.\, \frac{x}{y}$ (se § 15 No. 5)

2. Polynomer multipliceres ved, at man multiplicerer hvert Leds Talværdi i den ene Faktor med hvert Leds Talværdi i den anden Faktor; de udkomne Produkter gives det Fortegn, som fremgaar af Regelen: *Lige Fortegn hos Leddene giver plus, ulige minus*, og de udkomne Størrelser adderes.

I § 12 No. 3 er nemlig bevist, at Summer multipliceres ved at multiplicere hver Addend i den ene Faktor med hver Addend i den anden Faktor; og i § 51 er bevist, at den samme Sætning gjælder, naar nogle af Addenderne eller alle er negative. Polynomer multipliceres altsaa ved at multiplicere hvert Led i den ene Faktor med hvert Led i den anden og addere de udkomne Produkter. Disse Produkter bliver ifølge § 50 positive, dersom de Led, der multipliceres, har samme Fortegn, negative, dersom de har modsatte Fortegn.

Naar de forskjellige Led i Polynomerne indeholder den samme Størrelse ophøiet til forskjellige Potentser, pleier man gjerne at ordne Leddene efter de faldende eller stigende Potentser af Størrelsen. Saaledes findes $(2x^2 + 3 - 4x)(3x - 5x^2 + 4)$ saaledes:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 2x^2 & -4x & +3 \\
 & & -5x^2 & +3x & +4 \\
\hline
-10x^4 & +20x^3 & -15x^2 & & \\
 & +6x^3 & -12x^2 & +9x & \\
 & & +8x^2 & -16x & +12 \\
\hline
-10x^4 & +26x^3 & -19x^2 & -7x & +12
\end{array}$$

2. Naar man skal dividere to Polynomer, saa divideres Divisors første Led i Dividendens første Led. Den udkomne Kvotient multipliceres med hele Divisor, og Produktet subtraheres fra Dividenden. I første Led af den Rest, man saaledes faar, divideres atter Dividendens første Led; den udkomne Kvotient multipliceres med hele Divisor, og Produktet subtraheres fra. Saaledes fortsættes videre. Summen af de enkelte Kvotienter er da den hele Kvotient.

Indeholder baade Dividenden og Divisor samme Størrelse ophøiet til forskjellige Potentser, ordnes de gjerne efter de faldende Potentser; dog kan de ogsaa ordnes efter de stigende Potentser.

$$\begin{array}{l}
\text{Ex.}\quad x^2 - 2x + 3)\, x^4 - 2x^3 - 7x^2 + x + 1\,(x^2 - 10 \\
\qquad\qquad\qquad\; \underline{-x^4 \mp 2x^3 \pm 3x^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -10x^2 + x + 1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\mp 10x^2 \pm 20x \mp 30} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -19x + 31
\end{array}$$

Fremgangsmaadens Rigtighed beror paa, at Dividenden deles i flere Addender, der hver for sig divideres med Divisor. Saaledes i ovenstaaende Exempel:

$$x^4-2x^3-7x^2+x+1=(x^4-2x^3+3x^2)+(-10x^2+x+1)$$
$$=(x^4-2x^3+2x^2)+(-10x^2+20x-30)+(-19x+31)$$

og: $(x^4-2x^3+3x^2):(x^2-2x+3)=x^2$

$(-10x^2+20x-30):(x^2-2x+3)=-10$

Altsaa: $(x^4-2x^3-7x^2+x+1):(x^2-2x+3)$

$=x^2-10+(-19x+31):(x^2-2x+3)$

## § 65.

### Addition og Subtraktion med Brøk.

1. Naar Tæller og Nævner i en Brøk er indbyrdes delelige, saa pleier man gjerne at dividere dem med deres største fælles Maal, for at faa dem saa smaa som mulig; de bliver da indbyrdes Primtal. At dividere Tæller og Nævner med et fælles Maal kaldes at *forkorte* Brøken.

2. *Naar Tæller og Nævner i en Brøk er indbyrdes Primtal, og Brøken skal omgjøres til en anden Benævning, saa maa den nye Nævner være et Multiplum af den gamle, dersom ikke Brøkens Tæller skal blive en Brøk.*

Man har nemlig:

$$\frac{t}{n}=\frac{tq:n}{q}$$

Er nu t og n indbyrdes Primtal, saa maa n gaa op i q, dersom n skal gaa op i tq. Skal tq : n være et helt Tal, maa altsaa q være et Multiplum af n.

3. Skal flere Brøker adderes eller subtraheres, maa de først omgjøres til samme Benævning. For at faa hele Tal til Tællere, vælges til fælles Nævner, *Generalnævner*, et fælles Multiplum for Nævnerne; og for at faa saa smaa Tal som mulig, vælges deres mindste fælles Multiplum. Ved Bogstavbrøker pleier man dog at vælge Nævnernes

Produkt til Generalnævner, da det gjerne er meget vanskeligt at finde deres mindste fælles Multiplum. Saaledes er:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{7}-\frac{11}{12}=\frac{56+60-77}{84}=\frac{39}{84}=\frac{13}{28}$$

$$\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x}-\frac{x}{x-1}=\frac{2x.x\,(x-1)+(x^2-1)\,(x-1)-x.x\,(x^2-1)}{(x^2-1)\,x\,(x-1)}$$

4. Naar Talbrøker skal adderes eller subtraheres, opskrives gjerne Regningen saaledes.' Brøkerne skrives under hinanden med en Streg paa høire Side. Paa høire Side af denne Streg sættes øverst Generalnævneren, og nedenfor denne, lige for de tilsvarende Brøker, Kvotienterne mellem Generalnævneren og Brøkernes Nævnere. Til høire derfor igjen sættes Produkterne af disse Kvotienter og de gamle Tællere, altsaa de nye Tællere. Saaledes findes $\frac{11}{12}+\frac{5}{8}$ og $\frac{11}{12}-\frac{5}{8}$:

$$\begin{array}{c|c|c} & 24 & \\ \hline \frac{11}{12} & 2 & 22 \\ \frac{5}{8} & 3 & 15 \\ \hline & & \frac{37}{24} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c} & 24 & \\ \hline \frac{11}{12} & 2 & 22 \\ \frac{5}{8} & 3 & 15 \\ \hline & & \frac{7}{24} \end{array}$$

## § 66.

### Blandede Tal.

1. Et *blandet Tal* er Summen af et helt Tal og en Brøk. Er Addenderne Talstørrelser, sættes de gjerne ved Siden af hinanden uden plus imellem.

2. *Naar Divisor ikke gaar op i Dividenden, saa er Kvotienten et blandet Tal, hvis hele Tal er den ufuldstændige Kvotient, og hvis Brøk har Resten til Tæller og Divisor til Nævner.*

Bet. $a - bq = r,\ r < b$

Sats: $a : b = q + \frac{r}{b}$

$$\left(q + \frac{r}{b}\right)b = qb + \frac{r}{b}b = qb + r = a$$

$$a : b = q + \frac{r}{b}$$

Ifølge denne Sætning kan en uægte Brøk omgjøres til et blandet Tal ved at dividere Nævneren i Tælleren.

3. *Omvendt kan et blandet Tal omgjøres til uægte Brøk ved at multiplicere det hele Tal med Nævneren og dertil addere Tælleren*; *det Udkomne bliver Brøkens Tæller, medens dens Nævner er den gamle Nævner.*

Sats: $a + \frac{t}{n} = \frac{an + t}{n}$

$$a + \frac{t}{n} = \frac{an}{n} + \frac{t}{n} = \frac{an + t}{n}$$

4. Man regner med blandede Tal enten ved at omgjøre dem til uægte Brøker eller ved at behandle dem efter de almindelige Regler for Regning med Summer. Begge Maader kan stedse benyttes; kun naar Divisor er et blandet Tal, maa den omgjøres til uægte Brøk, da man ikke har nogen Sætning, som angiver, hvorledes man dividerer med en Sum.

Ex. 1. $2\frac{3}{4} + 3\frac{5}{6} = \frac{11}{4} + \frac{23}{6} = \frac{33 + 46}{12} = \frac{79}{12}$

eller: $2\frac{3}{4} + 3\frac{5}{6} = (2 + \frac{3}{4}) + (3 + \frac{5}{6}) = (2 + 3) + (\frac{3}{4} + \frac{5}{6})$
$= 5 + \frac{19}{12} = 6\frac{7}{12}$

Ex. 2. $5\frac{3}{8} - 3\frac{5}{6} = \frac{43}{8} - \frac{23}{6} = \frac{129 - 92}{24} = \frac{37}{24}$

eller: $5\frac{3}{8} - 3\frac{5}{6} = (5 + \frac{3}{8}) - (3 + \frac{5}{6}) = (4 + [1 + \frac{3}{8}]) - (3 + \frac{5}{6})$
$= (4 - 3) + (\frac{11}{8} - \frac{5}{6}) = 1\frac{13}{24}$

Regningen i Ex. 1 og 2 kan opskrives saaledes:

$$\begin{array}{c|c|l}
 & 12 & \\
2\frac{3}{4} & 3 & 9 \\
3\frac{5}{6} & 2 & 10 \\
\hline
5 & + & \frac{19}{12} = 6\frac{7}{12}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|l}
 & 24 & \\
5\frac{3}{8} & 3 & 9 + 24 = 33 \\
3\frac{5}{6} & 4 & 20 \qquad = 20 \\
\hline
1 & + & \qquad\qquad \frac{13}{24}
\end{array}$$

Ex. 3. $2\frac{2}{3} \,.\, 3\frac{5}{6} = \frac{8}{3} \,.\, \frac{23}{6} = \frac{184}{18} = 10\frac{2}{9}$

eller: $2\frac{2}{3} \,.\, 3\frac{5}{6} = (2 + \frac{2}{3})(3 + \frac{5}{6}) = 2 \,.\, 3 + 2 \,.\, \frac{5}{6} + \frac{2}{3} . 3 + \frac{2}{3} . \frac{5}{6}$

$= 6 + \frac{5}{3} + 2 + \frac{5}{9} = 10\frac{2}{9}$

Ex. 4: $3\frac{1}{3} : 4\frac{2}{5} = \frac{10}{3} : \frac{22}{5} = \frac{10}{3} \,.\, \frac{5}{22} = \frac{25}{33}$

eller: $3\frac{1}{3} : 4\frac{2}{5} = (3 + \frac{1}{3}) \,.\, \frac{5}{22} = 3 \,.\, \frac{5}{22} + \frac{1}{3} \,.\, \frac{5}{22} = \frac{15}{22} + \frac{5}{66}$

$= \frac{45 + 5}{66} = \frac{50}{66} = \frac{25}{33}$

5. Idet man iflæng benytter Divisionstegn og Brøkstreg, faar man Brøker, hvori Tæller eller Nævner eller begge er Brøker eller blandede Tal. Saadanne Brøker kaldes *brudne*. Ligesaa faar man Brøker, hvori Tæller eller Nævner eller begge er negative.

*En bruden Brøk gjøres ubruden ved at udføre Divisionen.* Saaledes er:

$$\frac{2\frac{3}{7}}{3\frac{4}{5}} = 2\frac{3}{7} : 3\frac{4}{5} = \frac{17}{7} \,.\, \frac{5}{19} = \frac{85}{133}$$

*En bruden Brøk kan ogsaa gjøres ubruden ved at multiplicere Tæller og Nævner med deres Nævneres mindste fælles Multiplum, dersom begge er brudne; og dersom kun den ene er bruden, med dennes Nævner.* Saaledes er:

$$\frac{2\frac{3}{7}}{3\frac{4}{5}} = \frac{2\frac{3}{7} . 35}{3\frac{4}{5} . 35} = \frac{85}{133}$$

$$\frac{3}{4\frac{1}{5}} = \frac{3 \,.\, 5}{4\frac{1}{5} \,.\, 5} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

*En Brøk, hvori Tæller eller Nævner eller begge er negative, er positiv, dersom Tæller og Nævner har lige Fortegn, negativ, dersom de har ulige Fortegn.* Dette følger ligefrem af § 52.

# Andet Kapitel.

## Decimalbrøk.

### § 67.

Begrebsbestemmelser ved Decimalbrøk.

1. En *Decimalbrøk* er en Brøk, hvis Nævner er en dekadisk Enhed. Den betegnes ved blot at opskrive Tælleren og i den at sætte et Komma, *Decimalkommaet*, saaledes at der paa høire Side af samme staar saa mange Ziffre, som Nævneren har Nuller. Er der ikke nok Ziffre i Tælleren, tilføies saa mange Nuller paa venstre Side af den, at der bliver det fornødne Antal Ziffre. Er Brøken en ægte Brøk, der altsaa ingen hele Enheder indeholder, sættes pua venstre Side af Kommaet et Nul. I modsat Fald, dersom den er uægte, kan den betragtes som et blandet Tal, hvis hele Tal er, hvad der staar paa venstre Side af Decimalkommaet, medens hvad der staar paa høire Side deraf, er Brøkens Tæller. Ziffrene til Høire for Kommaet kaldes *Decimaler*, deres Pladse *Decimalsteder*.

2. Ligesom ved hele Tal ethvert Ziffer, der staar til Venstre for et andet, betegner det Antal Enheder, det hele Tal indeholder af næst høiere Orden, og ligesom der gaar 10 Enheder af en lavere Orden paa 1 Enhed af den næst høiere, saaledes ogsaa ved Decimalbrøk. Ligesom Ziffrene til Venstre for Decimalkommaet betegner det hele Tal, altsaa første Ziffre til Venstre dettes Enere, saaledes betegner første Ziffer til Høire eller første Decimal Brøkens Antal af Tiendedele, andet Decimal dens Antal af Hundrededele o. s. v. Saaledes er:

$$7{,}345 = \tfrac{7345}{1000} = \tfrac{7000}{1000} + \tfrac{300}{1000} + \tfrac{40}{1000} + \tfrac{5}{1000}$$
$$= 7 + \tfrac{3}{10} + \tfrac{4}{100} + \tfrac{5}{1000}$$

Og da 10 Tiendedele er en Hel, 10 Hundrededele en Tiendedel o. s. v., saa gaar der altsaa ogsaa her 10 Enere af den lavere Orden paa en af den næst høiere.

3. *En Decimalbrøks Værdi bliver uforandret, naar den tilføies Nuller paa høire Side.* Derved multipliceres nemlig Tæller og Nævner med samme Tal, nemlig for hvert tilføiet Nul med 10. Man bringer derfor Decimalbrøker til samme Benævning ved at tilføie den, der har færrest Decimaler, saa mange Nuller paa høire Side, at begge faar lige mange Decimaler.

4. Ofte behøver man kun at kjende en Størrelses Værdi med en vis Grad af Nøiagtighed. Udtrykkes Størrelsen ved Decimalbrøk, behøver man da blot at kjende denne med et vist Antal Decimaler. Skal man saaledes med Decimalbrøk udtrykke en Størrelses Værdi saa nøiagtig, at Forskjellen fra den sande Værdi er mindre end $\frac{1}{10000}$, saa behøver man blot at udvikle den med 4 Decimaler. Alle de følgende bortkastede Decimalers Værdi bliver da nemlig mindre end 0,0001.

Man kan endog indskrænke den ved Bortkastelse af de følgende Decimaler begaaede Feil til $\frac{1}{2}$ af det sidste Decimalsteds Brøkenhed ved til det sidste Decimal, som beholdes, at lægge en Enhed, dersom det følgende Decimal er lig eller større end 5, men lade det være uforandret, dersom det næste Decimal er mindre end 5. Saaledes ligger Brøken 2,32759 mellem 2,327 og 2,328. Vil man nu blot udtrykke Brøken med 3 Decimaler, saa opskriver man den af disse Brøker, der ligger den sande Værdi nærmest. Da Differentsen mellem disse Brøker er:

$$2{,}328 - 2{,}327 = \frac{2328}{1000} - \frac{2327}{1000} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

saa er Forskjellen mellem Brøkens sande Værdi og den af de to andre Brøker, der ligger den nærmest, mindre end Halvdelen af 0,001.

## § 68.

### Addition og Subtraktion med Decimalbrøk.

*Man adderer eller subtraherer Decimalbrøker ved at omgjøre dem til samme Benævning* (se § 67 No. 3), *og derpaa udelade Kommaerne og addere eller subtrahere dem som hele Tal; Summen eller Differentsen faar saa mange Decimaler, som hver af Brøkerne har.*

Derved adderer eller subtraherer man nemlig Tællerne efter at have omgjort Brøkerne til samme Benævning (se § 27 og 29). Saaledes er:

$$3{,}14 + 0{,}294 = \tfrac{314}{100} + \tfrac{294}{1000} = \frac{3140+294}{1000} = \tfrac{3434}{1000} = 3{,}434$$

$$\text{og: } 3{,}14 - 0{,}294 = \tfrac{314}{100} - \tfrac{294}{1000} = \frac{3140-294}{1000} = \tfrac{2846}{1000} = 2{,}846$$

Regningen opskrives gjerne saaledes, idet man sætter Plads aaben for de tilføiede Nuller:

$$\begin{array}{r} 3{,}14 \\ 0{,}294 \\ \hline 3{,}434 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \dot{3}{,}\dot{1}\dot{4} \\ 0{,}294 \\ \hline 2{,}846 \end{array}$$

## § 69.

### Multiplikation med Decimalbrøk.

1. *Man multiplicerer en Decimalbrøk og et helt Tal ved at udelade Decimalkommaet og multiplicere som hele Tal, og derpaa give Produktet saa mange Decimaler, som Decimalbrøken har.*

Derved multiplicerer man nemlig Tælleren og det hele Tal, og Nævneren lades uforandret (§ 31 No. 1 og 2). Saaledes er:

$$3{,}14 \cdot 7 = 7 \cdot 3{,}14 = \tfrac{314}{100} \cdot 7 = \frac{314 \cdot 7}{100} = \tfrac{2198}{100} = 21{,}89$$

*Er den hele Faktor en dekadisk Enhed, saa kan man ogsaa finde Produktet ved at flytte Decimalkommaet fra Venstre mod Høire forbi saa mange Ziffre, som den dekadiske Enhed har Nuller.*

Derved beholdes nemlig Tælleren uforandret, og Nævneren divideres med det hele Tal (§ 31 No. 1 og 2). Saaledes er:

$$2{,}1425 \,.\, 100 = 100 \,.\, 2{,}1425 = \tfrac{21425}{10000} \,.\, 100 = \frac{21425}{10000:100}$$
$$= \tfrac{21425}{100} = 214{,}25.$$

2. *Man multiplicerer to Decimalbrøker ved at udelade Decimalkommaerne og multiplicere som hele Tal; Produktet faar saa mange Decimaler, som begge Faktorer har tilsammen.*

Derved multipliceres nemlig Tæller med Tæller og Nævner med Nævner (§ 31 No. 3). Saaledes er:

$$2{,}15 \,.\, 0{,}671 = \tfrac{215}{100} \,.\, \tfrac{671}{1000} = \frac{215 \,.\, 671}{100 \,.\, 1000} = \tfrac{144265}{100000} = 1{,}44265$$

Sætningerne i No. 1 og 2 kan samles i de Ord: *Man multiplicerer med Decimalbrøk ved at udelade Kommaerne og multiplicere som hele Tal; Produktet faar saa mange Decimaler, som begge Faktorer tilsammen har.*

## § 70.

### Division med Decimalbrøk.

1. *Man dividerer en Decimalbrøk med et helt Tal ved at udelade Decimalkommaet og dividere som med hele Tal; Kvotienten faar saa mange Decimaler, som Dividenden har.*

Derved divideres nemlig Dividendens Tæller med Divisor, og dens Nævner beholdes uforandret (§ 33 No. 2). Saaledes er:

$$7{,}326 : 9 = \tfrac{7326}{1000} : 9 = \frac{7326 : 9}{1000} = \tfrac{814}{1000} = 0{,}814$$

*Er Divisor en dekadisk Enhed, saa kan Divisionen udføres ved at flytte Decimalkommaet mod Venstre forbi saa mange Ziffre, som Divisor har Nuller.*

Derved multipliceres nemlig Nævneren med Divisor, medens Tælleren lades uforandret (§ 33 No. 1, b). Saaledes er:

$$32{,}49 : 100 = \tfrac{3249}{100} : 100 = \frac{3249}{100 \,.\, 100} = \tfrac{3249}{10000} = 0{,}3249$$

2. *Man dividerer et helt Tal med en Decimalbrøk ved at tilføie Dividenden saa mange Nuller, som Divisor har Decimaler, og derpaa udelade Kommaet og dividere som med hele Tal. Kvotienten bliver et helt Tal.*

Derved multipliceres nemlig Dividenden med den omvendte Divisor (§ 33 No. 3). Saaledes er:

$$327 : 2{,}18 = 327 : \tfrac{218}{100} = 327 \,.\, \tfrac{100}{218} = 32700 : 218 = 150$$

3. *Man dividerer to Decimalbrøker ved at udelade Decimalkommaerne og dividere som med hele Tal; Kvotienten faar saa mange Decimaler, som Dividenden har flere end Divisor.*

Derved divideres nemlig Tæller med Tæller og Nævner med Nævner (§ 33 No. 4). Saaledes er:

$$7{,}326 : 1{,}8 = \tfrac{7326}{1000} : \tfrac{18}{10} = \frac{7326 : 18}{1000 : 10} = \tfrac{407}{100} = 4{,}07$$

Har Dividenden færre Decimaler end Divisor, maa man tilføie den saa mange Nuller, at den mindst faar lige saa mange Decimaler. Saaledes er:

$$732{,}6 : 0{,}18 = \tfrac{7326}{10} : \tfrac{18}{100} = \tfrac{73260}{100} : \tfrac{18}{100} = \frac{73260 : 18}{100 : 100} = 4070$$

Sætningerne i No. 1, 2 og 3 kan sammenfattes i de Ord: *Man dividerer med Decimalbrøk ved først at sørge for, at Dividenden har mindst ligesaa mange Decimaler som Divisor, og derpaa udelade Kommaerne og dividere* *som med hele Tal; Kvotienten faar saa mange Decimaler, som Dividenden har flere end Divisor.*

## § 71.

### Omdannelse af Brøk til Decimalbrøk og omvendt.

1. *Man omdanner en Brøk til Decimalbrøk ved at føie Nuller til Tælleren og dividere med Nævneren; Kvotienten faar saa mange Decimaler, som der er føiet Nuller til Tælleren.*

Derved multipliceres nemlig den gamle Tæller med den nye Nævner, og Produktet divideres med den gamle Nævner (§ 26 No. 11). Skal saaledes $\frac{3}{8}$ omgjøres til en Decimalbrøk med 3 Decimaler, saa er:

$$\tfrac{3}{8} = \frac{3 \,.\, 1000 : 8}{1000} = \tfrac{375}{1000} = 0{,}375$$

2. *En Brøk, hvis Tæller og Nævner er indbyrdes Primtal, kan ikke omdannes til en ubruden Decimalbrøk, dersom dens Nævner indeholder andre enkelte Faktorer end 2 og 5.*

Ifølge § 65 No. 2 faar man nemlig en bruden Brøk, dersom den gamle Nævner ikke gaar op i den nye. Men den nye Nævner er en dekadisk Enhed og indeholder altsaa alene Faktorerne 2 og 5. Altsaa maa den gamle Nævner for at gaa op i den nye ogsaa kun indeholde disse Faktorer.

3. Naar man vil omdanne til Decimalbrøk en Brøk, hvis Tæller og Nævner er indbyrdes Primtal, og hvis Nævner indeholder andre enkelte Faktorer end 2 og 5, saa kan man altsaa i det Uendelige tilføie Nuller til Tælleren og dividere med Nævneren, uden at Divisionen nogensinde gaar op. Fortsætter man imidlertid Divisionen tilstrækkelig længe, saa vil de samme Ziffre tilsidst atter

komme tilbage i den samme Orden. Denne Række Ziffre kaldes *Decimalbrøkens Periode*, og en saadan Decimalbrøk kaldes *periodisk*.

Da nemlig Resten ved enhver af de enkelte Divisioner er mindre end Divisor, saa kan blot saa mange forskjellige Rester fremkomme, som der er hele Tal mindre end Divisor. Er Divisor n, saa kan der altsaa i det høieste fremkomme $n-1$ forskjellige Rester, og naar det n^te^ Nul er tilføiet, maa en af de foregaaende Rester være kommet igjen mindst en Gang. Ved at tilføie denne et Nul, faar man da en foregaaende Dividend, som da igjen giver den tilsvarende foregaaende Kvotient og Rest, og saa fremdeles. Den samme Række Kvotienter, hvis Antal i det høieste er $n-1$, maa da komme igjen og fortsættes i det Uendelige.

4. Omvendt kan enhver periodisk Decimalbrøk omdannes til en almindelig Brøk paa den i følgende Exempel angivne Maade. Er Decimalbrøken $2{,}3\underline{1}7927927\ldots$, saa skilles først den periodiske Del fra det Øvrige:

$$2{,}317927927\ldots = 2{,}31 + 0{,}007927927\ldots$$

Kaldes den periodiske Del x, saa er:

$$2{,}317927927\ldots = 2{,}31 + x$$

og

$$x = 0{,}007927927\ldots$$

Derpaa multipliceres x med en saa stor dekadisk Enhed, at Kommaet flyttes hen til Perioden:

$$100x = 0{,}7927927\ldots$$

Derpaa multipliceres med en dekadisk Enhed med saa mange Nuller, som Perioden har Ziffre:

$$100000x = 792{,}7927\ldots$$

Herfra subtraheres Ligningen:

$$100x = 0{,}7927927\ldots$$

saa faar man:

$$99900x = 792$$

Divideres med 99900, saa faar man:

$$x = \frac{792}{99900}$$

$$2{,}317927927\ldots = 2{,}31 + \frac{792}{99900} = \frac{231}{100} + \frac{792}{99900} = \frac{231561}{99900}$$

Paa denne Maade kan enhver periodisk Decimalbrøk sættes under Form af en almindelig Brøk. Heraf følger, at *enhver periodisk Decimalbrøk er rational.*

# Tredie Kapitel.

## Potentser og Rødder.

### § 72.

Almindelig benyttede Sætninger af Potentslæren.

1. *Kvadratet af en Sum af to Tal er lig Kvadratet af første Addend plus det dobbelte Produkt af begge Addender plus Kvadratet af anden Addend.*

Sats: $\underline{\underline{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}}$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

2. *Kvadratet af en Differents er lig Kvadratet af Minuenden minus det dobbelte Produkt af Minuenden og Subtraktor plus Kvadratet af Subtraktor.*

Sats: $\underline{\underline{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}}$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

3. *Kubus af en Sum af to Tal er lig Kubus af første Addend plus tre gange første Addends Kvadrat gange anden Addend plus tre gange første Addend gange anden Addends Kvadrat plus Kubus af en anden Addend.*

Sats: $\underline{\underline{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}}$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2\end{aligned}$$

4. *Kubus af en Differents er lig Kubus af Minuenden minus tre gange Minuendens Kvadrat gange Subtraktor plus tre gange Minuenden gange Subtraktors Kvadrat minus Kubus af Subtraktor.*

Sats: $\underline{\underline{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}}$

$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= (a - b)^2 (a - b)\\ &= (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

5. *Kvadratet af et Polynom er lig Summen af hvert Leds Kvadrat og af de dobbelte Produkter af hvert Led med hvert af de foregaaende Led, dog saaledes, at de dobbelte Produkters Fortegn bestemmes efter Regelen: Lige Fortegn giver plus, ulige minus.*

Sats: $\underline{\underline{(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc}}$

$$\begin{aligned}(a - b + c)^2 &= (a - b)^2 + 2(a - b)c + c^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc\end{aligned}$$

6. *Produktet af to Tals Sum og Differents er lig Differentsen mellem deres Kvadrater.*

Sats: $\underline{\underline{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}}$

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

## § 73.

### Reduktion af irrationale Udtryk.

1. Ved Hjælp af Sætningen:

$$\sqrt[n]{ak} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{k} \quad (\text{§ 20 No. 1})$$

kan en Faktor, hvoraf Roden kan uddrages, bringes udenfor Rodtegnet, ligesom ogsaa omvendt en Faktor udenfor Rodtegnet kan bringes under Rodtegnet.

Ex. 1. $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8.5} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$

Ex. 2. $3\sqrt[3]{\frac{5}{9}} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{\frac{5}{9}} = \sqrt[3]{27 . \frac{5}{9}} = \sqrt[3]{15}$

2. Ved Hjælp af Sætningen:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (\S\ 37)$$

kan en Nævner bringes udenfor et Rodtegn eller ind under et saadant.

Ex. 1. $\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3 . 5}{5^2}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Ex. 2. $\frac{\sqrt[3]{5}}{3} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[3]{\frac{5}{27}}$

3. Er Nævneren i en Brøk et Monom, der indeholder et Rodtegn, saa kan dette bortskaffes ved at multiplicere Tæller og Nævner med et saa stort Tal, at Roden ligefrem kan uddrages af Nævneren.

Ex. $\frac{3}{2\sqrt[3]{5}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{2\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{2\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{10}$

4. Er Nævneren i en Brøk et Binom, hvori det ene eller begge Led indeholder Kvadratrødder, saa kan disse bortskaffes af Nævneren ved at multiplicere Tæller og Nævner med Nævneren, naar man i denne forandrer Fortegnet for det andet Led.

Ex. 1. $\frac{3}{2+\sqrt{3}} = \frac{3(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{6-3\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3^2}} = 6 - 3\sqrt{3}$

Ex. 2. $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$

## § 74.

### Almindelig benyttede Sætninger af Rodlæren.

1. *Det Antal Hele, en Rod af et blandet Tal indeholder, er lig det Antal Hele, som Roden af Tallets hele Del indeholder.*

Er a og r hele Tal og T et blandet Tal, saa er:

$$\text{Bet. } a < T < a+1$$

$$\underline{r = \text{eller} < \sqrt[n]{a} < r+1}$$

$$\text{Sats: } \underline{\underline{r < \sqrt[n]{T} < r+1}}$$

$$\underline{a < T}$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{T}$$

$$\underline{r = \text{eller} < \sqrt[n]{a}}$$

$$r < \sqrt[n]{T}$$

Fremdeles er: $\underline{\sqrt[n]{a} < r+1}$

$$a < (r+1)^n$$

Og da a og $r+1$ er hele Tal:

$$a+1 = \text{eller} < (r+1)^n$$

$$\underline{T < a+1}$$

$$\underline{T < (r+1)^n}$$

$$\sqrt[n]{T} < r+1$$

2. *For at finde, hvormange Brøkenheder af en given Benævning en Rod af et Tal indeholder, multipliceres Tallet med den givne Nævner ophøiet til Rodexponenten. Det Antal Hele, Roden af dette Produkt indeholder, er det søgte Antal.*

Vil man finde, hvormange q'endedele $\sqrt[n]{a}$ indeholder, og er p et helt Tal, saa bliver:

Bet. $p < \sqrt[n]{aq^n} < p + 1$

Sats: $\frac{p}{q} < \sqrt[n]{a} = \frac{p+1}{q}$

$$\sqrt[n]{aq^n} = q\sqrt[n]{a}$$

$$p < q\sqrt[n]{a} < p + 1$$

$$q = q \qquad = q$$

$$\frac{p}{q} < \sqrt[n]{a} < \frac{p+1}{q}$$

## § 75.

### Kvadratroduddragning.

1. *Det Antal Tiere, Kvadratroden af et med flere end to Ziffre skrevet Tal indeholder, er lig det Antal Hele, Kvadratroden af Tallet fraskilt sine to sidste Ziffre indeholder.*

Bet. $r = \text{eller} < \sqrt{a} < r + 1$

Sats: $r \,.\, 10 = \text{eller} < \sqrt{a \,.\, 100 + b \,.\, 10 + c} < (r + 1)10$

$$r = \text{eller} < \sqrt{a}$$

$$r^2 = \text{eller} < a$$

$$r^2 . 100 = \text{eller} < a . 100$$

$$r^2 . 100 = \text{eller} < a . 100 + b . 10 + c$$

$$r . 10 = \text{eller} < \sqrt{a . 100 + b . 10 + c}$$

Fremdeles er: $\sqrt{a} < r + 1$

$$a < (r+1)^2$$

Og da $a$ og $(r + 1)^2$ er hele Tal:

$$\underline{a + 1 = \text{eller} < (r + 1)^2}$$
$$a \, . \, 100 + 100 = \text{eller} < (r + 1)^2 . \, 100$$
$$\underline{a \, . \, 100 + b \, . \, 10 + c < a \, . \, 100 + 100}$$
$$\underline{a \, . \, 100 + b \, . \, 10 + c < (r + 1)^2 . \, 100}$$
$$\sqrt{a \, . \, 100 + b \, . \, 10 + c} < (r + 1)10$$

2. *Sættes $a \, . \, 100 + b \, . \, 10 + c = a'$, og er s det Antal Enere, og r det Antal Tiere, $\sqrt{a'}$ indeholder, saa bestemmes s ved Udtrykket.*

Sats: $\underline{\underline{a' - r^2 . \, 100 = \text{eller} > (2r \, . \, 10 + s)s}}$

$$\underline{\sqrt{a'} = \text{eller} > r \, . \, 10 + s}$$
$$a' = \text{eller} > r^2 . \, 100 + 2r \, . \, 10 \, . \, s + s^2$$
Subtraheres: $\underline{r^2 . \, 100 = r^2 . \, 100}$
$$\underline{a' - r^2 . \, 100 = \text{eller} > 2r \, . \, 10 \, . \, s + s^2}$$
$$a' - r^2 . \, 100 = \text{eller} > (2r \, . \, 10 + s)s$$

3. *En tilnærmet Værdi af s findes ved Udtrykket:*

Sats: $\underline{\underline{s = \text{eller} < \frac{a' - r^2 . \, 100}{2r \, . \, 10}}}$

$$\underline{a' - r^2 . 100 = \text{eller} < (2r.10 + s)s = 2r10s + s^2}$$
$$a' - r^2 . \, 100 = \text{eller} < 2r \, . \, 10s$$
Divideres med: $\underline{2r10 = \quad 2r10}$
$$\frac{a' - r^2 . \, 100}{2r10} = \text{eller} < s$$

4. Skal man uddrage Kvadratroden af et Tal, saa bestemmes først dens Tiere, idet man ifølge No. 1 bortkaster de to sidste Ziffre og uddrager Kvadratroden af Resten. Derpaa findes ifølge No. 3 en tilnærmet Værdi af Enerne. Denne Værdi indsættes i Formelen i No. 2; passer den der, saa er den rigtig. Skal man saaledes finde $\sqrt{3291}$, saa indeholder $\sqrt{32}$ 5 Enere, hvilket findes ved at sammenligne 32 med de 9 første Kvadrattal: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^3 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$; altsaa indeholder $\sqrt{3291}$ 5 Tiere. For at finde Enerne har man:

$$\begin{array}{r}
3291 = a' \\
\underline{2500 = r^2.100} \\
791 = a' - r^2.100 \\
\underline{100 = 2r.10} \\
7 = \text{tilnærmet Værdi af s.} \\
107 = 2r.10 + s \\
749 = (2r10 + s)s
\end{array}$$

Da $749 < 791$, er den fundne Værdi af s rigtig, og $\sqrt{3291} = 57$. $791 - 749 = 42$ kaldes Kvadratrodens Rest, fordi man har fundet 42 ved fra $a'$ først at subtrahere $r^2.100$ og siden $(2r10 + s)s$, altsaa har man i det Hele fra $a'$ subtraheret:

$$r^2 100 + (2r10 + s)s = (r10 + s)^2.$$

Skulde man finde $\sqrt{329127}$, saa indeholder $\sqrt{3291}$ 57 Enere, altsaa $\sqrt{329127}$ indeholder 57 Tiere. For at finde Enerne fortsættes videre, som ovenfor vist, idet den nye $a' - r^2.100$ findes ved til den forrige Rest, 42, at tilføie de to næste Ziffre i Tallet, 27. Tilføies nemlig alle Størrelser et nyt Mærke for hvert nyt Ziffer, man skal udregne i Kvadratroden, saa er:

$$a' - r'^2 = 42$$

altsaa: $a'' - r'^2 100 = a'100 + b'10 + c' - r'^2 100 = 4227$

Regningen opskrives saaledes, idet man ved vertikale Streger bortskjærer to og to Ziffre fra Høire.

$$a' = \sqrt{32|91|27} = \underbrace{\overset{r}{5}\ \overset{s}{7}}_{r'}\ \underset{s'}{3}$$

$$\begin{array}{rr|l}
r^2.100 = & 2500 & \\
\hline
a' - r^2.100 = & 791 & 107 = 2r.10 + s \\
(2r10 + s)s = & 749 & \\
\hline
a'' - r'^2.100 = & 4227 & 1143 = 2r'.10 + s' \\
(2r'.10 + s')s' = & 3429 & \\
\hline
 & 798 &
\end{array}$$

Eller uden Formler:

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{32|91|27} = 573 & \\
25 & \\
\hline
\quad 791 & 107 \\
\quad 749 & \\
\hline
\qquad 4227 & 1143 \\
\qquad 3429 & \\
\hline
\qquad\ \ 798 &
\end{array}
$$

5. For at finde Kvadratroden af et Tal med et givet Antal Decimaler maa man ifølge § 74 No. 2 multiplicere Tallet med Kvadratet af den søgte Decimalbrøks Nævner, og af det fremkomne Produkt eller dettes hele Tal uddrage Kvadratroden; denne bliver den søgte Decimalbrøks Tæller. Man multiplicerer Tallet med Kvadratet af den søgte Decimalbrøks Nævner ved at udvikle Tallet med dobbelt saa mange Decimaler, som Kvadratroden skal have, og derpaa flytte Decimalkommaet forbi alle disse Decimaler. Da deres Antal er et lige Tal, maa altsaa en Delingsstreg komme der, hvor Decimalkommaet stod før.

Den simpleste Fremgangsmaade bliver, at man sætter den første Delingsstreg gjennem Kommaet, derpaa inddeler mod Venstre, og endelig paa høire Side af Kommaet afdeler saamange Rubriker, som Kvadratroden skal have Decimaler. Derpaa uddrages Kvadratroden som af et helt Tal, og det Udkomne gives saa mange Decimaler, som Tallet har Rubriker til Høire for Kommaet.

## § 76.

### Kubikroduddragning.

1. *Det Antal Tiere, Kubikroden af et med flere end tre Ziffre skrevet Tal indeholder, er lig det Antal Hele, som Kubikroden af Tallet fraskilt sine tre sidste Ziffre indeholder.*

Bet. $\quad r = \text{eller} < \sqrt[3]{a} < r + 1$

Sats:

$$r\,.\,10 = \text{eller} < \sqrt[3]{a1000 + b100 + c10 + d} < (r + 1)10$$

$$r = \text{eller} < \sqrt[3]{a}$$

$$r^3 = \text{eller} < a$$

$$r^3\,.\,1000 = \text{eller} < a\,.\,1000$$

$$r^3\,.\,1000 = \text{eller} < a1000 + b100 + c10 + d$$

$$r\,.\,10 = \text{eller} < \sqrt[3]{a1000 + b100 + c10 + d}$$

Fremdeles er: $\quad \sqrt[3]{a} < r + 1$

$$a < (r + 1)^3$$

Og da a og $(r + 1)^3$ er hele Tal:

$$a + 1 = \text{eller} < (r + 1)^3$$

$$a1000 + 1000 = \text{eller} < (r + 1)^3 . 1000$$

$$a1000 + b100 + c10 + d < a1000 + 1000$$

$$a1000 + b100 + c10 + d < (r + 1)^3 1000$$

$$\sqrt[3]{a1000 + b100 + c10 + d} < (r + 1)10$$

2. *Sættes $a1000 + b100 + c10 + d = a'$, og er s det Antal Enere og r det Antal Tiere, $\sqrt[3]{a'}$ indeholder, saa bestemmes s ved Udtrykket.*

Sats: $\underline{\underline{a' - r^3 1000 = \text{eller} > 3r^2 100s + 3r10s^2 + s^3}}$

$$\sqrt[3]{a'} = \text{eller} > r \,.\, 10 + s$$

$$a' = \text{eller} > r^3 .\, 1000 + 3r^2 .\, 100s + 3r .\, 10 \,.\, s^2 + s^3$$

Subtraheres: $r^3 1000 = r^3 1000$

$$a' - r^3 1000 = \text{eller} > 3r^2 100s + 3r10s^2 + s^3$$

3. *En tilnærmet Værdi af s findes ved Udtrykket:*

$$s = \text{eller} < \frac{a' - r^3 1000}{3r^2 100}$$

$$a' - r^3 1000 = \text{eller} > 3r^2 100s + 3r10s^2 + s^3$$

$$a' - r^3 1000 = \text{eller} > 3r^2 100s$$

Divideres med: $3r^2 100 = 3r^2 .\, 100$

$$\frac{a' - r^3 1000}{3r^2 100} = \text{eller} > s$$

4. Skal man uddrage Kubikroden af et Tal, saa bestemmes først dens Tiere, idet man ifølge No. 1 bortkaster de 3 sidste Ziffre og uddrager Kubikroden af Resten. Derpaa findes ifølge No. 3 en tilnærmet Værdi af Enerne. Denne Værdi indsættes i Formelen i No. 2; passer den der, saa er den rigtig. Skal man saaledes finde $\sqrt[3]{47326}$, saa indeholder $\sqrt[3]{47}$ 3 Enere, hvilket findes ved at sammenligne 47 med de 9 første Kubiktal: $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$; altsaa indeholder $\sqrt[3]{47326}$ 3 Tiere. For at finde Enerne har man:

$$47326 = a'$$
$$27000 = r^3 1000$$
$$20326 = a' - r^3 1000$$
$$2700 = 3r^2 .100$$

7 = tilnærmet Værdi af s. Indsættes denne Værdi for s i Formelen i No. 2, saa faar man:

$$3r^2 100s + 3r10s^2 + s^3 = 23653$$

hvilket Udtryk er større end $a' - r^3 1000 = 20326$. Den fundne Tilnærmelsesværdi for s er altsaa for stor, og man maa forsøge den næst mindre, $s = 6$. Man faar da:

$$3r^2 100s + 3r10s^2 + s^3 = 19656 < 20326$$

Denne Værdi er altsaa rigtig, og $\sqrt[3]{47326} = 36$. $20326 - 19656 = 670$ kaldes Kubikrodens Rest, fordi man har fundet 670 ved fra $a'$ først at subtrahere $r^3 1000$ og derpaa $3r^2 100s + 3r10s^2 + s^3$; altsaa har man i det Hele fra $a'$ subtraheret:

$$r^3 1000 + 3r^2 100s + 3r10s^2 + s^3 = (r10 + s)^3$$

Skulde man finde $\sqrt[3]{47326219}$, saa indeholder $\sqrt[3]{47326}$ 36 Enere, altsaa $\sqrt[3]{47326219}$ indeholder 36 Tiere. For at finde Enerne fortsættes videre som ovenfor vist, idet den nye $a' - r^3 1000$ findes ved til den forrige Rest, 670, at tilføie de tre næste Ziffre i Tallet, 219. Tilføies nemlig et nyt Mærke for hvert nyt Ziffer, man skal udregne i Kubikroden, saa er:

$$a' - r'^3 = 670$$

altsaa:

$$a'' - r'^3 1000 = a'1000 + b'100 + c'10 + d' - r'^3 1000 = 670219$$

Regningen opskrives saaledes, idet man med vertikale Streger afskjærer tre og tre Ziffre fra Høire, og for hvert nyt Ziffer i Kubikroden tilføier alle Størrelser et Mærke mere:

$$a' = \sqrt[3]{47|326|219} = \underbrace{\underset{r}{3}\ \underset{s}{6}}_{r'}\ \underset{s'}{1}$$

$$\begin{array}{rrl}
r^3 1000 = & 27000 & \\
a' - r^3 1000 = & 20326 & 2700 = 3r^2 100 \\
 & & 16200 = 3r^2 100s \\
 & & 3240 = 3r10s^2 \\
 & 19656 & 216 = s^3 \\
a'' - r'^3 1000 = & 670219 & 388800 = 3r'^2 100 \\
 & & 388800 = 3r'^2 100s' \\
 & & 1080 = 3r'10s'^2 \\
 & 389881 & 1 = s'^3 \\
 & 280338 &
\end{array}$$

5. For at finde Kubikroden af et Tal med et givet Antal Decimaler, maa man ifølge § 74 No. 2 udvikle Tallet med 3 Gange saa mange Decimaler, som Kubikroden skal have, og uddrage Kubikroden af det Udkomne. Ved Inddelingen kommer en Streg til at gaa gjennem Decimalkommaet, hvorfor man gjerne inddeler fra dette mod Høire og Venstre.

6. Ved Hjælp af denne og foregaaende § og Sætningen:

$$\sqrt[nk]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} \quad (\S\ 20\ \text{No. } 3)$$

kan man af et Tal uddrage enhver Rod, hvis Exponent alene indeholder de enkelte Faktorer 2 og 3. Saaledes er f. Ex.

$$\sqrt[12]{a} = \sqrt[2.2.3]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}$$

# Fjerde Kapitel.

## Logarithmer.

### § 77.

Begrebsbestemmelser ved Logarithmer.

1. Ved *Logarithmen* til et Tal forstaar man den Exponent, hvortil et andet Tal, *Grundtallet*, maa ophøies for at blive lig det første. Logarithmen betegnes ved at sætte log foran Tallet. Er Grundtallet G, saa er altsaa:

$$G^{\log a} = a \quad \text{og} \quad \log(G^a) = a$$

2. *Logarithmen til Grundtallet er 1.*

$$\text{Thi } G^1 = G \quad \text{eller} \quad 1 = \log G$$

3. *Logarithmen til 1 er lig Nul.*

$$\text{Thi } G^0 = 1 \quad \text{eller} \quad 0 = \log 1$$

4. *Er Grundtallet større end 1, saa har et større Tal en større Logarithme end et mindre Tal.*

$$\text{Bet.} \quad \underline{a > b,\ G > 1}$$
$$\text{Sats:} \quad \underline{\underline{\log a > \log b}}$$

Var ikke $\log a > \log b$, saa var:

$$\underline{\log a = \log b} \quad \text{eller} \quad \log a < \log b$$

$$\underline{G^{\log a} = G^{\log b}} \qquad \underline{\quad G > 1 \quad}$$

$$a = b \qquad \underline{G^{\log a} < G^{\log b}}$$

$$a < b$$

Begge Dele strider mod Betingelsen. Altsaa:

$$\log a > \log b$$

5. *Er Grundtallet større end 1, saa svarer en større Logarithme til et større Tal end en mindre Logarithme.*

Bet. $\underline{\log a > \log b, \quad G > 1}$

Sats: $\underline{\underline{a > b}}$

$$\log a > \log b$$
$$\underline{G > 1}$$
$$\underline{G^{\log a} > G^{\log b}}$$
$$a > b$$

## § 78.

### Sætninger af Logarithmelæren.

1. *Logarithmen af et Produkt er lig Summen af Faktorernes Logarithmer.*

Sats: $\underline{\underline{\log(ab) = \log a + \log b}}$

Er Grundtallet G, saa er:

$$\underline{G^{\log a + \log b} = G^{\log a}\, G^{\log b} = ab}$$
$$\log a + \log b = \log(ab)$$

2. *Logarithmen af en Brøk er lig Differentsen mellem Tællerens og Nævnerens Logarithmer.*

$$\underline{\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b}$$
$$\underline{G^{\log a - \log b} = \frac{G^{\log a}}{G^{\log b}} = \frac{a}{b}}$$
$$\log a - \log b = \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

Er $G > 1$, og er $a < b$, altsaa Brøken ægte, saa er $\log a < \log b$, altsaa $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ negativ.

3. *Logarithmen af en Potents er lig Exponenten gange Logarithmen af Roden.*

Sats: $\underline{\underline{\log(a^n) = n \log a}}$

$$\underline{G^{n \log a} = (G^{\log a})^n = a^n}$$
$$n \log a = \log(a^n)$$

4. *Logarithmen af en Rod er lig Logarithmen af Potentsen divideret med Exponenten.*

Sats: $\underline{\underline{\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}}}$

$$\underline{G^{\frac{\log a}{n}} = \sqrt[n]{G^{\log a}} = \sqrt[n]{a}}$$

$$\frac{\log a}{n} = \log \sqrt[n]{a}$$

## § 79.

### Det briggiske Logarithmesystem.

1. Det almindelig brugelige Logarithmesystem, hvis Grundtal er 10, kaldes efter Opfinderen det *briggiske.* Paa Grund af den Lettelse ved Regningen, de briggiske Logarithmer yder, findes de beregnede og udviklede i Decimalbrøk i særegne Logarithmetabeller. Det Antal Hele, en Logarithme indeholder, kaldes dens *Karakteristik* og Tælleren i Brøken dens *Mantisse.*

2. Naar en Logarithme er negativ, giver man den gjerne en saadan Form, at Mantissen er positiv og kun Karakteristiken negativ. Dette sker ved til Logarithmen først at addere det Tal, der er en Enhed større end Karakteristikkens Talværdi og derpaa subtrahere samme Tal fra igjen. Saaledes er $\log \frac{1}{325} = -2{,}51188$. Adderes hertil 3 og subtraheres 3 fra igjen, faar man:

$$\log \tfrac{1}{325} = 3 - 2{,}51188 - 3 = 0{,}48812 - 3$$

Karakteristiken er her $-3$ og Mantissen 48812.

3. *Karakteristikken af et helt Tals Logarithme er en Ener mindre end det Antal Ziffre, hvormed Tallet er skrevet.*

Er nemlig $a_n$ skrevet med n Ziffre, saa har man, da $10^{n-1}$ er det mindste Tal, som er skrevet med n Ziffre, og $10^n$ er skrevet med $n+1$ Ziffre:

$$\frac{\frac{10^{n-1} = \text{eller} < a_n < 10^n}{\log 10^{n-1} = \text{eller} < \log a_n < \log 10^n}}{n - 1 = \text{eller} < \log a_n < n}$$

Men naar log $a_n$ ligger mellem $n-1$ og n, saa indeholder log $a_n$ $n-1$ Hele.

4. *Karakteristiken af en ægte Decimalbrøks Logarithme er negativ, og dens Talværdi er lig Antallet af de Nuller, hvormed Brøken begynder, iberegnet Nullet foran Kommaet.*

Er nemlig $a_n$ Brøkens Tæller, der er skrevet n Ziffre, og er x det Antal Nuller, der findes mellem Kommaet og Tælleren, saa er Nævneren $10^{n+x}$. Er p en ægte Brøk, saa er altsaa:

$$\log\left(\frac{a_n}{10^{n+x}}\right) = \log a_n - \log 10^{n+x} = n - 1 + p - (n + x)$$
$$= p - (x + 1)$$

Tælleren i p bliver Mantissen, og Karakteristiken er $-(x+1)$; den er altsaa negativ, og dens Talværdi er en Ener mere end Antallet af Nuller mellem Kommaet og Tælleren, altsaa lig Antallet af de Nuller, hvormed Brøken begynder, naar Nullet foran Kommaet regnes med.

5. *Logarithmen til to Tal, hvoraf det ene er lig det andet multipliceret med en dekadisk Enhed, har samme Mantisse.*

Er nemlig $a = b \,.\, 10^n$, saa er:

$$\log a = \log (b \,.\, 10^n) = \log b + n$$

Da n er et helt Tal, paavirker den alene Karakteristiken.

Paa Grund af denne Sætning er Mantissen til en Logarithme den samme, hvad enten der i Tallet findes et Decimalkomma eller ei. Logarithmen til en Decimalbrøk findes derfor ved at søge Mantissen af Logarithmen til dens Tæller uden Hensyn til Kommaet og derpaa bestemme Karakteristiken ved Hjælp af No. 3 eller 4.

# Femte Kapitel.

## Ligninger.

### § 80.

Begrebsbestemmelser. Ligningers Ordning.

1. De Opgaver, man behandler ved Hjælp af Arithmetiken, er gjerne af en saadan Natur, at de kan udtrykkes ved en eller flere Ligninger mellem de i Opgaven forekommende Størrelser. At opstille disse Ligninger kaldes at *sætte Opgaven i Ligning;* og det er først efterat en saadan Opgave er sat i Ligning, at den kan blive Gjenstand for arithmetisk Behandling.

2. En Ligning kaldes *algebraisk* med Hensyn til en af de deri forekommende Størrelser, naar der i Ligningen med denne Størrelse kun er foretaget et endeligt Antal af følgende Regningsarter: *Addition*, *Subtraktion*, *Multiplikation*, *Division*, *Potentseren og Roduddragning*, hvilke Regningsarter kaldes de *algebraiske* Regningsarter. Er derimod en anden Regningsart anvendt, eller er disse anvendt et uendeligt Antal Gange med en Størrelse, kaldes Ligningen *transcendent* med Hensyn til denne Størrelse. Anvendes ikke Roduddragning, kaldes Ligningen *rational*, i modsat Tilfælde *irrational*. Anvendes heller ikke Division, forekommer altsaa den omtalte Størrelse ikke i nogen Nævner, kaldes Ligningen *hel*, i modsat Fald *bruden*.

3. *At løse en Ligning med Hensyn til en deri forekommende Størrelse er at give Ligningen en saadan Form, at denne Størrelse forekommer alene og i første Potents paa den ene Side af Lighedstegnet.* Den Størrelse, med Hensyn til hvilken Ligningen skal løses, kaldes den *ubekjendte.*

4. For at kunne løse en Ligning maa man først

*ordne* den, hvorved man forstaar at bringe den under Form af en hel Ligning, hvori alle Parentheser, hvori den ubekjendte forekommer, er opløste, og hvori den ubekjendte selv er ordnet efter de faldende Potentser paa den ene Side af Lighedstegnet saaledes, at høieste Potents forekommer uden Koefficient og Fortegn. Sidste Led vil da indeholde den ubekjendte med Exponenten Nul eller, hvilket er det samme, ikke indeholde den. Paa den anden Side af Lighedstegnet sættes Nul.

5. For at kunne ordne en rational Ligning har man følgende Regler:

a. Et Led kan overføres fra den ene Side af Lighedstegnet til den anden ved at ombytte dets Fortegn; derved adderer man nemlig lige meget til eller subtraherer lige meget fra paa begge Sider. Har man saaledes:

$$5 + 4x = 7 - 2x$$

saa faar man ved at addere 2x til paa begge Sider:

$$5 + 4x + 2x = 7$$

og heraf ved at subtrahere 5 fra paa begge Sider:

$$4x + 2x = 7 - 5$$

b. En Faktor bortskaffes ved at dividere, en Nævner ved at multiplicere med den paa begge Sider af Lighedstegnet. Har man saaledes:

$$\frac{3x}{7} + 5 = 2x - 7$$

faar man ved at multiplicere med 7 paa begge Sider:

$$3x + 35 = 14x - 49$$

og heraf ved at dividere med 3:

$$x + \frac{35}{3} = \frac{14x - 49}{3}$$

6. Er en Ligning ordnet, siges den at være af samme Grad som den høieste deri forekommende Exponent, hvortil den ubekjendte er ophøiet.

## § 81.

### Ligninger af første Grad.

En ordnet Ligning af første Grad vil have Formen:

$$x + a = 0$$

Den løses ved at overføre paa den anden Side af Lighedstegnet det Led, som ikke indeholder x:

$$x = -a$$

Ex.
$$20 + x = \frac{13x}{7}$$
$$140 + 7x = 13x$$
$$-13x + 7x + 140 = 0$$
$$-6x + 140 = 0$$
$$x - \frac{140}{6} = 0$$
$$x = \frac{140}{6} = \frac{70}{3}$$

## § 82.

### Ligninger af anden Grad.

En ordnet Ligning af anden Grad eller en *kvadratisk* Ligning vil have Formen:

$$x^2 + ax + b = 0$$

Er her $a = 0$, faar Ligningen Formen:

$$x^2 + b = 0$$

Ligningen kaldes i dette Tilfælde *en ren kvadratisk Ligning* og løses ved at overføre det Led, som ikke indeholder x, paa den anden Side af Lighedstegnet, og derpaa uddrage Kvadratroden paa begge Sider:

$$x = \pm\sqrt{-b}$$

Er derimod a ikke lig Nul, kaldes Ligningen *uren kvadratisk.* Dens venstre Side gjøres til et fuldstændigt Kvadrat ved at overføre b paa den anden Side og paa begge Sider at addere til Kvadratet af $\frac{a}{2}$. Derpaa uddrages Kvadratroden paa begge Sider:

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x^2 + ax = -b$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b$$

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} = b}$$

Den ubekjendte faar altsaa to forskjellige Værdier, eftersom man vælger plus eller minus for Kvadratrodtegnet, undtagen naar $\frac{a^2}{4} - b = 0$, da den kun faar en Værdi, $x = -\frac{a}{2}$.

Er $b = 0$, faar Ligningen Formen:

$$x^2 + ax = 0$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$x + \frac{a}{2} = \pm\frac{a}{2}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2} = 0 \text{ eller } -a.$$

Dette sees ogsaa saaledes:

$$x^2 + ax = x(x + a) = 0$$

hvilken Ligning tilfredsstilles ved $x = 0$ og $x = -a$.

Ex.: $$x + \frac{3x}{2} = \frac{3+x}{x-1} + 1$$

$$2x^2 - 2x + 3x^2 - 3x = 6 + 2x + 2x - 2$$

$$5x^2 - 9x - 4 = 0$$

$$x^2 - \tfrac{9}{5}x = \tfrac{4}{5}$$

$$(\tfrac{9}{10})^2 = \tfrac{81}{100}$$

$$(x - \tfrac{9}{10})^2 = \tfrac{161}{100}$$

$$x - \tfrac{9}{10} = \pm\sqrt{\tfrac{161}{100}} = \pm\frac{\sqrt{161}}{10}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{161}}{10}$$

## § 83.

### Ligninger af høiere Grad.

Naar den ubekjendte i en Ligning kun forekommer ophøiet til to forskjellige Exponenter, hvoraf den ene er dobbelt saa stor som den anden, saa kan Ligningen løses som en kvadratisk Ligning. En saadan Ligning vil have Formen:

$$x^{2n} + ax^n + b = 0$$

Betragtes her $x^n$ som den ubekjendte, saa er Ligningen kvadratisk:

$$x^n = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

hvoraf x findes ved at uddrage $n^{te}$ Rod.

Ex. $$x^4 + 5x^2 - 36 = 0$$

$$x^4 + 5x^2 = 36$$

$$(\tfrac{5}{2})^2 = \tfrac{25}{4}$$

$$(x^2 + \tfrac{5}{2})^2 = \tfrac{169}{4}$$

$$x^2 + \tfrac{5}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{169}{4}} = \pm\tfrac{13}{2}$$

$$x^2 = -\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{13}{2} = 4 \text{ eller } -9$$

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \text{ eller } \pm\sqrt{-9}$$

## § 84.

### Exponentielle Ligninger.

En Art transcendente Ligninger, hvor nemlig den ubekjendte kun forekommer i en Exponent, og der paa en algebraisk Maade, eller hvor Ligningen kan reduceres til en saadan Form, kan løses ved Hjælp af Logarithmer. Er saaledes k et Udtryk, hvori den ubekjendte forekommer paa en algebraisk Maade, og indeholder a og b ikke den ubekjendte, saa vil Ligningen have eller kunne bringes til Formen:

$$a^k + b = 0$$

$$a^k = - b$$

$$k \log a = \log (- b)$$

$$k = \frac{\log (- b)}{\log a}$$

hvilken Ligning er algebraisk, da k skulde indeholde den ubekjendte paa en algebraisk Maade.

Ex. $$2 \,.\, 20^{3x+4} - 5 = 3 \,.\, 20^{3x} + 2$$

$$2 \,.\, 20^4 \,.\, 20^{3x} - 3 \,.\, 20^{3x} = 5 + 2$$

$$20^{3x} (2 \,.\, 20^4 - 3) = 7$$

$$3x \log 20 + \log (2 \,.\, 20^4 - 3) = \log 7$$

$$x = \frac{\log 7 - \log (2 \,.\, 20^4 - 3)}{3 \log 20}$$

## § 85.

### Elimination.

1. Naar man har to Ligninger, hvoraf den ubekjendte kan søges, saa kan man af disse danne en ny Ligning, hvori en af de Størrelser mangler, som findes i de oprindelige Ligninger, og hvoraf den ubekjendte kan søges. Af to Ligninger at søge en tredie, hvori en Størrelse mangler, som findes i de oprindelige Ligninger, kaldes at *eliminere* denne Størrelse.

2. En simpel Fremgangsmaade for mellem to Ligninger at eliminere en Størrelse er at skaffe den samme Koefficient i begge Ligninger og derpaa addere Ligningerne, dersom Størrelsen har modsat Fortegn, subtrahere dem, dersom den har samme Fortegn i begge Ligninger.

Til fælles Koefficient vælges gjerne det mindste fælles Multiplum for Koefficienterne til den Størrelse, der skal elimineres, og enhver af Ligningerne multipliceres med Kvotienten mellem dette fælles Multiplum og vedkommende Koefficient i Ligningen.

Denne Methode kaldes *Additions- og Subtraktionsmethoden* og bruges gjerne, naar begge Ligninger er af første Grad med Hensyn til den Størrelse, der skal elimineres.

Er saaledes de givne Ligninger:

$$12x - 35y - 49 = 0$$

$$10x + 21y - 91 = 0$$

saa elimineres y ved at multiplicere den første Ligning med 3, den anden med 5 og addere. Man faar da:

$$36x - 105y - 147 = 0$$

$$50x + 105y - 455 = 0$$

$$86x \qquad\qquad - 602 = 0$$

3. En anden Methode bestaar i, at man i den ene Ligning foreløbig betragter den Størrelse, der skal elimineres, som den ubekjendte og løser Ligningen med Hensyn til denne. Den derved erholdte Værdi indsættes for Størrelsen i den anden Ligning, hvorved Størrelsen bortfalder, og man faar et nyt Udtryk ind istedet.

Denne Methode kaldes *Substitutionsmethoden* og benyttes gjerne, naar en af Ligningerne eller begge er af anden Grad med Hensyn paa den Størrelse, som skal elimineres.

Er saaledes de givne Ligninger:

$$2x - 3y - 5 = 0$$

$$2x - 3xy + y^2 - 1 = 0$$

saa kan man for at eliminere y løse den første Ligning med Hensyn til y og indsætte Værdien i den anden Ligning. Man faar da:

$$y = \frac{2x - 5}{3}$$

$$2x - 3x \cdot \frac{2x - 5}{3} + \left(\frac{2x - 5}{3}\right)^2 - 1 = 0$$

4. Har man flere Ligninger, saa kan man saaledes mellem to og to af dem eliminere en Størrelse; mellem to og to af de derved erholdte Ligninger kan man eliminere en ny Størrelse o. s. v. Sammenligner man en af Ligningerne med alle de andre, faar man for enhver Sammenligning en ny Ligning; er altsaa Antallet af de oprindelige Ligninger n, saa faar man n — 1 Ligninger, der alle indeholder en Størrelse mindre. Sammenligner man en af disse Ligninger med alle de andre, faar man n — 2 nye Ligninger, der indeholder 2 Størrelser mindre end de oprindelige. Fortsætter man saaledes, indtil man kun har en Ligning tilbage, saa har man elimineret n — 1 Størrelser. Af n Ligninger kan man altsaa danne en Ligning, hvoraf n — 1 Størrelser er eliminerede.

## § 86.

### Ligninger med flere ubekjendte.

1. Skal en eller flere Ligninger opløses med Hensyn til flere deri forekommende Størrelser, saa kaldes alle disse ubekjendte, og Ligningerne ordnes da ikke efter de faldende Potentser af en af de ubekjendte, men efter den faldende Sum af alle Exponenter, og man bortskaffer ikke Koefficienten for den høieste Sum af Exponenter.

For at finde de ubekjendte eliminerer man mellem de givne Ligninger alle de ubekjendte undtagen en og søger derpaa denne. Derpaa eliminerer man paany alle de ubekjendte undtagen en anden og søger derpaa denne. Saaledes fortsætter man, indtil alle de ubekjendte er fundne. Ved denne Elimination kan da tre Tilfælde indtræffe:

I. Har man lige mange Ligninger og ubekjendte, n Ligninger og n ubekjendte, saa kan man mellem de n Ligninger eliminere de n — 1 ubekjendte, og man faar en Ligning tilbage til Bestemmelse af den sidste ubekjendte. I dette Tilfælde har man altsaa netop det nødvendige Antal Ligninger til at bestemme alle de ubekjendte, og Opgaven kaldes *bestemt.*

II. Har man færre Ligninger end ubekjendte, saa kan man eliminere saa mange af de ubekjendte, at der kun bliver en Ligning tilbage; denne Ligning indeholder da de øvrige ubekjendte. Ingen af dem kan da bestemmes. Derimod kan man give saa mange af de ubekjendte vilkaarlige Værdier, som de ubekjendtes Antal overskrider Ligningernes, og derpaa bestemme de øvriges Værdier. Opgaven kaldes i dette Tilfælde *ubestemt.*

III. Har man flere Ligninger end ubekjendte, saa kan man udvælge saa mange Ligninger, som der er ubekjendte, og af disse Ligninger bestemme de ubekjendte. De øvrige Ligninger er da overflødige. Opgaven kaldes i dette Tilfælde *overbestemt.*

2. Ved Elimination mellem flere Ligninger med lige saa mange ubekjendte kan det indtræffe, at samtidig med den ubekjendte, som elimineres, ogsaa alle de andre ubekjendte bortfalder. Isaafald kan ogsaa de Led bortfalde, som ikke indeholder nogen af de ubekjendte, saa at man

som Resultat af Eliminationen faar $0 = 0$; eller disse Led bortfalder ikke, saa at man faar som Resultat, at en fra Nul forskjellig Størrelse er lig Nul.

I første Tilfælde er de Ligninger, mellem hvilke man eliminerer, ikke uafhængige af hinanden, men en eller flere af dem kan udledes af de andre. Opgaven har altsaa i dette Tilfælde ikke givet saa mange af hinanden uafhængige Ligninger som ubekjendte; den er altsaa ubestemt. I andet Tilfælde er Opgaven uopløselig.

3. Er en Opgave af første Grad og bestemt, og indeholder alle Ligningernes Led en af de ubekjendte, saa kan Ligningerne tilfredsstilles ved at sætte alle de ubekjendte lig Nul; og da de kun kan tilfredsstilles ved en Værdi af hver af de ubekjendte, saa er altsaa hver af disse lig Nul.

## § 87.

### Irrationale Ligninger.

For at kunne bortskaffe Rodtegnene af en irrational Ligning har man følgende Regler:

1. Naar et Rodtegn kun forekommer i et Led, eller dersom i flere Led, da overalt i samme Potents, saa kan det bortskaffes ved at samle de Led, som indeholder dette Rodtegn, til et Led, bringe dette alene paa den ene Side af Lighedstegnet, og ophøie paa begge Sider til Rodexponenten.

Ex.:
$$3x\sqrt[3]{x} + 2 = 4x - 7\sqrt[3]{x}$$
$$\sqrt[3]{x}(3x + 7) = 4x - 2$$
$$x(3x + 7)^3 = (4x - 2)^3$$

2. Forekommer flere Rodtegn paa denne Maade i en Ligning, bortskaffes et ad Gangen, og det er da bekvem-

mest først at bortskaffe det Rodtegn, hvis Exponent er størst.

Ex.: $$\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} = 4$$

$$2\sqrt[3]{x} = 4 - \sqrt{x}$$

$$8x = 64 - 48\sqrt{x} + 12x - x\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x}(48 + x) = 64 + 4x$$

$$x(48 + x)^2 = (64 + 4x)^2$$

3. Forekommer samme Rodstørrelse ophøiet til forskjellige Exponenter, saa ordner man den givne Ligning efter Potentserne af denne Rodstørrelse, multiplicerer derpaa Ligningen gjentagne Gange med denne Rodstørrelse, indtil man har faaet saa mange Ligninger, som Rodexponenten indeholder Enheder, og eliminerer mellem disse Ligninger de forskjellige Potentser af Rodstørrelsen.

Ex.: $$\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} - 4 = 0$$

$$x + 3\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} = 0$$

$$x\sqrt[3]{x} + 3x - 4\sqrt[3]{x^2} = 0$$

Elimineres nu $\sqrt[3]{x^2}$ mellem første og anden og mellem første og tredie Ligning ved Additions- og Subtraktionsmethoden, faar man de to Ligninger:

$$x - 13\sqrt[3]{x} + 12 = 0$$

$$3x + (x + 12)\sqrt[3]{x} - 16 = 0$$

Og naar man mellem disse Ligninger eliminerer $\sqrt[3]{x}$:

$$(x + 12)(x + 12) + 13(3x - 16) = 0$$

eller: $$x^2 + 63x - 64 = 0$$

## § 88.

### Reduktion af Rodstørrelser.

Man kan i visse Tilfælde uddrage Kvadratroden af Udtryk af Formen $a \pm \sqrt{b}$, hvor a og b er rationale. I den Hensigt bemærker man følgende Sætning:

1. *Naar to Summer af et rationalt Tal og en irrational Kvadratrod af et rationalt Tal er lige, saa er Tallene udenfor Kvadratrødderne lige, og ligesaa Tallene under Kvadratrodtegnene.*

$$\text{Bet. } a + \sqrt{b} = p + \sqrt{q}$$

$$\text{Sats: } a = p, \; b = q$$

$$a + \sqrt{b} = p + \sqrt{q}$$

$$\sqrt{b} = p - a + \sqrt{q}$$

$$b = (p - a)^2 + 2(p - a)\sqrt{q} + q$$

$$b - q - (p - a)^2 = 2(p - a)\sqrt{q}$$

Da første Led i denne Ligning er rationalt, andet irrationalt, kan Ligningen ikke finde Sted, med mindre begge Led er lig Nul:

$$p - a = 0$$

$$p = a$$

og: $$b - q - (p - a)^2 = b - q = 0$$

$$b = q$$

2. For at uddrage Kvadratroden af $a \pm \sqrt{b}$, sættes:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

$$a \pm \sqrt{b} = x \pm 2\sqrt{xy} + y$$

Skal nu x og y, altsaa ogsaa $x + y$ og $xy$ være rationale, saa følger heraf:

$$a = x + y \qquad \sqrt{b} = 2\sqrt{xy}$$
$$y = a - x \qquad b = 4xy = 4x(a - x)$$
$$b = 4ax - 4x^2$$
$$4x^2 - 4ax = -b$$
$$x^2 - ax = -\frac{b}{4}$$
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$
$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - b}{4}$$
$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b}}{2}$$
$$\text{og } y = a - x = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

Er $\sqrt{a^2 - b}$ et rationalt Tal, saa er x og y rationale, og $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ er reduceret til Formen: $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$.

Ex. $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$. Man sætter:

$$\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$
$$6 + 2\sqrt{5} = x + 2\sqrt{xy} + y$$
$$6 = x + y \qquad 2\sqrt{5} = 2\sqrt{xy}$$
$$6 - x = y \qquad 5 = xy = x(6 - x) = 6x - x^2$$
$$x^2 - 6x = -5$$
$$x = 3 \pm \sqrt{4} = 5 \text{ eller } 1$$
$$y = 6 - x = 1 \text{ eller } 5$$
$$\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5} + 1$$

## § 89.

### Ligninger for den arithmetiske og geometriske Række.

1. Er i en arithmetisk Række: a det første og t det sidste Led, s Rækkens Sum, d dens Differents og n Leddenes Antal, saa er ifølge § 57:

$$s = \frac{(a + t)n}{2}; \quad t = a + (n - 1)d$$

Ved Hjælp af disse to Ligninger kan af de 5 Størrelser a, t, d, n og s, de to findes, naar de tre er givne. De Ligninger, man faar, er følgende:

| Givne Størrelser. | Den søgte Størrelse. | Opløsning. |
|---|---|---|
| a n t | s | $s = \frac{(a+t)n}{2}$ |
| a d n | | $s = \frac{(2a + (n-1)d)n}{2}$ |
| d n t | | $s = \frac{(2t - (n-1)d)n}{2}$ |
| a d t | | $s = \frac{(t+d-a)(t+a)}{2d}$ |
| a d n | t | $t = a + (n-1)d$ |
| a n s | | $t = \frac{2s}{n} - a$ |
| d n s | | $t = \frac{s}{n} + \frac{(n-1)d}{2}$ |
| a d s | | $t = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{2sd + (a - \frac{1}{2}d)^2}$ |
| a n t | d | $d = \frac{t-a}{n-1}$ |
| a n s | | $d = \frac{2(s-an)}{n(n-1)}$ |
| a t s | | $d = \frac{(t+a)(t-a)}{2s-t-a}$ |
| n t s | | $d = \frac{2(tn-s)}{n(n-1)}$ |
| a d t | n | $n = 1 + \frac{t-a}{d}$ |
| a t s | | $n = \frac{2s}{t+a}$ |
| a d s | | $n = \frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2}$ |
| d t s | | $n = \frac{2t+d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2t+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}}$ |

| Givne Størrelser. | Den søgte Størrelse. | Opløsning. |
|---|---|---|
| d n t | a | $a = t - (n-1)d$ |
| t n s | | $a = \frac{2s}{n} - t$ |
| d n s | | $a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$ |
| d t s | | $a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{(t + \frac{1}{2}d)^2 - 2sd}$ |

2. Er i en geometrisk Række a det første og t det sidste Led, s Rækkens Sum, m dens Exponent og n Leddenes Antal, saa er ifølge § 58:

$$t = am^{n-1} \text{ og } s = \frac{am^n - a}{m - 1}$$

Ved Hjælp af disse to Ligninger kan af de fem Størrelser a, m, n, t og s de 2 findes, naar de 3 andre er givne. De Ligninger, man faar, er følgende:

| Givne Størrelser. | Den søgte Størrelse. | Opløsning. |
|---|---|---|
| a m n | s | $s = \frac{am^n - a}{m - 1}$ |
| a n t | | $s = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$ |
| a m t | | $s = \frac{tm - a}{m - 1}$ |
| m n t | | $s = \frac{t(m^n - 1)}{m^{n-1}(m - 1)}$ |
| a m n | t | $t = am^{n-1}$ |
| a m s | | $t = \frac{a + (m - 1)s}{m}$ |
| m n s | | $t = \frac{m^{n-1}(m - 1)s}{m^n - 1}$ |
| a n s | | $t(s - t)^{n-1} - a(s - a)^{n-1} = 0$ |

| Givne Størrelser. | Den søgte Størrelse. | Opløsning. |
|---|---|---|
| a n t | m | $m = \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ |
| a t s | | $m = \frac{s-a}{s-t}$ |
| a n s | | $m^n - \frac{s}{a} m + \frac{s-a}{a} = 0$ |
| n t s | | $m^n - \frac{s}{s-t} m^{n-1} + \frac{t}{s-t} = 0$ |
| a m t | n | $n = \frac{\log t + \log m - \log a}{\log m}$ |
| a m s | | $n = \frac{\log (a + ms - s) - \log a}{\log m}$ |
| a t s | | $n = 1 + \frac{\log t - \log a}{\log (s-a) - \log (s-t)}$ |
| m t s | | $n = \frac{\log m + \log t - \log (mt - ms + s)}{\log m}$ |
| m n t | a | $a = \frac{t}{m^{n-1}}$ |
| m n s | | $a = \frac{s(m-1)}{m^n - 1}$ |
| m t s | | $a = tm - (m-1)s$ |
| n t s | | $a(s-a)^{n-1} - t(s-t)^{n-1} = 0$ |

# Skoleefterretninger

for 1873—1874.

## I.

## Forstanderskabet.

Forstanderskabet bestaar af følgende Medlemmer foruden Byfogden og Skolens Rektor:

Steenstrup, H., Toldinspektør, R. St. O., Formand.

Hauge, A., Provst.

Schaaning, J. J. L. Læge.

## II.

## Lærerne.

Schreiner, Emil Theodor, Rektor. Født 1831, cand. mag. 1855, udnævnt til Adjunkt ved Christiania Kathedralskole 1863, til Overlærer ved samme Skole 1864, til Rektor ved den herværende Skole 1872.

Stoltenberg, Vincent, Overlærer. Født 1814, cand. mag. 1840, ansat som Timelærer ved Skolen 1841, konstitueret som Adjunkt 1845, udnævnt til Overlærer 1853.

Broch, Thorvald Ingolf, Overlærer. Født 1839, cand. real. 1863, udnævnt 1866.

Holfeldt, Paul Christian Ditlef Adolph, Adjunkt. Født 1815, cand. theol. 1842, ansat som Timelærer 1850, udnævnt 1852.

Arctander, August Hieronymus, Adjunkt. Født 1818, udnævnt 1853.

Jynge, Anton Henrik Jørgen Hirsholm, Adjunkt.

Født 1837, cand. mag. 1862, ansat som Timelærer 1862, udnævnt 1871.

Nielsen, Ole Lovenius Borgen, Klasselærer. Født 1830, cand. theol. 1855, ansat 1860.

Holm, Peder, Klasselærer. Født 1835, dimitteret fra Asker Seminarium 1854, ansat 1866.

Hanssen, Jonas, Klasselærer. Født 1843, cand. mag. 1870, ansat 1871.

Rojahn, Friedrich Wilhelm, Organist. Født 1820; Sanglærer siden 1861.

Stub, Paul Vilhelm, Kaptein. Født 1836, Timelærer siden 1863.

Graff, Ludvig Joachim, Premierløitnant. Født 1846; Lærer i Gymnastik og militære Øvelser siden 1872. Fratraadte sin Post ved Udgangen af Marts Maaned, da han paa Grund af militære Tjenestepligter maatte tage Bopæl i en anden By. I hans Sted er Premierløitnant Emil Diesen af det kgl. Departement for Kirke- og Undervisningsvæsenet antagen til Gymnastiklærer.

Siden den 7de April har Kaptein H. Hagerup været vikarierende Lærer i Gymnastik.

## III.

## Klasser. Discipeltal.

Skolen har i dette Skoleaar havt følgende Klasser: Forberedelsesklassen og Middelskoleklasserne I, II, III, IV, V, VI, samt efter den gamle Ordning 2den Latinklasse (øverste Afdeling) og 3die Latinklasse (nederste Afdeling).

Af disse Klasser have følgende været forenede: Forberedelsesklassen med Middelskoleklasse I i alle Fag.

Middelskolekl. IV og V i Religion og 2 Timer i Mathematik.
— V og VI i Norsk, Tydsk, 3 Timer i Engelsk, 4 Timer i Mathematik og 1 Time i Tegning.
2den og 3die Latinkl. i alle Fag undtagen Græsk og 2 Timer i Mathematik.

Discipeltallet var lige før Optagelsesprøven 63. I 3die Kvartal bleve 35 nye Disciple optagne i Skolen, i 4de Kvartal 2, i 1ste Kvartal 1874 2 og i 2det Kvartal 1. Ialt have altsaa 103 Disciple i dette Skoleaar nydt Undervisning i Skolen.

Indtil Udgangen af Mai Maaned udgik 10 Elever af Skolen, nemlig af

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Middelskolekl. | I | . . . . | 2 | Elever. |
| — | II | . . . . | 4 | — |
| — | III | . . . . | 2 | — |
| — | IV | Eng. Lin. | 1 | — |
| — | V | Lat. Lin. | 1 | —. |

Af disse 10 Elever udgik 4 paa Grund af Forældrenes Bortflytning, 1 for at lære Faderens Haandværk, 1 for at gaa tilsøs og 2 fordi de ikke kunde gjøre tilstrækkelig Fremgang; 2 Disciple maatte udelukkes fra Undervisningen paa Grund af Restancer af Skolepenge.

I de forskjellige Klasser har Discipeltallet været følgende:

| | 3die Kvartal 1873. | 4de Kvartal 1873. | 1ste Kvartal 1874. | 2det Kvartal 1874. |
|---|---|---|---|---|
| Forberedelsesklassen . . . . . . . | 10 | 11 | 11 | 12 |
| Midd. Klasse I . . . . . . . . . . | 20 | 19 | 19 | 18 |
| — II . . . . . . . . . . | 13 | 14 | 13 | 12 |
| — III . . . . . . . . . . | 18 | 16 | 15 | 15 |
| Lateris | 61 | 60 | 58 | 57 |

| | 3die Kvartal 1873. | 4de Kvartal 1873. | 1ste Kvartal 1874. | 2det Kvartal 1874. |
|---|---|---|---|---|
| Transport | 61 | 60 | 58 | 57 |
| Midd. Klasse IV Latinlinien . . . | 5 | 5 | 5 | 5 |
| — - Engelsklinien . . | 4 | 4 | 5 | 4 |
| — V Latinlinien . . . | 10 | 10 | 10 | 10 |
| — - Engelsklinien . . | 5 | 5 | 5 | 5 |
| — VI Latinlinien . . . | 3 | 3 | 4 | 4 |
| — - Engelsklinien . . | 1 | 1 | „ | „ |
| 2den Latinklasse a . . . . . . . | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 3die Latinklasse b . . . . . . . | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 98 | 97 | 96 | 94 |

Af det ovenfor nævnte Antal, 103 Elever, ere hjemmehørende i

| | |
|---|---|
| Skiens By, Gjerpen og Solum . . . . . | 93 |
| andre Landdistrikter end Gjerpen og Solum | 4 |
| Porsgrund . . . . . . . . . . . . | 4 |
| andre Byer . . . . . . . . . . . . | 2. |

## IV.

## Undervisningstidens Fordeling paa de forskjellige Fag.

De ugentlige Undervisningstimers Fordeling paa de forskjellige Klasser og Fag sees af følgende Tabel:

| Undervisningsfag. | Forberedelses-klasse. | Middel. Kl. I | Middel. Kl. II | Middel. Kl. III | Middel. Kl. IV | Middel. Kl. V | Middel. Kl. VI | 2den Latinkl. | 3die Latinkl. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Religion . . . . . . . . . | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2. Norsk . . . . . . . . . . | 9 | 9*) | 5 | 5 | 4 | 3 | 3 | 2 | 3 |
| 3. Tydsk . . . . . . . | — | 5 | 5 | 5 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |

*) I andet Halvaar 6 Timer.

| Undervisningsfag. | Forberedelsesklasse. | Middel. Kl. I | Middel. Kl. II | Middel. Kl. III | Middel. Kl. IV | Middel. Kl. V | Middel. Kl. VI | 2den Latinkl. | 3die Latinkl. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4. Fransk . . . . . . . . | — | — | — | — | — | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 5. Engelsk . . . . . . . . | — | — | — | — | 6 | 6 | 5 | — | 2 |
| 6. Latin . . . . . . . . . | — | — | — | — | 7 | 7 | 7 | 9 | 9 |
| 7. Græsk . . . . . . . . | — | — | — | — | — | — | — | 5 | 5 |
| 8. Historie . . . . . . . . | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 9. Geografi . . . . . . . . | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10. Mathematiske Fag (Regning indbef.) . . . . . | 4 | 4 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 4 | 3 |
| 11. Naturkundskab . . . . | — | — | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | — | — |
| 12. Skrivning . . . . . . . | 4 | 4 | 3 | 2 | — | — | — | — | — |
| 13. Tegning . . . . . . . . | — | — | 2 | 1 | 1*) | 1*) | 1*) | | |

I Sang har der været undervist i 4 Timer, i Gymnastik og militære Øvelser i 6 Timer ugentlig. En Uge af August Maaned f. A. anvendtes udelukkende til militære Øvelser, hvilke afsluttedes med en Dags Udmarsch.

I Middelskolekl. V og VI have samtlige Elever deltaget i Undervisningen i den valgfri Del af Naturvidenskaben; ligeledes have de alle læst Fransk (valgfrit Fag) med Undtagelse af een Discipel af Kl. V.

Af 3die Latinklasses Elever have 3 Elever havt Undervisning i Engelsk.

## V.

## Fagfordelingen mellem Lærerne.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Rektor. | Latin i 3die + 2den Latinkl. . . . | 6 | Timer. |
| | — i 3die Latinkl. . . . . . . . | 3 | — |
| | — i 2den Latinkl. . . . . . . . | 3 | — |

*) Kun for Engelsklinien.

Norsk (mundtl.) i 3die + 2den Latinkl. 1 Time.
— — i 3die Latinkl. . . . 1 —
Græsk i 3die Latinkl. . . . . . . 5—19 T.
Klasseforstander i 3die og 2den Latinklasse.

Stoltenberg. Norsk (skriftl.) i 3die Latinkl. 1 Time.
Fransk i 3die + 2den Latinkl. . . 2 —
— i M. Kl. VI . . . . . . . . 2 —
— i M. Kl. V . . . . . . . . 3 —
Tydsk i M. Kl. VI + V. . . . . . 3 —
— i M. Kl. IV . . . . . . . . 3 —
Latin i M. Kl. VI . . . . . . . . 7—21 T.
Klasseforttander i M. Kl. VI.

Broch. Mathematik i 3die + 2den Latinkl. . 2 Timer.
— i 3die Latinkl. . . . . . 1 —
— i 2den Latinkl. . . . . . 2 —
— i M. Kl. VI + V . . . 4 —
— i M. Kl. VI . . . . . . 2 —
— M. Kl. V + IV . . . 2 —
— M. Kl. IV . . . . . . 4 —
Naturkundskab i M. Kl. VI. . . . . 3 —
— i M. Kl. V . . . . . . 3 —
Fysisk Geografi i M. Kl. V . . . . . 1—24 T.
Klasseforstander i M. Kl. V, Engelsklinien.

Holfeldt. Religion i 3die + 2den Latinkl. . 2 Timer.
Religion i M. Kl. V + IV . . . . . 2 —
— i M. Kl. III . . . . . . . 3 —
Tydsk i 3die + 2den Latinkl. . . 2 —
Latin i M. Kl. V. . . . . . . . . 7 —
— i M. Kl. IV . . . . . . . . 7—23 T.
Klasseforstander M.-Kl. V, Latinlinien.

Arctander. Engelsk i 3die Latinkl. . . . 2 Timer.
Engelsk i M.Kl. VI + V . . . . . . . 3 —

Engelsk i M.Kl. VI . . . . . . . . . . 2 Timer.
— i M.Kl. V . . . . . . . . . . 3 —
— i M.Kl. IV . . . . . . . . . . 6 —
Naturkundskab i M.Kl. IV . . . . . . . 2 —
— i M.Kl. III . . . . . . . 2 —
— i M.Kl. II . . . . . . . 2—22 T.
Klasseforstander i M.Kl. IV, Engelsklinien.

Jynge. Historie i 3die + 2den Latinkl. . . . 3 Timer.
Geografi — — — . . . 1 —
Historie i M. Kl. VI . . . . . . . . . . 3 —
Geografi i — — . . . . . . . . . . 1 —
Historie i M. Kl. IV . . . . . . . . . . 3 —
Geografi i — — . . . . . . . . . . 3 —
Historie i M. Kl. III . . . . . . . . . . 3 —
Geografi i — — . . . . . . . . . . 3 —
Græsk i 2den Latinkl. . . . . . . . . 5—25 T.
Klasseforstander i M. Kl. IV, Latinlinien.

Nielsen. Religion i M. Kl. VI . . . . . . 2 Timer.
Religion i M. Kl. II . . . . . . . . . . 3 —
Norsk — II . . . . . . . . . . 5 —
Tydsk — II . . . . . . . . . . 5 —
Norsk og Tydsk i M. Kl. I og Norsk i Forberedelsesklassen . . . . . . . . . . 9 —
(i andet Halvaar 11) tilsammen . . . 24 (26) —
Klasseforstander i M. Kl. II.

Holm. Religion, Historie, Geografi, Regning, Skrivning } i M. Kl. I og Forberedelsesklassen . . . . . 17 Timer.
Regning i M. Kl. II . . . . . . . . . 4 —
Mathemat. Fag i M. Kl. III . . . . . 6—27 T.

Klasseforstander i M. Kl. I og Forberedelsesklassen.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Hanssen. | Norsk i M. Kl. VI + V | . . . . . | 3 | Timer. |
| | Norsk i M. Kl. IV | . . . . . . . . . . | 4 | — |
| | Historie — V | . . . . . . . . . . | 2 | — |
| | — — II | . . . . . . . . . . | 3 | — |
| | Geografi — II | . . . . . . . . . . | 3 | — |
| | Norsk — III | . . . . . . . . . . | 5 | — |
| | Tydsk — III | . . . . . . . . . . | 5—25 | T. |

Klasseforstander i M. Kl. III.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Stub. | Tegning i M. Kl. VI + V | . . . . . . | 1 | Time. |
| | — — IV | . . . . . . | 1 | — |
| | Skrivning og Tegning i M. Kl. III | . . . | 3 | — |
| | — — i — II | . . . | 5—10 | T. |

VI.

## Skoleaarets Pensa.

### Religion.

*Forberedelsesklassen.* Af Vogts lille Bibelhistorie §§ 1—62 samt „kort Beskrivelse af Jødeland“.

*Middelskoleklasse I.* Vogts lille Bibelhistorie fra § 63. I andet Halvaar ere desuden endel Fortællinger af det nye Testamente mundtlig meddelte af Læreren (efter Gislesens Bibelhistorie) og gjenfortalte af Disciplene. Katekismens fem Parter (uden Luthers Forklaring). Nogle Salmer.

*Middelskoleklasse II.* Vogts Bibelhistorie for Borger- og høiere Almueskoler S. 1—67. Katekismens tre første Parter med Luthers Forklaring. Bibellæsning: første Mosebog.

*Middelskoleklasse III.* Vogts større Bibelhistorie S. 66 til det nye Testament. Katekismens to sidste

Parter med Luthers Forklaring. Otte Salmer. Bibellæsning: Josvas Bog og Dommernes Bog i Udvalg; Ruths Bog; 1ste og noget af 2den Samuels Bog i Sammenhæng.

*Middelskoleklasse IV og V.* Vogts større Bibelhistorie fra S. 57 til det nye Testament. Pontoppidans Forklaring (Sverdrups Udgave) 2den Part. Bibellæsning: Josvas Bog og Dommernes Bog i Udvalg; Ruths Bog og 1ste Samuels Bog i Sammenhæng.

*Middelskoleklasse VI.* Repetition af Bibelhistorien og Forklaringen. Søndagstexterne gjennemgaaede. Bibellæsning: enkelte Afsnit af 3die og 4de Mosebog.

*2den og 3die Latinklasse.* Af Herslebs Bibelhistorie er det nye Testament og noget af det gamle repeteret; ligeledes Pontoppidans Forklaring. Af Matthæi Evangelium ere de 16 første Kapitler læste i Oversættelsen; derfra siden Paaske fortsat i Grundsproget. Endel af Vogts Kirkehistorie.

## Modersmaalet.

*Forberedelsesklassen.* Af Læsebog for Folkeskolen og Folkehjemmet første og andet Skoletrin; flere Digte udenad. Afskrivning efter Bog (med Stavelsedeling ved Bindetegn); af og til Retskrivningsøvelser sammen med Middelskoleklasse I.

*Middelskoleklasse I.* Læsning og Udenadslæren som i Forberedelsesklassen. Grammatik (uden Lærebog): i første Halvaar Hovedtaledelene, indøvede ved Analyse; i andet Halvaar Formlære (svarende til, hvad der er gjennemgaaet i Tydsk). Retskrivningsøvelser efter Diktat; skriftlig Gjengivelse af smaa Fortællinger.

*Middelskoleklasse II.* Af Læsebog for Folkeskolen og Folkehjemmet udvalgte Stykker af tredie Skoletrin. Udenad endel Digte og prosaiske Stykker; de sidste skriftlig gjengivne paa Skolen. Af Løkkes „Kort Omrids af Modersmaalets Grammatik“ Formlæren; til Analyse er Læsebogen benyttet. Retskrivningsøvelser efter Diktat; Regler for Interpunktion.

*Middelskoleklasse III.* Af Jensens Læsebog for Mellemklasserne Afdeling 1—3; elleve Digte lærte udenad. Løkkes Omrids af Gramatikken repeteret. Retskrivningsøvelser 1 à 2 Gange ugentlig; Stil hver anden Uge.

*Middelskoleklasse IV.* Af Jensens Læsebog for Mellemklasserne 3die og 4de og omtrent Halvdelen af 5te Afdeling; otte Digte lærte udenad. Af Løkkes Grammatik læst og repeteret Formlæren. Retskrivningsøvelser een Gang ugentlig; Stil hver anden Uge.

*Middelskoleklasse V og VI.* H. Ibsens Kongsemnerne og Terje Vigen; udvalgte Stykker af Wergeland, af Asbjørnsens Huldreeventyr og af Allens „De tre nordiske Rigers Historie“. Af Løkkes Grammatik Syntaxen. Et Omrids af Nordens Mythologi. Stil hver anden Uge.

*2den og 3die Latinklasse.* Forskjellige prosaiske og poetiske Stykker af den ældre og nyere Litteratur (med udførligere litteraturhistoriske Oplysninger om Kjæmpeviserne, Holberg, Wessel, Wergeland og Welhaven). Troper og Figurer samt (for

3die Klasse alene) Digtarterne. Svensk: Tegnér, Frithjofs saga. I Regelen hver anden Uge en Stil og een Gang om Maaneden et mundtligt Foredrag.

Tydsk.

*Middelskoleklasse I.* Knudsens Elementær- og Læsebog (3die Udgave) til S. 25; de norske Exempler oversatte dels skriftlig (1 Time ugentlig), dels mundtlig. Desuden særskilte Øvelser i Oplæsning og Afskrivning. Grammatik (uden Lærebog): Artikelens, Substantivernes og Adjektivernes Deklination.

*Middelskoleklasse II.* Knudsens Elementær- og Læsebog til S. 57 samt S. 74—89. De norske Exempler oversatte dels mundtlig, dels skriftlig.

*Middelskoleklasse III.* Knudsens Elementær- og Læsebog (1ste Udg.) S. 57—73 og S. 89—120. Af Løkkes mindre Grammatik Kjønsreglerne og Konjugationerne.

*Middelskoleklasse IV.* Knudsens Elementær- og Læsebog fra S. 178. Autenrieths Læsebog S. 1—24. Af Løkkes mindre Grammatik Formlæren. Hver Uge en Hjemmestil.

*Middelskoleklasse V.* Hjorths Læsebog S. 173—215. Af Løkkes mindre Grammatik Kasuslæren. Hver Uge en Hjemmestil, af og til mundtlig Oversættelse til Tydsk.

*Middelskoleklasse VI.* Hjorths Læsebog S. 173—215 og S. 235—237. Af Løkkes Grammatik Syntaxen og Repetition af Formlæren. Stil som i Klasse V.

*2den og 3die Latinklasse.* Hjorths Læsebog S. 291—321 og S. 330—385. Nogle poetiske Stykker i Autenrieths Læsebog. Af Løkkes Grammatik Formlæren. Hver Time mundtlig Oversættelse til Tydsk.

## Engelsk.

*Middelskoleklasse IV.* Af Arctanders Elementærkursus er gjennemgaaet Indledningen og Stykkerne 1—66. De første 30 Fabler ere hjemme afskrevne og paa Skolen forsynede med interlinear Udtale og Oversættelse; i andet Halvaar er den følgende Times Pensum blot oplæst paa Skolen, og Anvisning given til at finde vanskeligere Ord i Ordbogen. Stykkerne 1—45 ere læste udenad og derpaa gjengivne efter Hukommelsen dels skriftlig, dels mundtlig. Af Kristiansens Læsebog er læst 14 Sider. Af Løkkes Grammatik Formlæren. Een Gang om Ugen er et forhen læst Stykke dikteret, hvilket siden hjemme er oversat paa Norsk. Een Gang ugentlig en Stil.

*Middelskoleklasse V.* Af Kristiansens Læsebog S. 14—62 og S. 95—124; S. 135—147 (Poesi) er tillige lært udenad (ligesaa 1—4 og 14—18). Af Løkkes Grammatik er Formlæren repeteret; af Syntaxen S. 69—123. En Samling Homonymer. Hver Uge Diktat (i første Halvaar History of the English language i Lathams Grammar of the English language for the use of commercial schools, i andet Halvaar en sammenhængende Fortælling); det Dikterede er oversat hjemme. Hver Uge en længere Hjemmestil, som, efterat være rettet, paany er afskrevet med alle Feil rettede. Det Udenadlærte er to Gange om Ugen gjengivet mundtlig og derpaa skriftlig.

*Middelskoleklasse VI.* I denne Klasse har der kun i kort Tid været undervist i Engelsk, da den eneste Elev, som her tilhørte Engelsklinien, i Aarets Løb gik over til Latinlinien efter at have faaet Privatundervisning i Latin. I den senere Tid har denne Elev for at vedligeholde sin Kundskab i Engelsk, deltaget i den engelske Undervisning i 3die Latinklasse (Timen 11—12).

*3die Latinklasse.* Wittrups Læsebog for Viderekomne S. 8—65. Af Løkkes Grammatik Syntaxen S. 69—90. Udtalelæren fuldstændigere.

## Fransk.

*Middelskoleklasse V.* Borrings Læsebog for Mellemklasserne S. 1—34. Af Ingerslevs Grammatik Formlæren.

*Middelskoleklasse VI.* Borrings Læsebog for Mellemklasserne S. 35—90. Repetition af Formlæren.

*2den og 3die Latinklasse.* Af Borrings Etudes littéraires 168 Sider, hvoraf omtr. 80 kursorisk. Af Ingerslevs Grammatik er Formlæren repeteret.

## Latin.

*Middelskoleklasse IV.* Schmidts Læsebog Stykkerne 1—33 og Fablerne. Af Schreiners Grammatik det Vigtigste af Formlæren.

*Middelskoleklasse V.* Af Cornelius Nepos otte Feltherrer (fra Lysander til Epaminondas med Forbigaaelse af Dion). Cæsar Bell. Gall. I og II. Phædri Fabler, 1ste Bog. Af Schreiners Grammatik

Kasuslæren. Hver Uge en Stil; i Regelen hver Time mundtlig Oversættelse til Latin.

*Middelskoleklasse VI.* Ciceros fire Taler mod Catilina. Repetition af Cæsar Bell. Gall. I—III og af Phædri Fabler I—III. Af Schreiners Grammatik det Væsentligste af Syntaxen; Repetition af Formlæren og Kasuslæren. Hver Uge en Stil; af og til mundtlig Stil.

*2den og 3die Latinklasse.* Livius XXII og XXIII fra Kap. 16. Virgils Æneide II og IV. Af Madvigs Grammatik Syntaxens andet Afsnit fra Kap. 6. Dorphs græsk-romerske Mythologi.

2den Latinklasse alene: Cicero oratt. in Catil. I og III. I første Halvaar hver Uge en latinsk Stil; i andet Halvaar to à tre Stile ugentlig.

3die Latinklasse alene: Af Ovids Metamorphoses 470 Vers. Thomsen, Det romerske Stats- og Privatliv. Før Nytaar hver Uge en Oversættelse, efter Nytaar to, hvoraf den ene ex tempore. Desuden af og til kursorisk Læsning.

## Græsk.

*2den Latinklasse.* Xenophons Anabasis IV. Homers Iliade I og IV, 1—518. Af Curtius's Grammatik er Formlæren repeteret (med Forbigaaelse af mange Enkeltheder).

*3die Latinklasse.* Homers Iliade IV fra Vers 400, VI, VII, VIII og IX. Xenophons Anabasis II. Platons Apologi. De vigtigste syntaktiske Regler dels efter en schematisk Oversigt over Kasuslæren (trykt som Manuskript), dels efter et Diktat.

## Historie.

*Forberedelsesklassen og Middelskoleklasse I.* Nordens Historie indtil Kalmarunionen mundtlig gjennemgaaet omtrent i samme Omfang som i S. Petersens Norges, Sveriges og Danmarks Historie for Middelskolen.

*Middelskoleklasse II.* S. Petersens Norges, Sveriges og Danmarks Historie for Middelskolen S. 18—122.

*Middelskoleklasse III.* Nissens og Daaes Verdenshistorie S. 108—214.

*Middelskoleklasse IV.* Nissens og Daaes Verdenshistorie S. 224—378 (med Forbigaaelse af S. 271—279).

*Middelskoleklasse V.* S. Petersens Norges, Sveriges og Danmarks Historie for Middelskolen S. 14—152. De sagnhistoriske Stykker gjennemgaaede paa Skolen.

*Middelskoleklasse VI.* S. Petersens Norges, Sveriges og Danmarks Historie for Middelskolen S. 65—176; derefter hele Lærebogen repeteret; ligesaa Nissens og Daaes Verdenshistorie.

*2den og 3die Latinklasse.* L. K. Daas Lærebog i den nyere Historie S. 432—705.

## Geografi.

*Forberedelsesklassen og Middelskoleklasse I.* En ganske kort Oversigt, i første Halvaar uden Lærebog, i andet Halvaar med Benyttelse af Platous Kortfattet Jordbeskrivelse for Almueskoler.

*Middelskoleklasse II.* Platous Kortfattet Jordbeskrivelse fra S. 13 (med Forbigaaelse af det mindre Væsentlige).

*Middelskoleklasse III.* Erslevs Lærebog (gjennemseet af S. Petersen) S. 15—151, med Forbigaaelse af hvad der hører til den fysiske Geografi.

*Middelskoleklasse IV.* Erslevs Lærebog S. 151—267.

*Middelskoleklasse V.* Geelmuydens Lærebog fra Begyndelsen til Europas Befolkning.

*Middelskoleklasse VI.* Af Geelmuydens Lærebog repeteret Norge, Sverige og Danmark samt den største Del af de Afsnit, som behandle den fysiske Geografi; det Øvrige efter Platous Udtog.

*2den og 3die Latinklasse.* Geelmuydens Lærebog S. 210—285 (Portugal til Asien) og Australien.

3die Latinklasse særskilt: samme Lærebog S. 165—210.

## Naturkundskab.

*Middelskoleklasse II.* Læsebog for Folkeskolen og Folkehjemmet, andet Skoletrin S. 110—160.

*Middelskoleklasse III.* Samme Læsebog, andet Skoletrin S. 95—110 og S. 150—160 samt tredie Skoletrin S. 40—103. Af Siebkes Omrids af Dyrerigets og Planterigets Naturhistorie det Meste af Afsnittet om Planteriget.

*Middelskoleklasse IV.* Siebkes Omrids læst og repeteret. I alle tre Klasser Forevisning af Skolens naturhistoriske Samlinger og af Plancheværker.

*Middelskoleklasse V.* Mineralogi efter et Diktat (med Benyttelse af Skolens Stensamling). Af Christies Fysik: Varmelæren, Ligevegt og Bevægelse, Akustik og Optik.

*Middelskoleklasse VI.* Mineralogi som i V. Af Christies Fysik Akustik og Optik; dernæst Repetition af alt, hvad der er læst i Naturhistorie og Naturlære.

## Mathematiske Fag.

*Forberedelsesklassen.* De fire Regningsarter i ubenævnte hele Tal. Den lille Tabel.

*Middelskoleklasse I.* De fire Regningsarter i benævnte hele Tal. I andet Halvaar Øvelse i at løse lette Opgaver fra det daglige Liv ved Hovedregning. Tabel.

*Middelskoleklasse II.* De fire Regningsarter i Brøk og Decimalbrøk samt Hovedregning i benævnte Tal.

*Middelskoleklasse III.* I første Halvaar Decimalbrøk og enkelt og sammensat Reguladetri. I andet Halvaar Th. Brochs Lærebog i Tal- og Bogstavregning §§ 27—43 samt Opgaverne i I—XX og tildels i XXXVI—XL. I samme Halvaar ere to Timer ugentlig anvendte til geometriske Konstruktionsøvelser med Benyttelse af et af Overlærer Broch udarbeidet (utrykt) Indledningskursus i Geometri.

*Middelskoleklasse IV.* Regning: indøvet de fire Regningsarter med Bogstaver, Potentser, Rødder og Logarithmer efter Th. Brochs Lærebog.

Geometri: Fladers Udmaaling. Læst og repeteret Bonnevies Geometri til Perpendikulærer og Skraalinier.

*Middelskoleklasse V.* Regning: indøvet Rødder og Logarithmer efter Th. Brochs Lærebog.

Geometri: Bonnevies Geometri fra parallele Linier.

*Middelskoleklasse VI.* Regning: gjennemgaaet Rentesregning og repeteret det hele Kursus efter Th. Brochs Lærebog.

Geometri: Bonnevies Geometri fra 3die Bog; derpaa Repetition af hele Lærebogen.

*2den Latinklasse.* Læst og indøvet sjette Afsnit af Th. Brochs Lærebog; desuden læst Proportionslæren. Tredie, fjerde og femte Bog af O. J. Brochs Geometri.

*3die Latinklasse.* Læst og indøvet sjette Afsnit af Th. Brochs Lærebog. Ottende og niende Bog af O. J. Brochs Geometri.

## VII.

## Dimission til Universitetet i 1873.

Til Universitetet dimitterede Skolen i 1873 følgende fem Elever:

*Bjelke*, Anton.
*Ludvigsen*, Johan.
*Olsen*, Rudolf.
*Thue*, Nikolai.
*Østbye*, Peter.

Udfaldet af Examen artium for disses Vedkommende sees af følgende Tabel:

| | Modersm. | Lat. Overs. | Latin. | Græsk. | Tydsk. | Fransk. | Engelsk. | Religion. | Historie. | Geographi. | Arithmet. | Geometri. | Sum | Antal Fag. | *Hovedkarakter.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Bjelke* . . | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 24 | 12 | Laudabilis. |
| *Ludvigsen* . | 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 26 | 12 | Laudabilis. |
| *Olsen* . . . | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 21 | 12 | Laudabilis. |
| *Thue* . . . | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 19 | 12 | Laudabilis. |
| *Østby* . . . | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 14 | 12 | Laud. præ ceteris. |

## VIII.
## Skole- og Indskrivningspenge. Skolebeneficier.

Skolepengene ere for Tiden:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| i Forberedelsesklassen | | - | 8 | Spd. aarlig, |
| - Middelskoleklasse | I | - | 10 | — |
| - — | II | - | 12 | — |
| - — | III | - | 16 | — |
| - — | IV, V, VI | - | 24 | — |

I anden og tredie Latinklasse betales som forhen 32 Spd. aarlig foruden en Kontingent af 2 Spd. 48 ß for Lys og Brænde.

For Latingymnasiet, hvis nederste Klasse skal oprettes i August d. A., ere Skolepengene bestemte til 36 Spd. aarlig i begge Klasser.

For Brødre tilstaaes den sædvanlige Moderation.

Som Indskrivningspenge erlægges i 2den og 3die Latinklasse efter den gamle Ordning 4 Sp., i de øvrige Klasser 2 Sp.

Hel Friplads har i dette Skoleaar været tilstaaet sex Elever, halv Friplads fire Elever.

Af Renterne af Kong Carl Johans Legat, stort 2000 Spd., have fire Elever havt Stipendier, to hver omtr. 30 Spd., to hver omtr. 20 Spd.

Skiens Sparebank har ogsaa i dette Skoleaar til Understøttelse for trængende Disciple af Middelskolen skjænket 100 Species, hvilke ere anvendte til helt eller delvis at betale deres Skolepenge.

Skolens Kasserer er forhenværende Adjunkt *H. Arentz.*

## IX.
## Skolens Budget for Skoleaaret 1874—1875.

For det kommende Skoleaar ere Skolens Udgifter og Indtægter beregnede saaledes:

## Udgifter.

| | | |
|---|---|---|
| 1. Lønninger | | |
| a. til de kongelig ansatte Lærere: | | |
| Rektor . . . . . . . . . . | 1000 Spd. | |
| 2 Overlærere à 600 Spd. . . . | 1200 — | |
| 3 Adjunkter à 400 Spd. . . | 1200 — | |
| | | 3400 Spd. |
| b. Klasselærere: | | |
| 2 Lærere à 350 Spd. . . . | 700 Spd. | |
| 1 Lærer à 300 Spd. . . . | 300 — | |
| | | 1000 — |
| c. Timeundervisning: | | |
| Gymnastiklæreren . . . . . | 72 Spd. | |
| Skrive- og Tegnelærer . . . | 120 — | |
| Sanglærer . . . . . . . . | 40 — | |
| | | 232 — |
| d. Kassereren . . . . . . . . . . . . . | | 100 — |
| e. Pedellen . . . . . . . . | 96 Spd. | |
| personligt Tillæg for Pedel Fladsrud . . . . . . . . | 12 — | |
| | | 108 — |
| | Tilsammen | 4840 Spd. |
| 2. a. Bibliotheket . . . . . . . | 40 Spd. | |
| b. fysikalske og naturhistoriske Samlinger . . . . . . . . | 10 — | |
| c. andre Læremidler . . . . | 20 — | |
| | | 70 — |
| 3. Stipendier, Legater og Fripladse samt Moderation for Brødre . . . . . . | | 400 — |
| 4. Lys og Brænde . . . . . . . . . . . | | 150 — |
| 5. Trryknings- og Avertissementsomkostninger, Program, Skrivematerialier . . . . . . | | 50 — |
| 6. Blandede og tilfældige Udgifter . . . . | | 30 — |
| | Tilsammen | 5540 Spd. |

### Indtægter.

| | | |
|---|---|---|
| 1. Skole- og Indskrivningspenge . . . . . | 2000 | Spd. |
| 2. Renter af Kong Carl Johans Gave . . . | 100 | — |
| 3. Bidrag af Kommunen . . . . . . . . . | 800 | — |
| | 2900 | Spd. |
| hvorefter er paaregnet: | | |
| 4. Som Tilskud af Statskassen . . . . . . | 2640 | — |
| | 5540 | Spd. |

Det foreslaaede Tilskud af Statskassen, 2640 Spd., er bevilget af Storthinget.

---

Skolens Aarsexamen afholdes fra den 30te Juni til 11te Juli i den nedenfor angivne Orden.

Den skriftlige Del af sjette Middelskoleklasses Examen (Middelskolens Afgangsexamen) er overensstemmende med det derom udfærdigede Reglement begyndt allerede den 15de Juni og fortsat i de nærmest paafølgende Dage.

---

# Aarsexamen
## ved Skiens offentlige Skole for den høiere Almendannelse i Juni og Juli 1874.

### Tirsdag den 30te Juni.

| Formiddag. | | Eftermiddag. |
|---|---|---|
| 3die Lat. Kl.<br>2den — - | Norsk Stil i No. 6. | |
| Midd. Kl. V | Norsk Stil i No. 1. | |
| — - IV<br>— - III | Norsk Stil i No. 3. | |
| — - II | Norsk Diktat i No. 7. | |
| — - I | Norsk Diktat i No. 2. | |

## Onsdag den 1ste Juli.

### Formiddag.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3die Lat. Kl. | | | Latin, skr., i No. 6. |
| 2den | — | - | |
| M. Kl. | | V | Latin, skr., i No. 2. |
| - | — | IV | Tydsk, skr., i No. 2. |
| - | — | III | Tydsk, skr., i No. 1. |
| - | — | II | Norsk, Nielsen, i No. 7. |
| - | — | I | Regning, Holm, i No. 3. |

### Eftermiddag.

M. Kl. VI. Norsk, Hanssen, i No. 4.

\- – V + IV. Engelsk, skr., i No. 2.

## Thorsdag den 2den Juli.

### Formiddag.

3die og 2den Lat. Kl. Religion, Holfeldt, i No. 6.

M. Kl. VI. Historie og Geografi, Jynge, i No. 4.

\- — V. Mathematik, skr., i No. 2.

\- — IV. Tydsk, Stoltenberg, i No. 5.

\- — III a. Mathematik, Holm, i No. 1.

\- — I. Tydsk, Nielsen, i No. 3.

### Eftermiddag.

3die Lat. Kl. Engelsk, Arctander, i No. 6.

M. Kl. VI, Tydsk, Stoltenberg, i No. 7.

\- — V, Tydsk, skr., i No. 2.

\- — IV, Mathematik, skr., i No. 3.

Forber. Kl. Regning, Holm, i No. 1.

## Fredag den 3die Juli.

| Formiddag. | Eftermiddag. |
|---|---|
| 3die og 2den Lat. Kl. Fransk, Stoltenberg, i No. 6. | |
| M. Kl. VI. Religion, Nielsen, i No. 4. | |
| - — V. Norsk, Hanssen, i No. 3. | |
| - — IV. Mathematik, Broch, i No. 5. | |
| - — III a. Geografi, Jynge, i No. 2. | |
| - — III b. Mathematik, Holm, i No. 1. | |
| - — II a. Naturkundskab, Arctander, i No. 7. | |

## Lørdag den 4de Juli.

| Formiddag. | Eftermiddag. |
|---|---|
| 3die Lat. Kl. Græsk, Schreiner, i No. 6. | Sang (alle Klasser), Kl. 4, i No. 3. |
| M. Kl. V. Latin, Holfeldt, i No. 3. | Gymnastik (alle Klasser), Kl. 5. |
| - — IV. Norsk, Hanssen, i No. 5. | |
| - — III, b. Geografi, Jynge, i No. 1. | |
| - — II, b. Naturkundskab, Arctander, i No. 8. | |
| - — I. Norsk, Nielsen, i No. 2. | |
| Forbered. Kl. Religion, Holm, i No. 7. | |

## Mandag den 6te Juli.

| Formiddag. | Eftermiddag. |
|---|---|
| 3die Lat. Kl. / 2den — - } Tydsk, Holfeldt, i No. 6. | M. Kl. IV. Engelsk, Arctander, i No. 2. |
| M. Kl. V, a. Mathematik, Broch, i No. 3. | |
| - — IV. Historie, Jynge, i No. 5. | |
| - — III. Norsk, Hanssen, i No. 1. | |
| - — II. Regning, Holm, i No. 7. | |
| Forber. Kl. Norsk, Nielsen, i No. 2. | |

## Tirsdag den 7de Juli.

| Formiddag. | Eftermiddag. |
|---|---|
| 3die Lat. Kl. Latin, Schreiner, i No. 6. | 2den Lat. Kl. Mathematik, Broch, i No. 1. |
| M. Kl. VI. Mathematik, Broch, i No. 4. | M. Kl. V. Engelsk, Arctander, i No. 2. |
| - -- V. Tydsk, Stoltenberg, i No. 3. | |
| - — IV. Latin, Holfeldt, i No. 5. | |
| - — III. Tydsk, Hanssen, i No. 1. | |
| - — II. Religion, Nielsen, i No. 7. | |
| - — I. Religion, Holm, i No. 2. | |

## Onsdag den 8de Juli.

### Formiddag.

3die Lat. Kl.
2den — - Historie, Jynge, i No. 6.

M. Kl. V. Historie, Hanssen, i No. 3.

- — IV. Naturkundskab, Arctander, i No. 5.

- — III. Religion, Holfeldt, i No. 1.

- — II. Tydsk, Nielsen, i No. 2.

Forber. Kl. Geografi, Holm, i No. 7.

### Eftermiddag.

M. Kl. V, b. Mathematik, Broch, i No. 2.



## Thorsdag den 9de Juli.

### Formiddag.

M. Kl. VI. Naturkundskab, Broch, i No. 4.

- — V. Fransk, Stoltenberg, i No. 3.

- — IV. Religion, Holfeldt, i No. 5.

- — III, a. Historie, Jynge, i No. 1.

- — II. Geografi, Hanssen, i No. 7.

- — I. Geografi, Holm, i No. 2.

### Eftermiddag.

2den Lat. Kl. Latin, Schreiner, i No. 6.

M. Kl. V, a. Naturkundskab og Geografi, Broch, i No. 2.

- — III, b. Historie, Jynge, i No. 1.

## Fredag den 10de Juli.

| Formiddag. | Eftermiddag. |
| --- | --- |
| 3die Lat. Kl. Mathematik, Broch, i No. 2. | 2den Lat. Kl. Græsk, Jynge, i No. 1. |
| M. Kl. V. Religion, Holfeldt, i No. 3. | M. Kl. VI. Latin, Stoltenberg, i No. 2. |
| - — IV. Geografi, Jynge, i No. 5. | |
| - — III, a. Naturkundskab, Arctander, i No. 1. | |
| Forbered. Kl. Historie, Holm, i No. 7. | |

## Lørdag den 11te Juli.

| Formiddag. | Eftermiddag. |
| --- | --- |
| 3die Lat. Kl. } Geografi, Jynge, i No. 6. | |
| 2den — - } | |
| M. Kl. VI. Fransk, Stoltenberg, i No. 4. | |
| - — V, b. Naturkund. og Geogr., Broch, i No. 3. | |
| - — III, b. Naturkundskab, Arctander, i No. 1. | |
| - — II. Historie, Hanssen, i No. 7. | |
| - — I. Historie, Holm, i No. 2. | |

---

**Examen begynder hver Formiddag Kl. 9, hver Eftermiddag Kl. 4.**

**Tirsdag den 14de Juli Kl. 10 Formiddag meddeles Examens Udfald i Skolens Festivitetslokale.**

**Ferierne indtræde Onsdag den 15de Juli og ende Lördag den 15de August.**

**Mandag den 17de August Kl. 10 Formiddag möde Eleverne igjen paa Skolen.**

**Mandag den 24de August Kl. 9 Formiddag holdes Optagelsespröve for de nyindmeldte Elever.**

---

*Disciplenes Forældre og Foresatte samt enhver anden, som maatte interessere sig for Skolen og dens Ungdom, indbydes herved til at overvære den mundtlige Examen og dens Afslutning (Tirsdag den 14de Juli Kl. 10 Formiddag i Skolens Festivitetslokale).*

**E. Schreiner.**

---